Commun. Math. Phys. 104, 471–507 (1986)

Communications in
Mathematical
Physics

Propriétés d'intersection des marches aléatoires

I. Convergence vers le temps local d'intersection

J.-F. Le Gall

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, Tour 56, F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. We study intersection properties of multi-dimensional random walks. Let X and Y be two independent random walks with values in $\mathbb{Z}^d$ ($d \leqq 3$), satisfying suitable moment assumptions, and let I_n denote the number of common points to the paths of X and Y up to time n. The sequence (I_n), suitably normalized, is shown to converge in distribution towards the "intersection local time" of two independent Brownian motions. Results are applied to the proof of a central limit theorem for the range of a two-dimensional recurrent random walk, thus answering a question raised by N. C. Jain and W. E. Pruitt.

Plan de l'article

1. Introduction

Soient X et X' deux marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ ($d \geqq 1$). Nous supposerons toujours que X et X' sont centrées, ont des moments d'ordre deux et sont adaptées, au sens où la trajectoire de X, respectivement de X', n'est presque sûrement pas portée par un sous groupe strict de $\mathbb{Z}^d$. On note $X(0, n)$, respectivement $X'(0, n)$, la trajectoire de X, resp. de X', sur l'intervalle $[0, n]$. Soit $I_n = |X(0, n) \cap X'(0, n)|$ le nombre de points d'intersection des trajectoires de X et X'

jusqu'à l'instant n. On a $I_\infty = \infty$ p.s. si et seulement si $d \leqq 4$. Ce résultat a été établi par Erdös et Taylor [12], dans le cas des marches aléatoires simples (voir aussi Lawler [24] pour le cas $d=4$). L'idée de départ du présent travail est, dans le cas où $I_\infty = \infty$ p.s., d'étudier le comportement asymptotique de la suite (I_n) quand n tend vers l'infini. Nous nous limiterons aux dimensions $d \leqq 3$; le cas $d=4$, qui présente certaines particularités remarquables, sera étudié dans un article à venir [29].

Les propriétés d'intersection des marches aléatoires ont fait l'objet de nombreux travaux récents motivés par des problèmes d'origine physique. La probabilité d'intersection pour deux marches aléatoires indépendantes en dimension 4 a été étudiée par Lawler [25, 26]. Une approche du même problème utilisant la théorie du groupe de renormalisation a été développée par Felder et Fröhlich [13]. Le présent travail a été en partie motivé par l'abondante littérature concernant les "self-avoiding random walks," marches aléatoires s'évitant elles-mêmes, qui trouve son origine dans le fait que ces marches aléatoires un peu particulières fournissent une bonne modélisation mathématique des chaines de polymères. Il semble en effet plausible qu'une bonne compréhension des "self-avoiding random walks" doive passer par une étude approfondie des propriétés d'intersection des marches aléatoires usuelles. Nous renvoyons à Freed [15] pour de nombreuses références sur le sujet des "self-avoiding random walks" et les liens avec la théorie des polymères, et à Brydges et Spencer [2] pour des résultats récents intéressants concernant les grandes dimensions.

Décrivons brièvement nos résultats, en supposant maintenant $d \leqq 3$. Le théorème d'invariance de Donsker suggère que la suite (I_n) convenablement normalisée devrait converger en distribution, quand n tend vers l'infini, vers une variable aléatoire «mesurant le nombre de points d'intersection» de deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Une telle variable aléatoire a été introduite et définie rigoureusement par Wolpert [42] et Geman, Horowitz et Rosen [16] sous le nom de temps local d'intersection. Soient W et W' deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d \leqq 3)$ issus de 0. Le temps local d'intersection de W et W' est la mesure de Radon positive sur $(\mathbb{R}_+)^2$ définie formellement, pour toute partie borélienne A de $(\mathbb{R}_+)^2$, par:

$$\alpha(A) = \iint_A ds\, dt \quad \delta_{(0)}(W_s - W'_t), \tag{1.a}$$

où $\delta_{(0)}$ désigne la mesure de Dirac au point 0 de $\mathbb{R}^d$. Nous renvoyons à [16] pour une définition rigoureuse de $\alpha(A)$. La notion de temps local d'intersection permet d'énoncer les premiers résultats sur le comportement asymptotique de I_n. Supposons que X et X' sont isotropes, au sens où la matrice de covariance de X, resp. de X', s'écrit $\sigma^2 \cdot \mathrm{Id.}$, resp. $\sigma'^2 \cdot \mathrm{Id.}$, où σ et σ' sont deux constantes positives. Dans le cas $d=3$ notons q, resp. q', la probabilité que X, resp. X' ne revienne jamais à son point de départ. Laissant de côté le cas $d=1$, qui est un peu particulier et plus facile, on obtient:

– si $d=2$,

$$\lim_{n\to\infty} ((\log n)^2/n) I_n = 4\pi^2 \alpha([0,\sigma^2] \times [0,\sigma'^2]) \tag{1.b}$$

– si $d=3$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} I_n = q q' (\sigma\sigma')^{-2} \alpha([0,\sigma^2] \times [0,\sigma'^2]) \tag{1.c}$$

où dans les deux cas la convergence a lieu en distribution et $\alpha(\cdot)$ est définie par (1.a). On comprend mieux les résultats limites (1.b) et (1.c) en les rapprochant des résultats correspondants pour le mouvement brownien, établis dans [27]. Pour $\varepsilon>0$ soit S_ε, resp. S'_ε, la saucisse de Wiener de rayon ε associée à W, resp. W', sur l'intervalle $[0,1]$: S_ε est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ dont la distance à la trajectoire de W jusqu'à l'instant 1 est inférieure à ε. Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ on a (voir [27]):

– si $d=2$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)^2 m(S_\varepsilon\cap S'_\varepsilon)=\pi^2\alpha([0,1]^2) \tag{1.d}$$

– si $d=3$,
$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon^{-1/2}m(S_\varepsilon\cap S'_\varepsilon)=4\pi^2\alpha([0,1]^2) \tag{1.e}$$

avec convergence dans tous les espaces L^p $(1\leqq p<\infty)$. De façon générale Spitzer [38] remarque déjà que les résultats portant sur la mesure de Lebesgue de la saucisse de Wiener correspondent à ceux qui concernent le nombre de points visités par une marche aléatoire. Cependant il ne semble pas facile de déduire directement les résultats limites (1.b) et (1.c) respectivement de (1.d) et (1.e).

Le preuve de (1.b) et (1.c) repose sur la méthode des moments: on montre que pour tout entier $p\geqq 1$, la suite des moments d'ordre p de I_n, convenablement normalisée, converge vers le moment d'ordre p de la variable aléatoire limite. Par exemple si $p=1$ et en supposant pour simplifier que X et X' ont même loi et sont issues de 0, on écrit:
$$E[I_n]=\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}P[y\in X(0,n)\cap X'(0,n)]=\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}P[T_y\leqq n]^2, \tag{1.f}$$

où on note $T_y=\inf\{n\geqq 0, X_n=y\}$. (1.f) montre que pour trouver un équivalent de $E[I_n]$ quand n tend vers l'infini il suffit d'étudier le comportement asymptotique de $P[T_y\leqq n]$ quand $|y|$ et n sont grands. Pour $y\in\mathbb{Z}^d-\{0\}$, soit μ_y la loi de $T_y/|y|^2$ conditionnellement à $\{T_y<\infty\}$ (le conditionnement est superflu si $d=2$). Toujours dans le cas isotrope nous montrons que:

– si $d=2$,
$$\lim_{|y|\to\infty}(\log 1/|y|)\mu_y=\mu \tag{1.g}$$

où $\mu(dt)=(1/2t)\exp(-1/2\sigma^2 t)dt$ et la convergence a lieu au sens de la topologie vague des mesures,

– si $d=3$,
$$\lim_{|y|\to\infty}\mu_y=\mu \tag{1.h}$$

où $\mu(dt)=\sigma^{-1}(2\pi)^{-1/2}t^{-3/2}\exp(-1/2\sigma^2 t)dt$ et la convergence a lieu au sens de la topologie étroite. On peut identifier les lois limites apparaissant dans (1.g) et (1.h) comme les lois du temps d'atteinte de 0 par un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, issu d'un point x avec $|x|=\sigma^{-1}$, et conditionné à visiter 0. La difficulté consiste ici à bien interpréter ce dernier conditionnement. (1.g) est l'analogue pour une marche aléatoire d'un résultat relatif au mouvement brownien plan établi par Spitzer [37] (Lemma 1). Utilisant la représentation (1.f) et les résultats limites (1.g) et (1.h) il n'est pas très difficile d'obtenir un équivalent de $E[I_n]$ et même de tous les moments de I_n, ce qui conduit aux résultats limites (1.b) et (1.c).

L'étude du nombre de points d'intersection de deux marches aléatoires indépendantes est étroitement liée à celle du nombre de points visités par une seule marche aléatoire. Considérons maintenant une seule marche aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, adaptée, centrée et ayant des moments d'ordre deux. Soient M_X la matrice de covariance de X et $\sigma^2=(\det M_X)^{1/d}$. Dans le cas $d\geqq 3$ notons à nouveau q la probabilité que X partant de 0 n'y revienne jamais. Soit $R_n=|X(0,n)|$ le nombre de points visités par X avant l'instant n. Dvoretzky et Erdös [7] ont montré que:

– si $d=2$,

$$\lim_{n\to\infty} (\log n/n)R_n=2\pi\sigma^2, \quad \text{p.s.}, \tag{1.i}$$

– si $d\geqq 3$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}R_n=q, \quad \text{p.s.} \tag{1.j}$$

Ces résultats peuvent être étendus à des marches aléatoires vérifiant des hypothèses plus générales que les nôtres: voir Spitzer [39] (p. 38) et Jain et Pruitt [20] pour le cas $d=2$. En particulier une application simple du théorème ergodique sous-additif de Kingman [23] montre que (1.j) est vérifié par toutes les marches aléatoires transientes. Remarquons ici que le cas $d=1$ est très particulier puisqu'on peut montrer [20] la convergence en distribution de $n^{-1/2}R_n$ vers une loi non dégénérée. Les résultats limites (1.i) et (1.j) constituent la loi forte des grands nombres pour R_n: il est naturel de se demander s'il existe aussi un théorème central limite correspondant (d'autres résultats asymptotiques concernant la suite (R_n) ont été établis par Donsker et Varadhan [5]). Jain et Pruitt [19, 21] (voir aussi Jain et Orey [22]) ont montré le théorème central limite pour (R_n) quand $d\geqq 3$:

– si $d=3$,

$$\lim_{n\to\infty} (n\log n)^{-1/2}(R_n-E[R_n])=C\cdot N \tag{1.k}$$

– si $d\geqq 4$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}(R_n-E[R_n])=C\cdot N \tag{1.l}$$

où la convergence a lieu en distribution, N désigne une variable normale centrée réduite et C est une constante dépendant de X. Dans le cas $d=2$, le résultat limite (1.b) peut être utilisé pour établir le théorème central limite pour (R_n), répondant ainsi à une question de Jain et Pruitt [20]:

– si $d=2$,

$$\lim_{n\to\infty} ((\log n)^2/n)(R_n-E[R_n])=-4\pi^2\sigma^2\gamma(\mathscr{C}_1) \tag{1.m}$$

où la convergence a lieu en distribution et $\gamma(\mathscr{C}_1)$ désigne le temps local d'intersection renormalisé d'un mouvement brownien plan avec lui-même, défini formellement par:

$$\gamma(\mathscr{C}_1)=\iint_{\{0\leqq s<t\leqq 1\}} \delta_{(0)}(W_s-W_t)\,ds\,dt-E\Big[\iint_{\{0\leqq s<t\leqq 1\}} \delta_{(0)}(W_s-W_t)\,ds\,dt\Big]. \tag{1.n}$$

Remarquons que bien que chacun des deux termes du membre de droite de (1.n) soit infini il est possible de définir leur différence comme une variable aléatoire finie. Ce phénomène a été observé pour la première fois par Varadhan [40] et est connu sous le nom de renormalisation de Varadhan. Différentes approches de ce résultat ont été proposées par Rosen [35] et Dynkin [11]. Une construction élémentaire de $\gamma(\mathscr{C}_1)$ est donnée dans [28] où l'on montre aussi l'analogue «brownien» de (1.m): soit S_ε la saucisse de Wiener de rayon ε associée à W sur l'intervalle $[0,1]$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)^2(m(S_\varepsilon)-E[m(S_\varepsilon)])=-\pi^2\gamma(\mathscr{C}_1), \tag{1.o}$$

avec convergence dans $L^2(P)$.

Il est remarquable que contrairement à ce qui se passe en dimension supérieure, la loi limite dans (1.m) ne soit pas une loi normale. Essayons d'expliquer pourquoi il en est ainsi, ce qui montrera aussi les liens entre (1.b) et (1.m). On écrit pour tout entier $p\geqq 2$:

$$R_{pn}=\sum_{j=1}^{p} R_n^{(j)}-\sum_{j=2}^{p}|X(0,(j-1)n)\cap X((j-1)n,jn)| \tag{1.p}$$

où on a noté $R_n^{(j)}=|X((j-1)n,jn)|$. Les variables $R_n^{(j)}$ $(1\leqq j\leqq p)$ sont indépendantes et de même loi que R_n. (1.p) entraîne:

$$\begin{aligned}R_{pn}-E[R_{pn}]&=\sum_{j=1}^{p}(R_n^{(j)}-E[R_n^{(j)}])\\&\quad-\sum_{j=2}^{p}(|X(0,(j-1)n)\cap X((j-1)n,jn)|-E[|X(0,(j-1)n)\cap X((j-1)n,jn)|])\end{aligned} \tag{1.q}$$

Considérons d'abord le cas $d\geqq 3$: on vérifie qu'on peut alors choisir p grand, en fonction de n, et s'arranger pour que simultanément les termes d'intersection du membre de droite de (1.q) soient négligeables devant le terme $\sum(R_n^{(j)}-E[R_n^{(j)}])$. La convergence en distribution de $R_{pn}-E[R_{pn}]$ est ainsi ramenée à celle d'une somme de variables aléatoires indépendantes centrées, d'où la convergence vers une loi normale. Dans le cas $d=2$ la situation est complètement différente: on s'aperçoit que si l'on choisit p grand (fixe) les termes d'intersection deviennent prépondérants devant le terme $\sum(R_n^{(j)}-E[R_n^{(j)}])$.

Or (1.b), et le fait qu'on puisse interpréter les différentes parties de la trajectoire de X comme des trajectoires de marches aléatoires indépendantes, permettent d'étudier le comportement asymptotique des termes d'intersection. On voit qu'à la limite on obtient un temps local d'intersection du mouvement brownien plan avec lui-même, renormalisé puisqu'on a retranché les espérances.

La partie 2 contient les rappels nécessaires sur le temps local d'intersection et la renormalisation de Varadhan, ainsi que certaines estimations concernant les moments du temps local d'intersection. La partie 3 est consacrée à l'étude asymptotique du temps d'atteinte de 0 par une marche aléatoire, quand le point de départ tend vers l'infini. Nous montrons en particulier les résultats limites (1.g) et (1.h), ainsi que leur analogue en dimension supérieure. Les méthodes sont ici très proches de celles du livre de Spitzer [39]. Dans la partie 4 nous étudions le nombre de points d'intersection des trajectoires de k marches aléatoires indépendantes en dimension 1; les résultats obtenus généralisent un théorème dû à Jain et Pruitt ([20] Theorem 6.1). La partie 5 contient la preuve des résultats (1.b) et (1.c) ainsi que l'extension de (1.b) à k marches aléatoires indépendantes en dimension 2. Les estimations de la partie 3 constituent l'outil essentiel pour la preuve de ces résultats. Enfin dans la partie 6 nous établissons le théorème central limite (1.m). Les idées sont les mêmes que dans la partie 5 mais les détails techniques sont considérablement plus difficiles. Nous esquissons aussi un argument qui montre que, à condition de connaître le comportement asymptotique de $\operatorname{var}(R_n)$, les mêmes méthodes permettent de retrouver assez facilement les résultats de Jain et Pruitt (1.k) et (1.l).

2. Rappels sur le temps local d'intersection et la renormalisation de Varadhan

Nous nous proposons dans cette partie de rappeler quelques résultats sur le temps local d'intersection associé à des mouvements browniens indépendants et sur la renormalisation de Varadhan pour le mouvement plan. Nous cherchons aussi à savoir, ce qui sera important pour nos applications, si la loi du temps local d'intersection est ou non déterminée par ses moments.

Soient $B^1, \ldots, B^k$ k $(k \geqq 2)$ mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geqq 2)$, issus de 0. Dvoretzky, Erdös, Kakutani et Taylor, [8, 9, 10] ont montré que les trajectoires de $B^1, \ldots, B^k$ ont presque sûrement des points communs, autres que 0, si et seulement si on est dans l'une des deux situations suivantes:

$$\begin{aligned} &- \text{soit } d=2,\ k \text{ quelconque},\\ &- \text{soit } d=3,\ k=2. \end{aligned} \tag{2.a}$$

Dans la suite nous supposerons toujours que le couple (d, k) satisfait la condition (2.a). Un outil important pour l'étude des points communs aux trajectoires de $B^1, \ldots, B^k$ est la notion de temps local d'intersection, introduite par Geman, Horowitz, Rosen [16] (voir aussi Wolpert [42]). On appelle temps local d'intersection de $B^1, \ldots, B^k$ la famille notée $(\alpha(y, \cdot),\ y \in (\mathbb{R}^d)^{k-1})$, de mesures de Radon positives sur $(\mathbb{R}_+)^k$ qui satisfait P-p.s. les deux conditions suivantes:

(i) l'application $y \to \alpha(y, \cdot)$ est continue pour la topologie vague des mesures,

(ii) pour toute fonction borélienne positive f définie sur $(\mathbb{R}^d)^{k-1}$ et toute partie borélienne A de $(\mathbb{R}_+)^k$,

$$\int_A ds_1 \ldots ds_k f(B^1_{s_1} - B^2_{s_2}, \ldots, B^{k-1}_{s_{k-1}} - B^k_{s_k}) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-1}} dy\, \alpha(y, A) f(y). \tag{2.b}$$

L'existence du temps local d'intersection est établie dans [16], l'unicité découle aisément de la condition (i). On peut traduire la condition (ii) par l'identité formelle

$$\alpha(y, A) = \int_A ds_1 \ldots ds_k \delta_{(y)}(B^1_{s_1} - B^2_{s_2}, \ldots, B^{k-1}_{s_{k-1}} - B^k_{s_k}) \tag{2.c}$$

où $\delta_{(y)}$ désigne la mesure de Dirac au point y.

Pour $t \geqq 0$ on notera simplement $\alpha_t(y) = \alpha(y, [0; t]^k)$. Une approximation de $\alpha_t(0)$ peut être obtenue en étudiant l'intersection des «saucisses de Wiener» associées à $B^1, \ldots, B^k$. Pour $\varepsilon > 0$ et $1 \leqq i \leqq k$ la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B^i sur l'intervalle $[0; t]$ est définie par

$$S_\varepsilon^i(0,t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \inf(|B_s^i - x|; 0 \leqq s \leqq t) \leqq \varepsilon\}. \tag{2.d}$$

$S_\varepsilon^i(0,t)$ est donc simplement le voisinage d'ordre ε de la trajectoire de B^i sur $[0; t]$. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Alors, d'après le corollaire 3.2 de [27],

$$\begin{aligned} &- \text{si } d=2, \ \lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^k m(S_\varepsilon^1(0,t) \cap \ldots \cap S_\varepsilon^k(0,t)) = \pi^k \alpha_t(0), \\ &- \text{si } d=3, \ \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1/2} m(S_\varepsilon^1(0,t) \cap S_\varepsilon^2(0,t)) = 4\pi^2 \alpha_t(0), \end{aligned} \tag{2.e}$$

avec convergence dans tous les espaces L^p $(p \geqq 1)$.

L'idée de départ du présent travail, qui est développée dans la partie 5, est de montrer pour des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ des théorèmes limites analogues à (2.e). On remplace la saucisse de Wiener par la trajectoire de la marche aléatoire considérée. L'analogue de la mesure de Lebesgue de l'intersection des k saucisses de Wiener est simplement le nombre de points communs aux trajectoires des k marches aléatoires, jusqu'à un instant n qu'on fera tendre vers l'infini. Comme notre approche repose sur la méthode des moments, il sera important de connaître l'expression exacte des moments de $\alpha_t(0)$.

Proposition 2.1. *Pour $s > 0$ et $y, z \in \mathbb{R}^d$, soit $p_s(y,z)$ la densité de transition gaussienne:*

$$p_s(y,z) = (2\pi s)^{-d/2} \exp(-|z-y|^2/2s).$$

Alors, pour tout entier $p \geqq 1$,

$$E[\alpha_t(0)^p] = \int_{(\mathbb{R}^d)^p} dy_1 \ldots dy_p \left(\sum_{\sigma \in S_p} \int_{\Omega_p(t)} ds_1 \ldots ds_p \prod_{i=1}^p p_{s_i - s_{i-1}}(y_{\sigma(i-1)}, y_{\sigma(i)}) \right)^k, \tag{2.f}$$

où on note S_p l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, p\}$;

$$\Omega_p(t) = \{(s_1, \ldots, s_p); 0 \leqq s_1 \leqq \ldots \leqq s_p \leqq t\},$$

et par abus d'écriture $s_0 = 0$, $y_{\sigma(0)} = 0$.

Preuve. Une manière simple d'établir la formule (2.f) consiste à utiliser le résultat d'approximation (2.e) conjointement avec le lemme 2.1 de [27], ce qui donne immédiatement le résultat voulu. On peut aussi à partir de l'identité (2.c) faire des calculs formels qui seront justifiés grâce à des méthodes d'analyse de Fourier. □

La formule (2.f) ne permettant pas un calcul explicite des moments de $\alpha_t(0)$, il est utile d'établir des estimations qui précisent la façon dont $E[\alpha_t(0)^p]$ croit quand p tend vers l'infini. Geman, Horowitz et Rosen [16] ont montré l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tout $p \geqq 1$,

$$E[\alpha_t(0)^p] \leqq K^p (p!)^k.$$

Le lemme suivant montre qu'on peut sensiblement améliorer ces estimations.

Lemme 2.2. *Il existe des constantes positives C_1, C_2, dépendant du couple (d,k), telles que, pour tout entier $p \geqq 2$,*

$$- \text{si } d=2,\ C_1^p(p!)^{k-1} \leqq E[\alpha_t(0)^p] \leqq C_2^p(p!)^{k-1}(\log p)^p \tag{2.g}$$

$$- \text{si } d=3,\ C_1^p(p!)^{3/2} \leqq E[\alpha_t(0)^p] \leqq C_2^p(p!)^{3/2}. \tag{2.h}$$

Preuve. Nous montrerons seulement la majoration de (2.g) dans le cas $k=2$ et la minoration de (2.h). La preuve des autres inégalités est tout à fait semblable. Supposons d'abord $d=2$, $k=2$; à l'aide de la formule (2.f) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient,

$$E[\alpha_t(0)^p] \leqq (p!)^2 \int_{(\mathbb{R}^2)^p} dy_1 \dots dy_p (I_p(y_1, \dots, y_p))^2, \tag{2.i}$$

où on note

$$I_p(y_1, \dots, y_p) = \int_{\Omega_p(t)} ds_1 \dots ds_p \prod_{i=1}^{p} p_{s_i - s_{i-1}}(y_{i-1}, y_i).$$

Soit $\Delta_p = \{(u_1, \dots, u_p); u_i \geqq 0 \text{ et } u_1 + \dots + u_p \leqq 1\}$. A l'aide d'un changement de variables on déduit de (2.i) l'existence d'une constante C, dépendant de t, telle que,

$$E[\alpha_t(0)^p] \leqq C^p (p!)^2 \int_{(\mathbb{R}^2)^p} dz_1 \dots dz_p (J_p(z_1, \dots, z_p))^2. \tag{2.j}$$

où:

$$J_p(z_1, \dots, z_p) = \int_{\Delta_p} \frac{du_1 \dots du_p}{u_1 \dots u_p} \exp\left(- \sum_{i=1}^{p} |z_i|^2/u_i \right).$$

On obtient aisément l'identité:

$$J_p(z_1, \dots, z_p) = \int_0^1 \frac{du_p}{u_p} \exp(-|z_p|^2/u_p) J_{p-1}((1-u_p)^{-1/2} z_1, \dots, (1-u_p)^{-1/2} z_{p-1}). \tag{2.k}$$

Notons $\phi(r) = \int_0^1 \frac{du}{u} \exp(-r/u)$. (2.k) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent,

$$(J_p(z_1, \dots, z_p))^2 \leqq \phi(|z_p|^2) \int_0^1 \frac{du_p}{u_p} \exp(-|z_p|^2/u_p)$$
$$\cdot (J_{p-1}((1-u_p)^{-1/2} z_1, \dots, (1-u_p)^{-1/2} z_{p-1}))^2$$

d'où,

$$\int_{(\mathbb{R}^2)^p} dz_1 \dots dz_p (J_p(z_1, \dots, z_p))^2 \leqq K_p \int_{(\mathbb{R}^2)^{p-1}} dz_1 \dots dz_{p-1} (J_{p-1}(z_1, \dots, z_{p-1}))^2 \tag{2.l}$$

à condition de poser

$$K_p = \int_{\mathbb{R}^2} dz_p \phi(|z_p|^2) \int_0^1 \frac{du_p}{u_p} \exp(-|z_p|^2/u_p)(1-u_p)^p.$$

Un calcul facile montre

$$K_p = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \frac{du\, ds}{u+s} (1-u)^p \underset{p \to \infty}{\sim} 2\pi \frac{\log p}{p}.$$

En revenant à (2.l) on trouve, pour une certaine constante $\bar{C}$,

$$\int_{(\mathbb{R}^2)^p} dz_1 \ldots dz_p (J_p(z_1, \ldots, z_p))^2 \leqq \bar{C}^p \frac{(\log p)^p}{p!}. \tag{2.m}$$

(2.j) et (2.m) entraînent la majoration de (2.g). Nous passons maintenant à la minoration de (2.h): on suppose $d=3$ et $k=2$; (2.f) entraîne aisément:

$$E[\alpha_t(0)^p] = C^p \int_{(\mathbb{R}^3)^p} dz_1 \ldots dz_p \Big(\sum_{\sigma \in S_p} J_\sigma(z_1, \ldots, z_p) \Big)^2, \tag{2.n}$$

où:
$$J_\sigma(z_1, \ldots, z_p) = \int_{\Delta_p} \frac{du_1 \ldots du_p}{u_1^{3/2} \ldots u_p^{3/2}} \exp\Big(-\sum_{i=1}^p |z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(i-1)}|^2 / u_i \Big)$$

(avec toujours la convention $z_{\sigma(0)} = 0$).

Soit $\psi(r) = \int_0^1 \frac{du}{u^{3/2}} \exp(-r/u)$. Alors,

$$\begin{aligned} J_\sigma(z_1, \ldots, z_p) &\geqq \prod_{i=1}^p \Big(\int_0^{1/p} \frac{du}{u^{3/2}} \exp(-|z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(i-1)}|^2/u) \Big) \\ &\geqq p^{p/2} \prod_{i=1}^p \psi(p|z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(i-1)}|^2) \end{aligned}$$

d'où, en revenant à (2.n)

$$\begin{aligned} E[\alpha_t(0)^p] &= C^p \sum_{\sigma, \tau \in S_p} \int_{(\mathbb{R}^3)^p} dz_1 \ldots dz_p J_\sigma(z_1, \ldots, z_p) J_\tau(z_1, \ldots, z_p) \\ &\geqq C^p p^p \sum_{\sigma, \tau \in S_p} \int_{(\mathbb{R}^3)^p} dz_1 \ldots dz_p \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^p \psi(p|z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(i-1)}|^2) \psi(p|z_{\tau(i)} - z_{\tau(i-1)}|^2) \\ &\geqq C^p p^{-p/2} \sum_{\sigma, \tau \in S_p} \int_{(\mathbb{R}^3)^p} dz_1 \ldots dz_p \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^p \psi(|z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(i-1)}|^2) \psi(|z_{\tau(i)} - z_{\tau(i-1)}|^2). \end{aligned}$$

Pour conclure on remarque simplement que ψ est minorée sur tout compact, d'où pour une constante $\tilde{C}$,

$$E[\alpha_t(0)^p] \geqq \tilde{C}^p p^{-p/2} (p!)^2. \quad \square$$

Remarque. Une autre idée pour majorer les moments de $\alpha_t(0)$ consisterait à utiliser les formules «de type Tanaka» établies par Rosen [35] et Yor [43] pour le temps local d'intersection. Cette méthode conduit vraisemblablement à des estimations très voisines de celles du lemme.

Corollaire 2.3. *Dans les cas $d=2$, $k=2$ ou 3 et $d=3$, $k=2$ la loi de $\alpha_t(0)$ est caractérisée, en tant que probabilité sur $\mathbb{R}_+$, par ses moments.*

Preuve. Soit $m_p = E[(\alpha_t(0))^p]$. D'après le critère de Carleman (voir par exemple Shohat et Tamarkin [36]) il suffit de vérifier la divergence de la série $\sum_{p=1}^{\infty} (m_{2p})^{-1/p}$. Or cela découle des majorations du lemme 2.2. $\square$

Remarquons ici que les cas $d=2$, $k=2$ ou 3, $d=3$, $k=2$ sont les seuls dans lesquels on puisse appliquer le critère de Carleman. Dans les autres cas, les minorations du lemme 2.2 montrent que la série $\sum (m_{2p})^{-1/p}$ converge.

Nous terminerons cette partie par quelques rappels sur la renormalisation de Varadhan pour le mouvement brownien plan. A partir de maintenant B désigne un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0 (certains des résultats qui suivent sont aussi valables pour le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$). Si au lieu de s'intéresser aux intersections de la trajectoire de B avec les trajectoires d'autres mouvements browniens indépendants, on cherche maintenant à étudier les recoupements de la trajectoire de B avec elle-même, on peut définir [33] une notion de «temps local d'intersection de B avec lui-même». Pour d'évidentes raisons de symétrie on se limite à une étude sur $\mathscr{C}=\{(s,t)\in(\mathbb{R}_+)^2; s<t\}$. Le temps local d'intersection de B avec lui-même est la famille $(\beta(y,\cdot), y\in\mathbb{R}^2)$ de mesures de Radon positives sur $\mathscr{C}$ qui satisfait P-p.s. les deux propriétés suivantes:

(i) l'application $y\to\beta(y,\cdot)$ est continue pour la topologie vague des mesures,

(ii) pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}^2$ et toute partie borélienne A de $\mathscr{C}$,

$$\int_A f(B_s-B_t)\,ds\,dt=\int_{\mathbb{R}^2} dy\,\beta(y,A)f(y)\,.$$

Connaissant l'existence du temps local d'intersection pour deux mouvements browniens indépendants, il est facile [28] de construire la famille $(\beta(y,\cdot))$. En effet on écrit $\mathscr{C}$ comme une réunion dénombrable de carrés disjoints, ayant un sommet sur la diagonale $\{s=t\}$. Sur chacun de ces carrés on est ramené à l'étude des intersections de deux mouvements browniens indépendants issus du même point et on utilise les résultats rappelés plus haut. Nous aurons besoin dans la partie 6 de connaître l'expression des moments $E\left[\prod_{i=1}^{p}\beta(0,A_i)\right]$, pour toute famille $(A_i, 1\leqq i\leqq p)$ de carrés, non nécessairement disjoints, contenus dans $\mathscr{C}$. Pour chaque i on écrit $A_i=F_i\times G_i$ où F_i et G_i sont deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$. On a alors le résultat suivant, dont la preuve utilise les mêmes arguments que celle de la proposition 2.1:

$$E\left[\prod_{i=1}^{p}\beta(0,A_i)\right]$$
$$=\int_{(\mathbb{R}^2)^{2p}} dy_1\dots dy_{2p}\sum_{\tau\in S_{2p}}\int_{\prod_{l=1}^{p}(F_l\times G_l)} dt_1\dots dt_{2p}\prod_{i=1}^{2p} p_{t_{\tau(i)}-t_{\tau(i-1)}}(y_{\bar\tau(i-1)},y_{\bar\tau(i)}) \quad (2.\text{o})$$

où, pour $\tau\in S_{2p}$ et $1\leqq i\leqq 2p$, on note $\bar\tau(i)=l$ si $\tau(i)=2l$ ou $2l-1$, et on fait les mêmes conventions que dans (2.f), avec la convention supplémentaire que $p_s(x,y)=0$ si $s<0$.

Soient $K>0$ et pour toute partie borélienne A de $\mathscr{C}$:

$$\beta_K(0,A)=\int_A 1_{(|B_s|\leqq K)}\beta(0,ds\,dt)\,.$$

La formule (2.o) reste vraie si on remplace β par β_K, à condition de remplacer dans le terme de droite $(\mathbb{R}^2)^{2p}$ par $(\{y;|y|\leqq K\})^{2p}$.

Soit $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C} \cap [0;1]^2$. Une différence essentielle avec le cas de deux mouvements browniens indépendants vient de ce que $\beta(0, \mathscr{C}_1) = \infty$ p.s.: la mesure $\beta(0, \cdot)$ explose au voisinage de la diagonale $\{s=t\}$, à cause des «recoupements immédiats» de la trajectoire de B avec elle-même. L'idée de la renormalisation de Varadhan est qu'on peut néanmoins définir $\beta(0, \mathscr{C}_1) - E[\beta(0, \mathscr{C}_1)]$ comme une variable aléatoire finie (et même dans L^2).

Nous allons brièvement décrire une construction qui conduit à la renormalisation de Varadhan et nous sera utile dans la partie 6. Pour tout couple d'entiers (n, k) avec $n \geqq 1$ et $1 \leqq k \leqq 2^{n-1}$ on pose:

$$A_k^n = [(2k-2)2^{-n}; (2k-1)2^{-n}[\times](2k-1)2^{-n}; 2k2^{-n}] . \tag{2.p}$$

On vérifie que $\mathscr{C}_1$ est la réunion disjointe des A_k^n. D'autre part, pour tout n fixé, les variables $\beta(0, A_k^n)$ sont indépendantes et de même loi. Si $(\alpha(y, \cdot), y \in \mathbb{R}^2)$ désigne le temps local d'intersection de deux mouvements browniens plans indépendants (défini comme plus haut), on a de plus:

$$\beta(0, A_k^n) \overset{(d)}{=} \alpha(0, [0; 2^{-n}]^2) \overset{(d)}{=} 2^{-n} \alpha(0, [0;1]^2) . \tag{2.q}$$

Pour tout $n \geqq 1$, soit $A^n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_k^n$. Il découle des remarques précédentes qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 avec:

$$E[\beta(0, A^n)] = K_1 , \qquad E[(\beta(0, A^n) - E[\beta(0, A^n)])^2] = K_2 2^{-n} . \tag{2.r}$$

(2.r) entraîne aisément $\beta(0, \mathscr{C}_1) = \infty$, en écrivant:

$$\beta(0, \mathscr{C}_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta(0, A^n) = \sum_{n=1}^{\infty} E[\beta(0, A^n)] + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta(0, A^n) - E[\beta(0, A^n)]) .$$

On pose $\gamma(\mathscr{C}_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta(0, A^n) - E[\beta(0, A^n)])$. On peut montrer [28] que:

$$\lim_{y \to 0} (\beta(y, \mathscr{C}_1) - E[\beta(y, \mathscr{C}_1)]) = \gamma(\mathscr{C}_1) \text{ avec convergence dans } L^2 . \tag{2.s}$$

On en déduit aisément que, pour toute suite (g_k) de fonctions boréliennes bornées sur le plan telle que la suite des mesures $g_k(y)dy$ converge étroitement vers $\delta_{(0)}$,

$$\lim_{k \to \infty} \left(\int_{\mathscr{C}_1} g_k(B_s - B_t) ds\, dt - E\left[\int_{\mathscr{C}_1} g_k(B_s - B_t) ds\, dt \right] \right) = \gamma(\mathscr{C}_1) , \tag{2.t}$$

avec convergence dans L^2. Un cas particulier de ce résultat a été établi par Varadhan [40] (à ceci près que Varadhan considérait le pont brownien dans $\mathbb{R}^2$, à la place du mouvement brownien plan).

Nous renvoyons à [28] pour de plus amples détails sur les résultats rappelés ci-dessus. Dans la suite nous appellerons $\gamma(\mathscr{C}_1)$ le temps local d'intersection renormalisé (en 0, sur le triangle $\mathscr{C}_1$) du mouvement brownien B. Au vu de (2.t) on peut écrire formellement:

$$\gamma(\mathscr{C}_1) = \iint_{\mathscr{C}_1} \delta_{(0)}(W_s - W_t) ds\, dt - E\left[\iint_{\mathscr{C}_1} \delta_{(0)}(W_s - W_t) ds\, dt \right] . \tag{2.u}$$

3. Estimations asymptotiques pour le temps d'atteinte de 0 par une marche aléatoire

Dans toute cette partie $X=(X_n, n \geqq 0; P_x, x \in \mathbb{Z}^d)$ désigne une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ ($d \geqq 1$): cela signifie que, sous chaque probabilité P_x, X_n s'écrit $X_n = x + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ où les variables Y_i sont indépendantes et de même loi portée par $\mathbb{Z}^d$. On supposera toujours que X satisfait les trois hypothèses suivantes:

(H1) X possède des moments d'ordre deux, i.e. $E_0[|X_1|^2] < \infty$ et X est centrée, i.e. $E_0[X_1]=0$.

(H2) X est adaptée (apériodique au sens de Spitzer [39]): cela signifie que le sous-groupe engendré par $\{x \in \mathbb{Z}^d; P_0[X_1 = x] > 0\}$ est $\mathbb{Z}^d$.

(H3) X est isotrope, au sens où il existe une constante $\sigma > 0$ telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$,

$$E_0[(\theta \cdot X_1)^2] = \sigma^2 |\sigma|^2 .$$

L'hypothèse essentielle est évidemment (H1) qui assure que X est une «bonne approximation» discrète du mouvement brownien. L'hypothèse (H2) montre que X ne vit pas sur un sous groupe strict de $\mathbb{Z}^d$. L'hypothèse (H3) n'est pas vraiment indispensable: tous les résultats que nous obtiendrons dans cette partie et les suivantes peuvent être étendus aux marches vérifiant seulement (H1) et (H2). L'hypothèse (H3) simplifie certaines démonstrations et surtout facilite la description des lois limites. Occasionnellement nous indiquerons les modifications à apporter aux énoncés dans le cas où X ne satisfait plus l'hypothèse (H3).

Soit ϕ la fonction caractéristique de X. Pour tout $\theta \in [-\pi; \pi]^d$,

$$\phi(\theta) = E_0[\exp(i\theta \cdot X_1)] .$$

L'hypothèse (H2) équivaut à dire que sur $[-\pi; \pi]^d$, $1-\phi(\theta)$ s'annule seulement pour $\theta = 0$. L'hypothèse (H1) permet d'obtenir un développement limité de $1-\phi$ au voisinage de 0. On trouve [39]:

$$1-\phi(\theta) = \frac{\sigma^2}{2} |\theta|^2 + o(|\theta|^2) . \tag{3.a}$$

On a de même un développement pour les dérivées partielles de ϕ, pour tout $1 \leqq i \leqq d$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}(\theta) = \sigma^2 \theta_i + o(|\theta|) . \tag{3.b}$$

Soit $T_0 = \inf\{n \geqq 0; X_n = 0\}$. Notre but dans cette partie est de décrire la loi asymptotique de T_0 sous P_y, quand $|y|$ tend vers l'infini. D'après Spitzer [39] on a $P_y[T_0 < \infty] = 1$ pour tout y si et seulement si $d=1$ ou 2. En toute dimension on définit μ_y comme la loi de $T_0/|y|^2$ conditionnellement à $\{T_0 < \infty\}$ (le conditionnement est superflu pour $d=1$ ou 2). La normalisation de T_0 en $T_0/|y|^2$ est ici imposée par les propriétés d'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle. Notre premier objectif est d'établir un théorème limite pour la famille (μ_y) quand $|y|$ tend vers l'infini. Dans le cas $d=1$, comme le suggère le théorème d'invariance de Donsker, on trouve que la famille (μ_y) converge vers la loi du temps d'atteinte de 0 par un mouvement brownien linéaire issu de $1/\sigma$. En dimension $d \geqq 3$ on montre de même (théorème 3.4) que la famille (μ_y) converge vers la loi du temps d'atteinte de 0 par un mouvement brownien d-dimensionnel «contitionné à aller en 0». Le conditionnement est ici à interpréter au sens de Doob [6]; il suffit manifestement de considérer la partie radiale du mouvement brownien qui est un processus de Bessel d'indice $v=d/2-1$. Or le processus de Bessel d'indice $v>0$ conditionné à aller en 0 n'est autre que le processus de Bessel d'indice $-v$ (voir par exemple Pitman et Yor [32]) ce qui explique que la loi limite obtenue soit encore très simple. Le cas $d=2$ est le plus intéressant. On remarque déjà que les marches aléatoires en dimension deux, du moins celles que nous considérons, visitent presque sûrement tous les points de l'espace, ce qui n'est pas le cas du mouvement brownien.

En ce sens on peut dire que la dimension deux est critique pour le problème de la visite des points (nous rencontrerons plus loin d'autres situations critiques). On s'attend, toujours dans le cas $d=2$, à ce que la famille (μ_y) converge vers la loi du temps d'atteinte de 0 par un processus de Bessel d'indice 0 conditionné à aller en 0. Or la définition de ce dernier processus pose certaines difficultés qui sont résolues par Pitman et Yor [31] en se plaçant sur un espace de mesure infinie, au lieu d'un espace de probabilité. Ceci explique qu'en dimension deux le théorème limite pour la famille (μ_y) fasse intervenir une mesure de masse totale infinie (cf. théorème 3.4).

Le lemme suivant joue un rôle essentiel dans la preuve des résultats de cette partie.

Lemme 3.1. *Soit k un entier positif plus petit que d. Supposons que X possède des moments d'ordre k. Pour $y\in\mathbb{Z}^d-\{0\}$ et $t>0$, soit*

$$\psi(y,t)=\int_{[-\pi|y|;\pi|y|]^d}\exp\left(i\frac{y}{|y|}\cdot\omega-t\left(1-\phi\left(\frac{\omega}{|y|}\right)\right)|y|^2\right)d\omega. \tag{3.c}$$

Il existe une constante C telle que, pour tous y,t,

$$|\psi(y,t)|\leqq Ct^{(k-d)/2}. \tag{3.d}$$

Preuve. Soit $g(y,t,\omega)=\exp(-t(1-\phi(\omega/|y|))|y|^2)$ de sorte que:

$$\psi(y,t)=\int_{[-\pi|y|;\pi|y|]^d}\exp\left(i\frac{y}{|y|}\cdot\omega\right)g(y,t,\omega)d\omega. \tag{3.e}$$

L'hypothèse du lemme assure que ϕ est k fois continûment différentiable. A l'aide de k intégrations par parties successives et en notant que les termes frontières disparaissent à cause de la périodicité de ϕ on déduit de (3.e) que, pour tout k-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\{1,\dots,d\}^k$,

$$\left(\prod_{j=1}^{k}(iy_{\alpha_j}/|y|)\right)\psi(y,t)=(-1)^k\int_{[-\pi|y|;\pi|y|]^d}D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)(g)(y,t,\omega)\exp\left(i\frac{y}{|y|}\cdot\omega\right)d\omega \tag{3.f}$$

où, pour simplifier l'écriture, on note:

$$D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)(g)=\frac{\partial^k g}{\partial\omega_{\alpha_1}\dots\partial\omega_{\alpha_k}}.$$

On vérifie par récurrence que $D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)(g)$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$H(y,t,\omega)=t^m|y|^{2m-k}\prod_{j=1}^{m}D(\beta_1^j,\dots,\beta_{k_j}^j)(\phi)\left(\frac{\omega}{|y|}\right)g(y,t,\omega), \tag{3.g}$$

où m est un entier inférieur ou égal à k, les k_j $(1 \leqq j \leqq m)$ sont des entiers strictement positifs tels que $k_1 + \ldots + k_m = k$, enfin les β_l^j $(1 \leqq j \leqq m,\ 1 \leqq l \leqq k_j)$ sont des éléments de $\{1, \ldots, d\}$.

Pour établir le résultat du lemme il suffit, compte-tenu de (3.f) de montrer l'existence d'une constante $\bar{C}$, ne dépendant pas de y ni de t, telle que pour tout terme $H(y, t, \omega)$ de la forme ci-dessus,

$$\int_{[-\pi|y|;\pi|y|]^d} |H(y,t,\omega)| d\omega \leqq \bar{C} t^{(k-d)/2}. \tag{3.h}$$

On commence par isoler les indices j tels que $k_j = 1$. Quitte à réordonner la suite (k_j) on peut supposer qu'il existe un entier n avec $0 \leqq n \leqq m$, et $k_j = 1$ si et seulement si $j \leqq n$. On peut alors reformuler (3.g) de la manière suivante,

$$H(y,t,\omega) = t^m |y|^{2m-k-n} \prod_{j=1}^{n} \left(|y| D(\beta_1^j)(\phi)\left(\frac{\omega}{|y|}\right)\right) \cdot \prod_{j=n+1}^{m} \left(D(\beta_1^j, \ldots, \beta_{k_j}^j)(\phi)\left(\frac{\omega}{|y|}\right)\right) g(y,t,\omega). \tag{3.i}$$

Grâce à (3.b) on peut majorer $\frac{|y|}{|\omega|} D(\beta)(\phi)\left(\frac{\omega}{|y|}\right)$ uniformément en y et ω. On déduit alors de (3.i) qu'il existe une constante K, indépendante de y, t et ω, telle que:

$$|H(y,t,\omega)| \leqq K t^m |y|^{2m-k-n} |\omega|^n |g(y,t,\omega)|. \tag{3.j}$$

La propriété (3.a) permet de choisir $r > 0$ assez petit de façon que $|\theta| \leqq r$ entraîne $\mathrm{Re}(\phi(\theta)) \leqq 1 - (\sigma^2 |\theta|^2/4)$. On pose ensuite

$$\varepsilon = 1 - \sup\{\mathrm{Re}(\phi(\theta));\ \theta \in [-\pi;\pi]^d, |\theta| > r\}.$$

L'hypothèse (H2) entraîne que $\varepsilon > 0$. On peut alors majorer:

$$\int_{[-\pi|y|;\pi|y|]^d} |\omega|^n |g(y,t,\omega)| d\omega \leqq \int_{\{|\omega| \leqq r|y|\}} |\omega|^n \exp(-\sigma^2 t |\omega|^2/4) d\omega + (2\pi|y|)^{d+n} \exp(-\varepsilon t |y|^2) \tag{3.k}$$

Remarquons que, à cause du choix de n, on a: $-d \leqq 2m - k - n \leqq 0$. Des calculs élémentaires montrent l'existence de constantes C_1 et C_2 indépendantes de t et y telles que:

$$|y|^{2m-k-n} \int_{\{|\omega| \leqq r|y|\}} |\omega|^n \exp(-\sigma^2 t |\omega|^2/4) d\omega \leqq C_1 t^{(k-2m-d)/2}, \tag{3.l}$$

et:

$$|y|^{2m+d-k} \exp(-\varepsilon t |y|^2) \leqq C_2 t^{(k-2m-d)/2}. \tag{3.m}$$

En revenant à (3.j) et en utilisant successivement (3.k) et les majorations (3.l) et (3.m) on trouve, pour une certaine constante K',

$$\int_{[-\pi|y|;\pi|y|]^d} |H(y,t,\omega)| d\omega \leqq K' t^m t^{(k-2m-d)/2} = K' t^{(k-d)/2},$$

d'où (3.h) et le résultat du lemme. $\square$

Nous cherchons à étudier le comportement asymptotique de la famille (μ_y) quand $|y|$ tend vers l'infini. Un argument simple utilisant la propriété de Markov au temps T_0 montre que, pour tous $y \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geqq 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_y(dt) = E_y[\exp(-\lambda T_0/|y|^2)]/P_y[T_0<\infty]$$
$$= (F(y, e^{-\lambda/|y|^2})/F(0, e^{-\lambda/|y|^2}))/P_y[T_0<\infty], \qquad (3.\mathrm{n})$$

à condition de définir, pour $0 \leqq r \leqq 1$:

$$F(y,r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_y[X_n=0] = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi;\pi]^d} (1-r\phi(\theta))^{-1} e^{iy\cdot\theta} d\theta.$$

La proposition suivante précise le comportement asymptotique de $F(y, \exp(-\lambda/|y|^2))$.

Proposition 3.2. *Supposons (si $d \geqq 3$) que X possède des moments d'ordre $d-1$. Alors, pour tout $\lambda > 0$, et pour $\lambda = 0$ si $d \geqq 3$,*

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{d-2} F(y, e^{-\lambda|y|^2}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(2\pi\sigma^2 t)^{-d/2} \exp(-1/2\sigma^2 t)dt.$$

Preuve. On écrit:

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^d F(y, e^{-\lambda/|y|^2}) \\
&= \int_{[-\pi;\pi]^d} (1-e^{-\lambda/|y|^2}\phi(\theta))^{-1} \exp(iy\cdot\theta)d\theta \\
&= \int_{[-\pi;\pi]^d} \left(\int_0^\infty \exp(-(1-e^{-\lambda/|y|^2}\phi(\theta))u)du\right)\exp(iy\cdot\theta)d\theta \\
&= \int_0^\infty \exp(-(1-e^{-\lambda/|y|^2})u)du \int_{[-\pi;\pi]^d} \exp(iy\cdot\theta - e^{-\lambda/|y|^2}u(1-\phi(\theta)))d\theta,
\end{aligned}$$

d'où, à l'aide des changements de variables $u = |y|^2 t$ et $\theta = \omega/|y|$,

$$(2\pi)^d F(y, e^{-\lambda/|y|^2}) = |y|^{2-d} \int_0^\infty \exp(-(1-e^{-\lambda/|y|^2})\,|y|^2 t)\, dt\, \psi(y, e^{-\lambda/|y|^2} t) \qquad (3.\mathrm{o})$$

où ψ est définie par (3.c). D'autre part, (3.a) entraîne, pour tous $t \geqq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{|y|\to\infty} e^{-\lambda/|y|^2} t\left(1-\phi\left(\frac{\omega}{|y|^2}\right)\right)|y|^2 = \sigma^2|\omega^2|t/2. \qquad (3.\mathrm{p})$$

Un passage à la limite sous le signe somme, dont la justification est ici facile, permet de déduire de (3.p) que

$$\lim_{|y|\to\infty}\left(\psi(y, e^{-\lambda/|y|^2}t) - \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i\frac{y}{|y|}\cdot\omega - (\sigma^2|\omega|^2 t/2)\right)d\omega\right) = 0,$$

d'où:

$$\lim_{|y|\to\infty} \psi(y, e^{-\lambda/|y|^2}t) = (2\pi/\sigma^2 t)^{d/2} \exp(-1/2\sigma^2 t).$$

Revenons à (3.o) et remarquons que

$$\lim_{|y|\to\infty} \exp(-(1-e^{-\lambda/|y|^2})\,|y|^2 t) = e^{-\lambda t}.$$

On voit que pour obtenir le résultat de la proposition il suffit de justifier le passage à la limite sous le signe somme dans (3.o). On utilise le lemme 3.1 et on considère d'abord le cas $d \leqq 2$: en prenant $k=d$ dans l'énoncé du lemme on trouve, pour une certaine constante C,

$$|\psi(y, e^{-\lambda/|y|^2})| \leqq C$$

ce qui, lorsque $\lambda > 0$, suffit à justifier le passage à la limite. Pour $d \geqq 3$ on applique le lemme 3.1 en prenant successivement $k=0$ et $k=d-1$, et on obtient, pour une certaine constante C',

$$|\psi(y, e^{-\lambda/|y|^2} t)| \leqq C'(t^{-1/2} \wedge t^{-d/2}),$$

ce qui, pour tout $\lambda \geqq 0$, justifie l'application du théorème de convergence dominée. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer facilement les principaux résultats de cette partie.

Théorème 3.3. *Si* $d=1$,

$$\lim_{|y|\to\infty} \mu_y = \mu$$

où la convergence a lieu au sens de la topologie étroite et μ *est la loi du temps d'atteinte de* 0 *pour un mouvement brownien linéaire issu de* $1/\sigma$*:*

$$\mu(dt) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} t^{-3/2} \exp(-1/2\sigma^2 t)\,dt. \tag{3.q}$$

Preuve. Il suffit de montrer, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{|y|\to\infty} \int \mu_y(dt) e^{-\lambda t} = \int \mu(dt) e^{-\lambda t}.$$

Or, (3.n) entraîne:

$$\int \mu_y(dt) e^{-\lambda t} = F(y, e^{-\lambda/|y|^2}) / F(0, e^{-\lambda/|y|^2}).$$

Un calcul facile utilisant (3.a) montre que:

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{-1} F(0, e^{-\lambda/|y|^2}) = (2\lambda\sigma^2)^{-1/2},$$

d'où à l'aide de la proposition 3.2,

$$\begin{aligned}\lim_{|y|\to\infty} \int \mu_y(dt) e^{-\lambda t} &= (2\lambda\sigma^2)^{1/2} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (2\pi\sigma^2 t)^{-1/2} \exp(-1/2\sigma^2 t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} t^{-3/2} \exp(-1/2\sigma^2 t)\,dt. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque. Dans le cas particulier où X est une marche aléatoire simple, T_0 est aussi le premier instant où X change de signe (en admettant que 0 est à la fois positif et négatif). Le théorème d'invariance de Donsker conduit alors immédiatement au résultat du théorème. Dans le cas général cet argument ne subsiste pas; cependant le résultat du théorème montre que la marche X doit s'annuler «peu de temps» après qu'elle ait changé de signe.

Théorème 3.4. *Si* $d=2$

$$\lim_{|y|\to\infty}(\log|y|)\mu_y=\mu,$$

où la convergence a lieu au sens de la topologie vague et μ *est la mesure sur* $\mathbb{R}_+$ *définie par:*

$$\mu(dt)=(1/2t)\exp(-1/2\sigma^2 t)dt. \tag{3.r}$$

Remarque. μ s'interprète encore comme la «loi» du temps d'atteinte de 0 par un processus de Bessel de dimension 2 issu de $1/\sigma$ et conditionné à aller en 0. La difficulté vient ici de la construction du processus conditionné (cf. Pitman, Yor [31]).

Preuve. A nouveau (3.n) entraîne, pour tout $\lambda>0$

$$(\log|y|)\int\mu_y(dt)e^{-\lambda t}=F(y,e^{-\lambda/|y|^2})/((\log|y|)^{-1}F(0,e^{-\lambda/|y|^2})).$$

Un calcul facile montre

$$\lim_{|y|\to\infty}(\log|y|)^{-1}F(0,e^{-\lambda/|y|^2})=(\pi\sigma^2)^{-1}$$

d'où, à l'aide de la proposition 3.2,

$$\lim_{|y|\to\infty}(\log|y|)\int\mu_y(dt)e^{-\lambda t}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(2t)^{-1}\exp(-1/2\sigma^2 t)dt=\int\mu(dt)e^{-\lambda t}. \quad \square$$

Avant de passer au cas $d\geqq 3$ signalons un résultat voisin du théorème 3.4, qui nous sera utile dans la partie 6. On s'intéresse maintenant à la loi du premier retour en 0 après l'instant n. De façon précise on pose, pour tout $n\geqq 1$,

$$T_0^{(n)}=\inf\{k\geqq n; X_k=0\}.$$

Soit $\mu^{(n)}$ la loi de $T_0^{(n)}/n$ sous P_0. Alors, sous les hypothèses du théorème 3.

$$\lim_{n\to\infty}(\log n)\mu^{(n)}=\mu, \tag{3.s}$$

où $\mu(dt)=1_{[1;\infty[}(t)t^{-1}dt$ et la convergence a lieu au sens de la topologie vague.

La preuve de ce résultat, beaucoup plus facile que celle du théorème 3.3, est laissée au lecteur. Une façon simple de procéder consiste à traiter d'abord le cas où X est apériodique (fortement apériodique au sens de Spitzer [39]) et à utiliser alors l'estimation bien connue:

$$P_0[X_n=0]\underset{n\to\infty}{\sim}(2\pi\sigma^2 n)^{-1}.$$

Théorème 3.5. *Supposons* $d\geqq 3$, *et que* X *possède des moments d'ordre* $d-1$. *Soit* q *la probabilité que* X *ne revienne jamais à son point de départ. Alors:*

$$P_y[T_0<\infty]\underset{|y|\to\infty}{\sim}q(\sigma^2 k_d)^{-1}|y|^{2-d} \tag{3.t}$$

où

$$k_d=(d-2)(\Gamma(d/2))^{-1}\pi^{d/2}.$$

De plus

$$\lim_{|y|\to\infty}\mu_y=\mu$$

où la convergence a lieu au sens de la topologie étroite et μ est la loi du temps d'atteinte de 0 par un processus de Bessel d'indice $\nu = 1 - d/2$, issu de $1/\sigma$:

$$\mu(dt) = k_d \sigma^{2-d} (2\pi t)^{-d/2} \exp(-1/2\sigma^2 t) dt. \tag{3.u}$$

Remarque. Le résultat asymptotique (3.t) est bien connu: voir par exemple Spitzer [39] dans le cas $d=3$. L'expression de la densité de μ est donnée par Getoor et Sharpe [17]; le théorème de retournement de Williams [41] montre que μ est aussi la loi du dernier temps de passage en $1/\sigma$ pour un processus de Bessel de dimension d issu de 0.

Preuve. Remarquons d'abord que

$$q = \left(E_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{(X_n=0)} \right] \right)^{-1} = (F(0,1))^{-1}.$$

On a aussi

$$P_y[T_0 < \infty] = F(y,1)/F(0,1) = qF(y,1).$$

La proposition 3.2, appliquée en prenant $\lambda = 0$, montre que:

$$\lim_{|y| \to \infty} |y|^{d-2} F(y,1) = \int_0^\infty (2\pi\sigma^2 t)^{-d/2} \exp(-1/2\sigma^2 t) dt = (\sigma^2 k_d)^{-1},$$

d'où la première assertion du théorème.

Ensuite on écrit, pour tout $\lambda \geqq 0$,

$$\int \mu_y(dt) e^{-\lambda t} = (F(y, e^{-\lambda/|y|^2})/F(0, e^{-\lambda/|y|^2}))/P_y[T_0 < \infty],$$

et on remarque que

$$\lim_{|y| \to \infty} F(0, e^{-\lambda/|y|^2}) = F(0,1) = q^{-1},$$

d'où, en utilisant (3.t) et à nouveau la proposition 3.2, la deuxième assertion du théorème. □

Les théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5 visaient à obtenir un équivalent asymptotique de $P_y[T_0 \leqq n]$ quand $|y|$ et n tendent vers l'infini de façon convenable. Le but du prochain théorème est d'établir des majorations uniformes, en y et n, pour les mêmes quantités.

Théorème 3.6. *Pour $r > 0$ soient*

$$f_1(r) = 1 \wedge r^{-2},$$

$$f_2(r) = (\log 1/r)_+ + r^{-2} 1_{(r \geqq 1/2)}$$

et, si $d \geqq 3$, $f_d(r) = r^{2-d} \wedge r^{1-d}$.

Supposons (dans le cas $d \geqq 3$) que X possède des moments d'ordre $d-1$. Il existe une constante C_d telle que, pour tous $y \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$ et $n \geqq 1$,

(i) *si $d=1$: $P_y[T_0 \leqq n] \leqq C_1 f_1(n^{-1/2}|y|)$,*

(ii) *si $d=2$: $(\log n) P_y[T_0 \leqq n] \leqq C_2 f_2(n^{-1/2}|y|)$,*

(iii) *si $d \geqq 3$: $n^{d/2-1} P_y[T_0 \leqq n] \leqq C_d f_d(n^{-1/2}|y|)$.*

Preuve. Le cas $d=1$ est facile: on applique le théorème d'arrêt à la sous-martingale $(X_n-y)^2$.

Passons au cas $d=2$. Supposons d'abord $n^{-1/2}|y|\leqq 1/2$. Alors, si $|y|\leqq n^{1/4}$,

$$(\log n)P_y[T_0\leqq n]\leqq \log n\leqq 4f_2(n^{-1/2}|y|).$$

Ensuite, si $n^{1/4}\leqq|y|\leqq n^{1/2}$,

$$\begin{aligned}(\log n)P_y[T_0\leqq n]&\leqq 4(\log|y|)P_y[T_0\leqq n]\\&\leqq 4(\log|y|)\mu_y([0;|y|^{-2}n]).\end{aligned}$$

Il suffit donc d'établir, pour tout y et pour $A\geqq 2$,

$$(\log|y|)\mu_y([0;A])\leqq C\log(A), \tag{3.v}$$

pour une certaine constante C.

Avec les notations précédentes, on a:

$$\begin{aligned}\mu_y([0;A])&\leqq e\int \mu_y(dt)\exp(-t/A)\\&\leqq eF(y,e^{-1/|y|^2A})/F(0,e^{-1|y|^2A}).\end{aligned}$$

Il existe une constante $\delta>0$ telle que:

$$F(0,e^{-1/|y|^2A})\geqq F(0,e^{-1/|y|^2})\geqq \delta\log|y|.$$

Pour montrer (3.v) il suffit donc d'établir, pour une certaine constante C', et pour tous y et A:

$$F(y,e^{-1/|y|^2A})\leqq C'\log A. \tag{3.w}$$

Or:

$$F(y,e^{-1/|y|^2A})=(2\pi)^{-2}\int_0^\infty \exp(-(1-e^{-1/|y|^2A})|y|^2t)\psi(y,e^{-1/|y|^2A}t)dt$$

d'où, en utilisant le lemme 3.1 et la minoration simple $1-\exp(-u)\geqq u/2$ pour $0\leqq u\leqq 1$,

$$F(y,e^{-1/|y|^2A})\leqq \bar{C}\int_0^\infty \exp(-t/2A)dt(1\wedge t^{-1})\leqq C'\log A.$$

d'où (3.w). Supposons maintenant $n^{-1/2}|y|>1/2$. On commence par écrire:

$$\begin{aligned}(\log n)P_y[T_0\leqq n]&=(\log n)\mu_y([0;n/|y|^2])\\&\leqq e(\log n)\int \mu_y(dt)\exp(-t|y|^2/n)\\&=e(\log n)F(y,e^{-1/n})/F(0,e^{-1/n}).\end{aligned}$$

Or, d'une part $F(0,e^{-1/n})\geqq\delta\log n$, d'autre part, toujours à l'aide du lemme 3.1

$$F(y,e^{-1/n})\leqq \tilde{C}\int_0^\infty \exp(-|y|^2t/2n)dt(1\wedge t^{-1})\leqq \tilde{C}'(n/|y|^2)$$

d'où aussi le résultat voulu si $n^{-1/2}|y|>1/2$.

Il resterait à traiter le cas $d\geqq 3$. Les preuves sont semblables à celles du cas $d=2$ et seront laissées au lecteur. Le rôle clé est toujours tenu par les estimations du lemme 3.1. □

Remarques. (i) Les résultats «browniens» correspondant aux théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5 sont développés dans [27]. Par exemple dans le cas $d=2$, soit B un mouvement brownien plan issu de $1/\sigma$ et pour $\varepsilon>0$, μ_ε la loi du temps d'atteinte par B du disque de centre 0 de rayon ε. Alors $\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)\mu_\varepsilon=\mu$ où la mesure μ est précisément cette qui apparaît dans le théorème 3.4. La première preuve de ce résultat est due à Spitzer [37].

(ii) L'hypothèse «X possède des moments d'ordre $d-1$» dans l'énoncé du théorème 3.5 est sans doute un peu trop forte. Pour obtenir l'équivalent (3.t) il semble cependant nécessaire de supposer l'existence de moments d'ordre $d-2$, ou alors de faire d'autres hypothèses sur la loi de X_1. Remarquons d'autre part qu'un affaiblissement des conditions de moments dans le cas $d\geqq 3$ conduirait à de moins bonnes majorations dans le théorème 3.6. Nous verrons dans la partie 5 que ces majorations jouent un rôle essentiel pour nos applications.

(iii) Décrivons brièvement les modifications à apporter à nos résultats si l'on omet l'hypothèse (H3). On introduit la forme quadratique Q définie pour $\theta\in\mathbb{R}^d$ par

$$Q(\theta)=E_0[(\theta\cdot X_1)^2].$$

Soit A l'unique opérateur symétrique positif tel que, pour tout θ, $Q(\theta)=A\theta\cdot A\theta$. Pour $y\in\mathbb{Z}^d$, soit $\tilde{\mu}_y$ la loi sous P_y de $T_0/|A^{-1}y|^2$, conditionnellement à $\{T_0<\infty\}$. L'énoncé du théorème 3.4 reste alors vrai à condition de remplacer μ_y par $\tilde{\mu}_y$ et de prendre $\sigma=1$. Il en va de même pour le théorème 3.5, à ceci près qu'il faut remplacer (3.t) par:

$$P_y[T_0<\infty]\underset{|y|\to\infty}{\sim} q(\det(A)k_d)^{-1}|A^{-1}y|^{2-d}.$$

Enfin le théorème 3.6 reste vrai sans modification.

(iv) On aurait pu établir les principaux résultats de cette partie en utilisant le théorème limite local et en s'inspirant de la méthode qu'emploie Spitzer [39] pour montrer (3.t) dans le cas $d=3$. Notons cependant qu'il nous aurait alors fallu, au moins pour traiter le cas $d\geqq 4$, établir une forme du théorème limite local plus précise que celles que montre Spitzer ([39], p. 77–79), ce qui nous aurait demandé autant de travail que la preuve du lemme 3.1. Pour cette raison en particulier il nous a semblé préférable de procéder directement.

(v) Certains des résultats de cette partie sont à rapprocher des calculs effectués par Montroll et Weiss [30], sous des hypothèses un peu différentes des nôtres.

4. Le cas de la dimension un

L'objet de ce court paragraphe est de donner une première application des estimations de la partie 3 aux intersections de trajectoires de marches aléatoires indépendantes en dimension un. La preuve du résultat principal (théorème 4.1) est facile. Il nous a cependant paru utile de détailler les arguments car ils préfigurent ceux que nous utiliserons dans la partie 5 pour l'étude en dimension supérieure. D'autre part l'étude en dimension un présente certains caractères particuliers qu'on ne retrouve pas en dimension plus grande.

Soit X une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2) de la partie 3. Pour $n \geqq 1$ soit R_n le nombre de points distincts de $\mathbb{Z}$ visités par X avant l'instant n. Jain et Pruitt [20] (théorèm 6.1) ont montré que:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} R_n = \sup\{B_s; s \leqq \sigma^2\} - \inf\{B_s; s \leqq \sigma^2\}, \tag{4.a}$$

où la convergence a lieu en distribution, B désigne un mouvement brownien linéaire et $\sigma^2 = E[X_1^2]$. Nous nous proposons ici d'étendre (4.a) à la situation où R_n est remplacé par le nombre de points de $\mathbb{Z}$ visités à la fois par k marches aléatoires indépendantes, avant l'instant n.

Théorème 4.1. *Soient $k \geqq 1$ et $X^1, \dots, X^k$ k marches aléatoires indépendantes sur $\mathbb{Z}$ satisfaisant les hypothèses* (H1) *et* (H2). *On pose $\sigma_i^2 = E[(X_1^i)^2]$.*

Soit I_n le nombre de points communs aux trajectoires de $X^1, \dots, X^k$ avant l'instant n.

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} I_n = \inf_{i \leqq k}(\sup\{B_s^i; s \leqq \sigma_i^2\}) - \sup_{i \leqq k}(\inf\{B_s^i; s \leqq \sigma_i^2\})$$

où la convergence a lieu en distribution et $B^1, \dots, B^k$ sont k mouvements browniens linéaires indépendants issus du même point.

Preuve. Pour $1 \leqq i \leqq k$ et tout $n \geqq 1$ soient

$$\bar{X}_n^i = \sup\{X_p^i; p \leqq n\},$$

$$\underline{X}_n^i = \inf\{X_p^i; p \leqq n\}.$$

On a manifestement:

$$I_n \leqq \left(\inf_{i \leqq k} \bar{X}_n^i - \sup_{i \leqq k} \underline{X}_n^i + 1\right)_+ . \tag{4.b}$$

Le théorème d'invariance de Donsker (voir par exemple [1]) montre que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} &\left(\inf_{i \leqq k} \bar{X}_n^i - \sup_{i \leqq k} \underline{X}_n^i\right) \\ &= \inf_{i \leqq k}(\sup\{B_s^i; s \leqq \sigma_i^2\}) - \sup(\inf\{B_s^i; s \leqq \sigma_i^2\})\end{aligned} \tag{4.c}$$

avec convergence en distribution, les B^i étant comme dans l'énoncé du théorème.

Compte-tenu de (4.b) et (4.c) il suffit pour obtenir le résultat du théorème d'établir que

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}\left(I_n - \left(\inf_{i \leqq k} \bar{X}_n^i - \sup_{i \leqq k} \underline{X}_n^i\right)\right) = 0,$$

avec convergence en probabilité. Pour cela il suffit encore de montrer que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} E[I_n] &= \lim_{n\to\infty} n^{-1/2} E\left[\left(\inf_{i \leqq k} \bar{X}_n^i - \sup_{i \leqq k} \underline{X}_k^i\right)\right] \\ &= E\left[\inf_{i \leqq k} \sup\{B_s^i, s \leqq \sigma_i^2\} - \sup_{i \leqq k} \inf\{B_s^i, s \leqq \sigma_i^2\}\right].\end{aligned} \tag{4.d}$$

Nous allons montrer (4.d). On peut sans perte de généralité supposer que $X^i = x^i$, p.s., pour $1 \leqq i \leqq k$. Alors, avec des notations évidentes,

$$\begin{aligned} E[I_n] &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{i=1}^{k} P^i_{x^i}[T_y \leqq n] \right) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{i=1}^{k} P^i_{x^i - y}[T_0 \leqq n] \right). \end{aligned}$$

Notons $n^{-1/2}\mathbb{Z} = \{n^{-1/2}y;\, y \in \mathbb{Z}\}$. Alors:

$$\begin{aligned} n^{-1/2}E[I_n] &= n^{-1/2} \sum_{u \in n^{-1/2}\mathbb{Z}} \left(\prod_{i=1}^{k} P^i_{x_i - n^{1/2}u}[T_0 \leqq n] \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} du\, \phi_n(u), \end{aligned} \tag{4.e}$$

à condition de poser:

$$\phi_n(u) = \prod_{i=1}^{k} P^i_{[x^i - n^{1/2}u]}[T_0 \leqq n]$$

où $[v]$ désigne la partie entière de v. Maintenant le théorème 3.3 entraîne, pour tout $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} P^i_{[x^i - n^{-1/2}u]}[T_0 \leqq n] &= \int_0^{u^{-2}} (2\pi\sigma_i^2)^{-1/2} s^{-3/2} \exp(-1/2\sigma_i^2 s)\, ds \\ &= \int_0^{\sigma_i^2} (2\pi)^{-1/2} s^{-3/2} |u| \exp(-u^2/2s)\, ds. \end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour tout $u \neq 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(u) = \prod_{i=1}^{k} \left(\int_0^{\sigma_i^2} (2\pi)^{-1/2} s^{-3/2} |u| \exp(-u^2/2s)\, ds \right) \tag{4.f}$$

L'application du théorème de convergence dominée étant aisément justifiée à l'aide du théorème 3.6 on déduit de (4.e) et (4.f) que:

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1/2} E[I_n] = \int_{\mathbb{R}} du \prod_{i=1}^{k} \left(\int_0^{\sigma_i^2} (2\pi)^{-1/2} s^{-3/2} |u| \exp(-u^2/2s)\, ds \right). \tag{4.g}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} & E\left[\inf_{i \leqq k} (\sup\{B^i_s;\, s \leqq \sigma_i^2\}) - \sup_{i \leqq k} (\inf\{B^i_s;\, s \leqq \sigma_i^2\})\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} du \prod_{i=1}^{k} P[\inf\{B^i_s;\, s \leqq \sigma_i^2) \leqq u \leqq \sup\{B^i_s;\, s \leqq \sigma_i^2\}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} du \prod_{i=1}^{k} \left(\int_0^{\sigma_i^2} (2\pi)^{-1/2} s^{-3/2} |u| \exp(-u^2/2s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Finalement on voit que (4.d) est une conséquence de (4.g), d'où le résultat du théorème. $\square$

Remarque. Le schéma de la preuve du théorème 4.1 est celui qu'avaient déjà utilisé Jain et Pruitt [20] pour traiter le cas $k=1$. Le point intéressant est que les estimations de la partie 3 permettent aisément d'obtenir un équivalent de $E[I(n)]$ quand n tend vers l'infini. Cela restera vrai pour des marches aléatoires en dimension supérieure. Cependant, et c'est en cela que le cas de la dimension un est très particulier, l'estimation du moment d'ordre un sera loin d'être suffisante pour établir les théorèmes limites recherchés. En fait nous serons amenés à déterminer un équivalent asymptotique de tous les moments de I_n. L'outil essentiel sera encore les estimations de la partie 3.

5. Convergence en distribution vers le temps local d'intersection

Soit (d,k) un couple d'entiers satisfaisant la condition (2.a) (soit $d=2$, $k\geqq 2$ quelconque, soit $d=3$, $k=2$). Nous avons vu qu'on peut alors définir une notion de "temps local d'intersection" pour k mouvements browniens indépendants en dimension d. Considérons maintenant k marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, indépendantes et satisfaisant les conditions (H1), (H2), (H3) de la partie 3, et soit I_n le nombre de points communs à leurs trajectoires. Notre but dans cette partie est de montrer que la suite (I_n), convenablement normalisée, converge en distribution vers un temps local d'intersection pour k mouvements browniens en dimension d. Notre approche repose sur la méthode des moments. Pour cette raison nous ne parviendrons pas à conclure dans le cas $d=2$, $k\geqq 4$, car il n'est pas clair (cf. lemme 2.2 et proposition 2.3) que la loi du temps local d'intersection soit alors déterminée par ses moments.

Théorème 5.1. *Soient $X^1, X^2, \ldots, X^k$ k marches aléatoires ($k\geqq 2$) indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, satisfaisant les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *de la partie 2. Soit σ^i la constante intervenant dans l'hypothèse* (H3) *écrite pour X^i. Pour tout $n\geqq 0$ soit I_n le nombre de points visités à la fois par $X^1, X^2, \ldots, X^k$ avant l'instant n.*

Alors, pour tout entier $p\geqq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} ((\log n)^k/n)^p E[(I_n)^p] = (2\pi)^{kp} E[l^p]$$

où

$$l = \int_0^{\sigma_1^2} \int_0^{\sigma_2^2} \ldots \int_0^{\sigma_k^2} \delta_{(0)}(W^1_{s_1} - W^2_{s_2}, \ldots, W^{k-1}_{s_{k-1}} - W^k_{s_k}) ds_1 \ldots ds_k$$

est le temps local d'intersection sur $[0;\sigma_1^2]\times \ldots \times[0;\sigma_k^2]$ de k mouvements browniens plans indépendants $W^1, \ldots, W^k$ issus de 0 *(voir la partie 2).*

Corollaire 5.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.1, et si $k=2$ ou 3, la suite $((\log n)^k/n) I_n$ converge en distribution vers $(2\pi)^k l$, où l est défini comme ci-dessus.*

Preuve du corollaire. Les estimations de la partie 2 montrent que si $k=2$ ou 3 la loi de l est déterminée par ses moments. Le résultat du corollaire découle alors du théorème 5.1 et d'une application de la méthode des moments (voir par exemple Feller [14], p. 269). □

Preuve du théorème 5.1. Nous nous limiterons au cas $k=2$. Sans perte de généralité on peut supposer $X_0^1=y_0$, $X_0^2=y_0'$, P-p.s. Pour tout $y\in\mathbb{Z}^2$ on pose:

$$T(y)=\inf\{k\geqq 0; X_k^1=y\},$$
$$T'(y)=\inf\{k\geqq 0; X_k^2=y\}.$$

Alors, pour $p\geqq 1$:

$$E[(I_n)^p]=E\left[\left(\sum_{y\in\mathbb{Z}^2} 1_{(T(y)\leqq n)}1_{(T'(y)\leqq n)}\right)^p\right]$$
$$=\sum_{y_1,\ldots,y_p\in\mathbb{Z}^2} P\left[\bigcap_{i=1}^p \{T(y_i)\leqq n\}\right]P\left[\bigcap_{i=1}^p \{T'(y_i)\leqq n\}\right]. \tag{5.a}$$

Remarquons que, pour tous $y_1,\ldots,y_p\in\mathbb{Z}^2$,

$$F_n(y_1,\ldots,y_p)\leqq P\left[\bigcap_{i=1}^p \{T(y_i)\leqq n\}\right]\leqq G_n(y_1,\ldots,y_p), \tag{5.b}$$

où

$$F_n(y_1,\ldots,y_p)=\sum_{\sigma\in S_p} P[T(y_{\sigma(1)})<\ldots<T(y_{\sigma(p)})\leqq n],$$
$$G_n(y_1,\ldots,y_p)=\sum_{\sigma\in S_p} P[T(y_{\sigma(1)})\leqq\ldots\leqq T(y_{\sigma(p)})\leqq n].$$

Fixons maintenant un couple $(\sigma,\sigma')\in S_p\times S_p$ et écrivons:

$$\frac{(\log n)^{2p}}{n^p}\sum_{y_1\ldots y_p\in\mathbb{Z}^2} P[T(y_{\sigma(1)})\leqq\ldots\leqq T(y_{\sigma(p)})\leqq n]P[T'(y_{\sigma'(1)})\leqq\ldots\leqq T'(y_{\sigma'(p)})\leqq n]$$
$$=\int_{(\mathbb{R}^2)^p} du_1\ldots du_p\theta_n(u_1,\ldots,u_p)\theta_n'(u_1,\ldots,u_p), \tag{5.c}$$

où on a noté pour $u_1,\ldots,u_p\in\mathbb{R}^2$,

$$\theta_n(u_1,\ldots,u_p)=(\log n)^pP[T([n^{1/2}u_{\sigma(1)}])\leqq\ldots\leqq T([n^{1/2}u_{\sigma(p)}])\leqq n],$$

et, pour $u\in\mathbb{R}^2$, $[u]$ désigne le point de $\mathbb{Z}^2$ le plus proche de u (cette définition est ambiguë sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle qui n'a pas d'importance ici).

Soient $u_1,\ldots,u_p$ p points *distincts* de $\mathbb{R}^2-\{0\}$. En utilisant les théorèmes 3.4 et 3.6 ainsi que la propriété de Markov on trouve:

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n(u_1,\ldots,u_p)=\int_0^{\sigma_1^2}\frac{dt_1}{t_1}\exp(-|u_{\sigma(1)}|^2/2t_1)$$
$$\cdot\int_0^{\sigma_1^2-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\exp(-|u_{\sigma(2)}-u_{\sigma(1)}|^2/2t_2)$$
$$\ldots\int_0^{\sigma_1^2-(t_1+\ldots+t_{p-1})}\frac{dt_p}{t_p}\exp(-|u_{\sigma(p)}-u_{\sigma(p-1)}|^2/2t_p)$$

ce qu'on peut encore écrire, avec la convention $u_{\sigma(0)}=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n(u_1,\ldots,u_p)=(2\pi)^p\int_{\Omega_p(\sigma_1^2)} ds_1\ldots ds_p\prod_{i=1}^p p_{s_i-s_{i-1}}(u_{\sigma(i-1)},u_{\sigma(i)}) \tag{5.d}$$

où, comme dans la partie 2, on note $\Omega_p(t)=\{(s_1,\ldots,s_p); 0\leqq s_1\leqq \ldots \leqq s_p\leqq t\}$ et $p_s(u,v)$ désigne la densité de transition gaussienne en dimension deux. Un résultat analogue vaut lorsque $\theta_n(u_1,\ldots,u_p)$ est remplacé par $\theta'_n(u_1,\ldots,u_p)$.

L'étape suivante de la preuve consiste à appliquer le théorème de convergence dominée au membre de droite de (5.c). On écrit:

$$\begin{aligned}\theta_n(u_1,\ldots,u_p)\leqq &(\log n)P_{y_0}[T([n^{1/2}u_{\sigma(1)}])\leqq n]\\ &\cdot\prod_{i=2}^{p}((\log n)P_0[T([n^{1/2}u_{\sigma(i)}]-[n^{1/2}u_{\sigma(i-1)}])\leqq n]).\end{aligned}$$

Le théorème 3.6 montre alors, pour une certaine constante $C>0$,

$$\theta_n(u_1,\ldots,u_p)\leqq C^p f_2(|u_{\sigma(1)}-n^{-1/2}y_0|)\prod_{i=2}^{p} f_2(|u_{\sigma(i)}-u_{\sigma(i-1)}|), \tag{5.e}$$

où, comme dans le théorème 3.6, on note pour $r>0$:

$$f_2(r)=(\log 1/r)_+ + r^{-2}1_{\{r>1/2\}}.$$

Il est important de remarquer ici que la fonction $u\to f_2(|u|)$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$. En utilisant (5.e) pour justifier l'application du théorème de convergence dominée on déduit de (5.d) que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\int_{(\mathbb{R}^2)^p} du_1\ldots du_p\theta_n(u_1,\ldots,u_p)\theta'_n(u_1,\ldots,u_p)\right)\\ &=(2\pi)^{2p}\int_{(\mathbb{R}^2)^p} du_1\ldots du_p\left(\int_{\Omega_p(\sigma_1^2)} ds_1\ldots ds_p\prod_{i=1}^{p} p_{s_i-s_{i-1}}(u_{\sigma(i-1)},u_{\sigma(i)})\right)\\ &\quad\cdot\left(\int_{\Omega_p(\sigma_2^2)} ds'_1\ldots ds'_p\prod_{i=1}^{p} p_{s'_i-s'_{i-1}}(u_{\sigma'(i-1)},u_{\sigma'(i)})\right).\end{aligned}$$

Revenons maintenant à l'identité (5.c) et sommons sur tous les couples (σ,σ'). La proposition 2.1, ou plus exactement une légère extension de cette proposition, entraîne alors:

$$\lim_{n\to\infty}((\log n)^{2p}/n^p)\sum_{y_1\ldots y_p\in\mathbb{Z}^2} G_n(y_1,\ldots,y_p)G'_n(y_1,\ldots,y_p)=(2\pi)^{2p}E[l^p]. \tag{5.f}$$

où l est défini comme dans l'énoncé du théorème.

En reprenant les calculs ci-dessus on voit aisément que le résultat limite (5.f) reste vrai si on remplace G_n par F_n et G'_n par F'_n, (5.a) et (5.b) entraînent alors:

$$\lim_{n\to\infty}((\log n)^{2p}/n^p)E[(I_n)^p]=(2\pi)^{2p}E[l^p], \tag{5.g}$$

d'où le résultat du théorème, dans le cas $k=2$.

Dans le cas général la preuve est exactement semblable: on utilise principalement le fait que la fonction $u\to f_2(|u|)$ est de puissance $k^{\text{ième}}$-intégrable pour tout $k\geqq 2$. □

Remarque. Il semble plausible que le résultat du corollaire 5.2 soit encore vrai pour $k\geqq 4$. Pour le vérifier rigoureusement il suffirait d'établir que toute valeur d'adhérence de la suite des lois de $((\log n)^k/n)I_n$ possède certaines propriétés qui, jointes à la connaissance des moments, caractérisent la loi de $(2\pi)^k l$.

Théorème 5.3. *Soient X^1, X^2 deux marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^3$, satisfaisant les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *de la partie 2. Pour $i=1,2$ soient σ_i la constante intervenant dans l'hypothèse* (H3) *écrite pour le processus X^i, et $q_i>0$ la probabilité que X^i ne revienne jamais à son point de départ.*

Pour $n \geqq 0$, soit I_n le nombre de points visités par X^1 et par X^2 avant l'instant n. Alors, pour tout entier $p \geqq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-p/2} E[(I_n)^p] = (q_1 q_2)^p (\sigma_1\sigma_2)^{-2p} E[l^p]$$

où $l = \int_0^{\sigma_1^2}\int_0^{\sigma_2^2} \delta_{(0)}(W_s^1 - W_t^2)\,ds\,dt$ est le temps local d'intersection sur $[0;\sigma_1^2]\times[0;\sigma_2^2]$ de deux mouvements browniens indépendants W^1, W^2 à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et issus de 0.

En particulier la suite $n^{-1/2} I_n$ converge en distribution vers $q_1 q_2 (\sigma_1\sigma_2)^{-2} l$.

Preuve. Le schéma de la preuve est semblable à celui de la preuve du théorème 5.1. Nous indiquerons seulement les principaux points où les deux démonstrations diffèrent. On part de l'identité (5.a) qui reste vérifiée. Ensuite on écrit à la place de (5.c), pour tout couple de permutations (σ,σ'):

$$\begin{aligned} n^{-p/2} &\sum_{y_1\dots y_p\in\mathbb{Z}^3} P[T(y_{\sigma(1)}) \leqq \dots \leqq T(y_{\sigma(p)}) \leqq n] \\ &\cdot P[T'(y_{\sigma'(1)}) \leqq \dots \leqq T'(y_{\sigma'(p)}) \leqq n] \\ &= \int_{(\mathbb{R}^3)^p} du_1 \dots du_p \theta_n(u_1,\dots,u_p)\theta_n'(u_1,\dots,u_p), \end{aligned} \tag{5.h}$$

où $\theta_n(u_1,\dots,u_p) = n^{p/2} P[T([n^{1/2}u_{\sigma(1)}]) \leqq \dots \leqq T([n^{1/2}u_{\sigma(p)}]) \leqq n]$.

En utilisant les théorèmes 3.5 et 3.6 on trouve que, pour tous $u_1,\dots,u_p$ points distincts de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(u_1,\dots,u_p) = q_1^p \sigma_1^{-2p} \int_{\Omega_p(\sigma_1^2)} ds_1 \dots ds_p \prod_{i=1}^p p_{s_i - s_{i-1}}(u_{\sigma(i-1)}, u_{\sigma(i)}) \tag{5.i}$$

où $p_s(u,v)$ désigne maintenant la densité de transition gaussienne en dimension trois et comme d'habitude on fait la convention $s_0=0$, $u_{\sigma(0)}=0$. Le théorème 3.6, et en particulier le fait que la fonction $u \to f_3(|u|)$ soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}^3$ justifient l'application du théorème de convergence dominée, qui conduit à:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(\int_{(\mathbb{R}^3)^p} du_1 \dots du_p \theta_n(u_1,\dots,u_p)\theta_n'(u_1,\dots,u_p)\right) \\ &= (q_1 q_2)^p (\sigma_1\sigma_2)^{-2p} \int_{(\mathbb{R}^2)^p} du_1 \dots du_p \left(\int_{\Omega_p(\sigma_1^2)} ds_1 \dots ds_p \prod_{i=1}^p p_{s_i - s_{i-1}}(u_{\sigma(i-1)}, u_{\sigma(i)})\right) \\ &\cdot \left(\int_{\Omega_p(\sigma_2^2)} ds_1' \dots ds_p' \prod_{i=1}^p p_{s_i' - s_{i-1}'}(u_{\sigma'(i-1)}, u_{\sigma'(i)})\right). \end{aligned} \tag{5.j}$$

On conclut comme dans la preuve du théorème 5.1 en utilisant (5.h), (5.j) et la proposition 2.1. □

Remarques. (i) Les analogues «browniens» des théorèmes 5.1 et 5.3 [voir (1.d) et (1.e)] sont établis dans [27]. Ces résultats sont appliqués dans [27] à l'étude de la mesure de Hausdorff des points multiples du mouvement brownien.

(ii) Nous n'essaierons pas d'écrire en toute généralité les résultats correspondant aux théorèmes 5.1 et 5.3 dans le cas où l'on omet l'hypothèse (H3). On obtient en général comme loi limite la loi d'un temps local d'intersection pour des mouvements browniens indépendants «non isotropes». Nous allons décrire un cas particulier simple qui nous sera utile dans la partie 6. On considère deux marches aléatoires indépendantes X^1, X^2 à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ ($d=2$ ou 3) satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2). Soient Q_1, Q_2 les formes quadratiques associées à X^1 et X^2 et A_1, A_2 les opérateurs symétriques positifs définis par:

$$Q_1(\theta)=|A_1\theta|^2, \qquad Q_2(\theta)=|A_2\theta|^2.$$

Supposons $A_2=\lambda A_1$ pour un $\lambda>0$. Alors à l'aide des remarques de la fin de la partie 3, on vérifie que les résultats des théorème 5.1 et corollaire 5.2 (dans le cas $d=2$) et du théorème 5.3 (dans le cas $d=3$) restent vrais, à condition de définir:

$$\sigma_1=(\det A_1)^{1/d}, \qquad \sigma_2=(\det A_2)^{1/d}.$$

(iii) Soient X^1, X^2 deux marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ ($d=2$ ou 3) indépendantes et satisfaisant les hypothèses (H1), (H2), (H3). Pour $n\geqq 1$ posons:

$$J_n=\sum_{0\leqq u\leqq n}\ \sum_{0\leqq v\leqq n} 1_{(X_u^1=X_v^2)}.$$

Remarquons que J_n est l'exact analogue discret du temps local d'intersection pour deux mouvements browniens indépendants. On peut montrer pour J_n des résultats asymptotiques analogues à ceux que nous avons établis pour I_n. En utilisant à nouveau la méthode des moments on obtient:

– si $d=2$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}J_n=(\sigma_1\sigma_2)^{-2}\alpha([0;\sigma_1^2]\times[0;\sigma_2^2]) \tag{5.k}$$

– si $d=3$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}J_n=(\sigma_1\sigma_2)^{-2}\alpha([0;\sigma_1^2]\times[0;\sigma_2^2]), \tag{5.l}$$

où dans les deux cas la convergence a lieu en distribution et $\alpha(\cdot)$ est le temps local d'intersection de deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issus de 0. La forme particulièrement simple des résultats limites (5.k) et (5.l) suggère qu'il devrait être possible d'établir pour les temps locaux d'intersection un «théorème d'invariance fort» analogue à celui que montrent Csaki et Revesz [3] pour les temps locaux ordinaires du mouvement brownien linéaire. Précisément, en supposant pour simplifier $\sigma_1=\sigma_2=1$, on voudrait trouver deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, W et W', définis sur le même espace que X^1 et X^2 et tels que, si α désigne le temps local d'intersection de W et W',

– si $d=2$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}(J_n-\alpha([0;n]^2))=0, \quad \text{p.s.}$$

– si $d=3$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}(J_n-\alpha([0;n]^2))=0 \quad \text{p.s.}$$

6. Un théorème central limite pour le nombre de points visités par une marche aléatoire plane récurrente

Soit X une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2) de la partie 3. Si A est l'unique opérateur symétrique positif tel que $E[(\theta\cdot X)^2]=|A\theta|^2$ on pose $\sigma=(\det A)^{1/2}$. Pour tout entier $n\geqq 0$ on note R_n le nombre de points (distincts) de $\mathbb{Z}^2$ visités par X avant l'instant n. Dvoretzky et Erdös [7] ont montré, dans le cas des marches aléatoires simples que:

$$\lim_{n\to\infty}((\log n)/n)R_n=2\pi\sigma^2\,, \tag{6.a}$$

avec convergence p.s. Le cas général a été traité par Jain et Pruitt [18, 20] qui ont aussi étudié la variance de R_n et établi l'existence d'une constante $C>0$ telle que:

$$\operatorname{var} R_n \underset{n\to\infty}{\sim} Cn^2/(\log n)^4\,. \tag{6.b}$$

Ceci suggère d'étudier la convergence en distribution de $((\log n)^2/n)(R_n-E[R_n])$. Nous montrons le:

Théorème 6.1.
$$\lim_{n\to\infty}((\log n)^2/n)(R_n-E[R_n])=-4\pi^2\sigma^2\gamma(\mathscr{C}_1)$$

où la convergence a lieu en distribution et $\gamma(\mathscr{C}_1)$ désigne le temps local d'intersection renormalisé d'un mouvement brownien plan avec lui-même, sur le triangle $\mathscr{C}_1=\{(s,t);0\leqq s<t\leqq 1\}$ (voir la fin de la partie 2).

La preuve du théorème 6.1 utilisera deux résultats intermédiaires. Le premier (lemme 6.2) est manifestement une conséquence du résultat de Jain et Pruitt (6.b). Nous en donnerons une preuve indépendante afin que notre démonstration du théorème 6.1 soit complète.

Lemme 6.2. *Il existe une constante C telle que, pour tout entier $n\geqq 2$,*

$$E[(R_n-E[R_n])^2]\leqq Cn^2/(\log n)^4\,.$$

Preuve. Pour tout $k\geqq 1$, soit

$$a_k=\sup\{E[(R_n-E[R_n])^2]^{1/2};2^k<n\leqq 2^{k+1}\}\,.$$

Soient maintenant $k\geqq 2$ et n tel que $2^k<n\leqq 2^{k+1}$. Notons $n_1=[n/2]$ et $n_2=n-n_1$. On a:

$$\begin{aligned}R_n-E[R_n]&=(R_{n_1}-E[R_{n_1}])+(\tilde R_{n_2}-E[\tilde R_{n_2}])\\&\quad-(|X(0,n_1)\cap X(n_1,n)|-E[|X(0,n_1)\cap X(n_1,n)|])\,,\end{aligned} \tag{6.c}$$

où la notation $X(p,q)$ désigne $\{X_k;p\leqq k\leqq q\}$ (plus généralement on notera $X(F)=\{X_k;k\in F\}$) et on a posé $\tilde R_{n_2}=|X(n_1,n_2)|$. Remarquons que R_{n_1} et $\tilde R_{n_2}$ sont indépendantes et que $\tilde R_{n_2}$ a même loi que R_{n_2}. On déduit de (6.c) que

$$\operatorname{var}(R_n)^{1/2}\leqq(\operatorname{var}(R_{n_1})+\operatorname{var}(R_{n_2}))^{1/2}+E[|X(0,n_1)\cap X(n_1,n)|^2]^{1/2}\,. \tag{6.d}$$

Il découle du théorème 5.1 que pour une certaine constante C_1:

$$E[|X(0,n_1)\cap X(n_1,n)|^2]^{1/2}\leqq C_1k^{-2}2^k\,. \tag{6.e}$$

(6.d) et (6.e) entraînent:

$$a_k \leqq 2^{1/2} a_{k-1} + C_1 k^{-2} 2^k .$$

Soit $b_k = k^2 2^{-k} a_k$. On trouve, pour tout $\varrho > 2^{-1/2}$ et tout k assez grand:

$$b_k \leqq \varrho b_{k-1} + C_1 . \tag{6.f}$$

(6.f) entraîne que la suite (b_k) est bornée, d'où le résultat du lemme. □

Proposition 6.3. *Soient $m \geqq 2$ et pour tout $1 \leqq i \leqq m$*

$$F_i = [(i-1)/m; i/m] .$$

Alors:

$$\lim_{n\to\infty} ((\log n)^2/n)(|X(nF_i) \cap X(nF_j)|; 1 \leqq i < j \leqq m)$$
$$= 4\pi^2 \sigma^2 (\beta(F_i \times F_j); 1 \leqq i < j \leqq m)$$

où la convergence a lieu en distribution et $\beta(\cdot)$ désigne le temps local d'intersection (non renormalisé) d'un mouvement brownien plan W avec lui-même:

$$\beta(A \times B) = \iint_{A \times B} \delta_{(0)}(W_s - W_t) ds\, dt (= \beta(0, A \times B)$$

avec les notations de la partie 2).

Preuve. Si $m=2$ l'énoncé de la proposition revient à la convergence en distribution de $((\log n)^2/n)\,|X(nF_1) \cap X(nF_2)|$. A une translation près on peut voir $X(nF_1)$ et $X(nF_2)$ comme les trajectoires de deux marches aléatoires indépendantes issues du même point. Le résultat de la proposition est alors équivalent au cas $k=2$ du corollaire 5.2.

Dans le cas général la démonstration de la proposition reprend les idées de la preuve du théorème 5.1. Cependant il se présente quelques difficultés techniques supplémentaires que nous allons prendre la peine de traiter en détail.

Soit $K > 0$. Pour tout $1 \leqq i \leqq m$ on note, de façon un peu abusive:

$$X^K(nF_i) = X(nF_i) \cap \{y \in \mathbb{Z}^2; |y| \leqq K n^{1/2}\} .$$

Le théorème d'invariance de Donsker (voir par exemple Billingsley [1]) entraîne que:

$$\lim_{K\to\infty} \left(\sup_{n \geqq 1} P[\sup(|X_k|; k \leqq n) > K n^{1/2}] \right) = 0 . \tag{6.g}$$

(6.g) montre qu'on peut ramener la convergence en distribution de

$$((\log n)^2/n)\,|X(nF_i) \cap X(nF_j)|$$

à celle de $((\log n)^2/n)\,|X^K(nF_i) \cap X^K(nF_j)|$. Après cette première réduction, l'idée de la preuve est la même que celle du corollaire 5.2, à savoir qu'on utilise la méthode des moments. On se fixe un entier $p \geqq 1$ et p couples $(i_1, j_1), \ldots, (i_p, j_p)$ avec $i_l < j_l$ pour tout $1 \leqq l \leqq p$ et on étudie la convergence de

$$((\log n)^2/n)^p E\left[\prod_{l=1}^{p} |X^K(nF_{i_l}) \cap X^K(nF_{j_l})| \right].$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin il est ici préférable de se fixer $\varepsilon>0$ suffisamment petit et pour tout $1\leqq i\leqq m$ de remplacer F_i par

$$F_i^\varepsilon=[(i-1)/m+\varepsilon; i/m-\varepsilon].$$

On écrit alors:

$$\begin{aligned} &E\left[\prod_{l=1}^{p} |X^K(nF_{i_l}^\varepsilon)\cap X^K(nF_{j_l}^\varepsilon)\}\right] \\ &= \sum_{\substack{y_1\ldots y_p\in\mathbb{Z}^2\\ |y_l|\leqq Kn^{1/2}}} P\left[\bigcap_{l=1}^{p} \{y_l\in X(nF_{i_l}^\varepsilon)\cap X(nF_{j_l}^\varepsilon)\}\right] \\ &= \sum_{\substack{z_1\ldots z_p\in n^{-1/2}\mathbb{Z}^2\\ |z_l|\leqq K}} P\left[\bigcap_{l=1}^{p} \{n^{1/2}z_l\in X(nF_{i_l}^\varepsilon)\cap X(nF_{j_l}^\varepsilon)\}\right]. \end{aligned} \tag{6.h}$$

Notons $\bar{z}=(z_1,\ldots,z_p)$ et pour tout $1\leqq l\leqq p$:

$$T_{2l-1}^{\bar{z}}=\inf\{k\in nF_{i_l}^\varepsilon; X_k=n^{1/2}z_l\},$$
$$T_{2l}^{\bar{z}}=\inf\{k\in nF_{j_l}^\varepsilon; X_k=n^{1/2}z_l\},$$

avec la convention $\inf\emptyset=\infty$. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{l=1}^{p} \{n^{1/2}z_l\in X(nF_{i_l}^\varepsilon)\cap X(nF_{j_l}^\varepsilon)\}\right] &= P\left[\bigcup_{\tau\in S_{2p}} \{T_{\tau(1)}^{\bar{z}}\leqq T_{\tau(2)}^{\bar{z}}\leqq \ldots \leqq T_{\tau(2p)}^{\bar{z}}\leqq n\}\right] \\ &\leqq \sum_{\tau\in S_{2p}} P[T_{\tau(1)}^{\bar{z}}\leqq T_{\tau(2)}^{\bar{z}}\leqq \ldots \leqq T_{\tau(2p)}^{\bar{z}}\leqq n], \end{aligned} \tag{6.i}$$

et on obtiendrait une minoration au lieu d'une majoration en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. Remarquons que certains des termes de la somme ci-dessus sont toujours nuls, mais cela ne porte pas à conséquence. Fixons maintenant $\tau\in S_{2p}$ et étudions:

$$\begin{aligned} &n^{-p} \sum_{\substack{\bar{z}\in(n^{1/2}\mathbb{Z}^2)^p\\ |z_l|\leqq K}} P[T_{\tau(1)}^{\bar{z}}\leqq T_{\tau(2)}^{\bar{z}}\leqq \ldots \leqq T_{\tau(2p)}^{\bar{z}}\leqq n] \\ &= \int_{\{x\in(\mathbb{R}^2)^p;\, |[x]_n|\leqq K\}} dx P[T_{\tau(1)}^{[x]_n}\leqq T_{\tau(2)}^{[x]_n}\leqq \ldots \leqq T_{\tau(2p)}^{[x]_n}\leqq n], \end{aligned} \tag{6.j}$$

où pour $x\in(\mathbb{R}^2)^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)$, on a noté $[x]_n=([x_1]_n,\ldots,[x_p]_n)$, le point de $(n^{-1/2}\mathbb{Z}^2)^p$ le plus proche de x, et $|[x]_n|=\sup\{|[x_l]_n|; 1\leqq l\leqq p\}$.

Pour alléger les notations plaçons-nous dans le cas où l'hypothèse (H3) est vérifiée et où $\sigma=1$ (dans le cas général on utilise la remarque (ii) de la fin de la partie 5). En utilisant à la fois le théorème 3.4 et le résultat limite (3.s) on trouve, si les x_i sont distincts et distincts de 0,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} (\log n)^{2p} P[T_{\tau(1)}^{[x]_n}\leqq \ldots \leqq T_{\tau(2p)}^{[x]_n}\leqq n] \\ &= (2\pi)^{2p} \int_{\prod_{l=1}^{p}(F_{i_l}^\varepsilon\times F_{j_l}^\varepsilon)} dt_1\ldots dt_{2p} \prod_{i=1}^{2p} p_{t_{\tau(i)}-t_{\tau(i-1)}}(x_{\bar{\tau}(i-1)}, x_{\bar{\tau}(i)}), \end{aligned} \tag{6.k}$$

avec la notation $\bar{\tau}(i)=l$ si $\tau(i)=2l-1$ ou $2l$ [de plus on convient que $t_{\bar{\tau}(0)}=0$ et $p_s(u,v)=0$ si $s<0$].

On voudrait maintenant appliquer le théorème de convergence dominée au membre de droite de (6.j), en utilisant (6.k). Pour cela on majore

$$(\log n)^{2p}P[T_{\tau(1)}^{[x]_n}\leqq \dots \leqq T_{\tau(2p)}^{[x]_n}\leqq n]\leqq \prod_{i=1}^{2p}((\log n)P_{[x_{\bar{\tau}(i-1)}]_n}[[x_{\bar{\tau}(i)}]_n\in X(0,n)])$$
$$\leqq \prod_{i=1}^{2p} Cf_2(|x_{\bar{\tau}(i)}-x_{\bar{\tau}(i-1)}|), \tag{6.l}$$

avec les notations du théorème 3.6. La majoration ainsi obtenue n'est pas très intéressante s'il existe des indices i tels que $\bar{\tau}(i)=\bar{\tau}(i-1)$, puisque $f_2(0)=+\infty$. Pour remédier à cet inconvénient on remarque que si $\bar{\tau}(i)=\bar{\tau}(i-1)=l$ on a nécessairement $\tau(i-1)=2l-1$ et $\tau(i)=2l$, et on déduit de (3.s) la majoration:

$$(\log n)P_{[x_l]_n}[[x_l]_n\in X(\varepsilon n,n)]\leqq C_\varepsilon, \tag{6.m}$$

pour une certaine constante C_ε. Ensuite, grâce au remplacement des F_i par les F_i^ε, on peut utiliser la majoration (6.m) pour écrire à la place de (6.l)

$$(\log n)^{2p}P[T_{\tau(1)}^{[x]_n}\leqq \dots \leqq T_{\tau(2p)}^{[x]_n}\leqq n]$$
$$\leqq \prod_{\substack{i=1\\ \bar{\tau}(i)\neq\bar{\tau}(i-1)}}^{2p}(Cf_2(|x_{\bar{\tau}(i)}-x_{\bar{\tau}(i-1)}|))\prod_{\substack{i=1\\ \bar{\tau}(i)=\bar{\tau}(i-1)}}^{2p}(C_\varepsilon). \tag{6.n}$$

La fonction de $(x_1,\dots,x_p)$ qui figure dans le terme de droite de (6.n) est clairement intégrable sur tout compact. Ceci suffit à justifier l'application du théorème de convergence dominée au membre de droite de (6.j). On trouve, compte-tenu de (6.h) et (6.i):

$$\limsup_{n\to\infty}((\log n)^2/n)^p E\left[\prod_{l=1}^{p}|X^K(nF_{i_l}^\varepsilon)\cap X^K(nF_{j_l}^\varepsilon)|\right]$$
$$\leqq (2\pi)^{2p}\int_{|x_l|\leqq K}dx_1\dots dx_p\sum_{\tau\in S_{2p}}\int_{\prod_{l=1}^{p}(F_{i_l}^\varepsilon\times F_{j_l}^\varepsilon)}dt_1\dots dt_{2p}$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{2p}p_{t_{\tau(i)}-t_{\tau(i-1)}}(x_{\bar{\tau}(i-1)},x_{\bar{\tau}(i)}). \tag{6.o}$$

A l'aide de la remarque suivant (6.i) on obtiendrait aussi aisément une minoration pour la limite inférieure par la même quantité. D'autre part cette quantité s'interprète (voir la partie 2) comme étant égale à

$$(2\pi)^{2p}E\left[\prod_{l=1}^{2p}\beta_K(F_{i_l}^\varepsilon\times F_{j_l}^\varepsilon)\right],$$

où β est comme dans l'énoncé de la proposition et β_K est définie par:

$$\beta_K(A\times B)=\int_{A\times B}\beta(ds\,dt)1_{(|W_s|\leqq K)}.$$

On a donc établi:

$$\lim_{n\to\infty}((\log n)^2/n)^p E\left[\prod_{l=1}^{p}|X^K(nF_{i_l}^\varepsilon)\cap X^K(nF_{j_l}^\varepsilon)|\right]=(2\pi)^{2p}E\left[\prod_{l=1}^{p}\beta_K(F_{i_l}^\varepsilon\times F_{j_l}^\varepsilon)\right]. \tag{6.p}$$

On peut maintenant faire tendre ε vers 0 dans (6.p) pour aboutir à:

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^2/n)^p E\left[\prod_{l=1}^{p} |X^K(nF_{i_l})\cap X^K(nF_{j_l})|\right] = (2\pi)^{2p} E\left[\prod_{l=1}^{p} \beta_K(F_{i_l}\times F_{j_l})\right] \tag{6.q}$$

La justification du passage de (6.p) à (6.q) ne présente pas de difficultés: les estimations de la partie 5 permettent de vérifier aisément que:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} ((\log n)^2/n)^p E\left[\prod_{l=1}^{p} |X^K(nF^{\varepsilon}_{i_l})\cap X^K(nF^{\varepsilon}_{j_l})|\right]\\ &\quad = ((\log n)^2/n)^p E\left[\prod_{l=1}^{p} |X^K(nF_{i_l})\cap X^K(nF_{j_l})|\right],\end{aligned}$$

avec convergence uniforme en n. (6.q) et le principe de la méthode des moments entraînent:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} ((\log n)^2/n)\,(|X^K(nF_i)\cap X^K(nF_j)|;\, 1\leqq i<j\leqq m)\\ &\quad = (2\pi)^2(\beta_K(F_i\times F_j);\, 1\leqq i<j\leqq m),\end{aligned} \tag{6.r}$$

avec convergence en distribution. En faisant tendre K vers ∞ et en utilisant (6.g) on déduit de (6.r) le résultat de la proposition. $\square$

Preuve du théorème 6.1. Soit $p\geqq 1$. On écrit pour tout entier n:

$$R_n = \sum_{i=1}^{2^p} R_n^{(i)} - \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{2^{k-1}} I_n(k,j), \tag{6.s}$$

à condition de poser: pour $1\leqq i\leqq 2^p$, $1\leqq k\leqq p$, $1\leqq j\leqq 2^{k-1}$,

$$\begin{aligned}R_n^{(i)} &= |X((i-1)2^{-p}n, i2^{-p}n)|,\\ I_n(k,j) &= |X((2j-2)2^{-k}n, (2j-1)2^{-k}n)\cap X((2j-1)2^{-k}n, 2j2^{-k}n)|.\end{aligned}$$

Pour toute variable aléatoire intégrable U notons $\bar{U} = U - E[U]$. On déduit de (6.s):

$$\bar{R}_n = \sum_{i=1}^{2^p} \bar{R}_n^{(i)} - \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{2^{k-1}} \bar{I}_n(k,j). \tag{6.t}$$

A l'aide du lemme 6.2 et de l'indépendance des $R_n^{(i)}$ on obtient:

$$E\left[\left(((\log n)^2/n)\sum_{i=1}^{2^p} \bar{R}_n^{(i)}\right)^2\right] = ((\log n)^4/n^2)\sum_{i=1}^{2^p} E[(\bar{R}_n^{(i)})^2] \leqq C2^{-p}, \tag{6.u}$$

pour une certaine constante C et tout n assez grand.

D'autre part la proposition 6.3 entraîne:

$$\lim_{n\to\infty} ((\log n)^2/n)\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{2^{k-1}} \bar{I}_n(k,j) = 4\pi^2\sigma^2 \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{2^{k-1}} \bar{\beta}(A_j^k), \tag{6.v}$$

où la convergence a lieu en distribution, les A_j^k sont définis par (2.p), et β est, comme dans la proposition 6.2, le temps local d'intersection avec lui-même d'un mouvement brownien plan. Le temps local d'intersection renormalisé $\gamma(\mathscr{C}_1)$ est défini (voir la partie 2) par:

$$\gamma(\mathscr{C}_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}\bar{\beta}(A_j^k)=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{2^{k-1}}\bar{\beta}(A_j^k). \tag{6.w}$$

Le résultat du théorème découle aisément de (6.t), (6.u), (6.v) et (6.w), en choisissant d'abord p suffisamment grand avant de faire tendre n vers l'infini. □

Remarques. (i) Soit W un mouvement brownien plan et pour $\varepsilon>0$, S^ε la saucisse de Wiener de rayon ε associée à W sur l'intervalle de temps $[0;1]$. Si m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ on a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)m(S^\varepsilon)=\pi,$$

avec convergence p.s. et dans les espaces L^p. On peut montrer le résultat «au second ordre» suivant, qui est l'analogue du théorème 6.1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)((\log 1/\varepsilon)m(S^\varepsilon)-\pi)=-\pi^2\gamma(\mathscr{C}_1)$$

où la convergence a lieu dans L^2 et $\gamma(\mathscr{C}_1)$ est le temps local d'intersection renormalisé associé au mouvement brownien W. La preuve de ce résultat [28] est très semblable à celle du théorème 6.1, à ceci près que le résultat correspondant à la proposition 6.3 devient immédiat.

(ii) Jain et Pruitt [20] ont montré que, pour toutes les marches aléatoires planes récurrentes, (R_n) vérifie la loi des grands nombres, i.e. $\lim(R_n/E[R_n])=1$, p.s. On peut donc se demander si le théorème central limite reste vrai dans un cadre plus général. Il serait en particulier intéressant de déterminer quelles lois limites autres que la loi normale on obtient pour la suite $(\operatorname{var} R_n)^{-1/2}(R_n-E[R_n])$.

(iii) En dimension $d\geqq 3$, Jain et Pruitt [19], [21] ont montré que, pour toutes les marches aléatoires satisfaisant (H2), le théorème central limite est vérifié par (R_n), avec convergence vers une loi normale. Dans le cas particulier où la marche aléatoire considérée satisfait aussi l'hypothèse (H1) on peut donner une preuve simple de ce résultat calquée sur celle du théorème 6.1. Par exemple en dimension $d=3$, on choisit un entier $p\geqq 1$ et on écrit,

$$R_n=\sum_{i=1}^{p}R_n^{(i)}-I(n,p) \tag{6.x}$$

où on a noté $R_n^{(i)}=|X((i-1)n/p, in/p)|$ et $I(n,p)$ est une somme de «termes d'intersection». On remarque ensuite qu'on peut à la fois choisir p grand, en fonction de n, et s'arranger pour que $I(n,p)$ soit négligeable devant $\bar{R}_n=R_n-E[R_n]$. Pour cela on a besoin de connaître le comportement asymptotique de $\operatorname{var} R_n$ qui nous est donné par le théorème 2 de [19]:

$$\operatorname{var} R_n \underset{n\to\infty}{\sim} a^2 n\log n \tag{6.y}$$

pour une certaine constante $a>0$ [les techniques du lemme 6.2 permettent de voir facilement que $\operatorname{var} R_n\leqq Cn(\log n)^2$]. A l'aide des résultats de la partie 5 on vérifie que, par exemple en prenant $p_n=(\log n)^{1/2}$ on a:

$$\lim_{n\to\infty}(n\log n)^{-1}E[(I(n,p_n))^2]=0,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}(n\log n)^{-1/2}\left(R_n-\sum_{i=1}^{p_n}R_n^{(i)}\right)=0.$$

Pour conclure et retrouver (1.k) on remarque que, pour n fixé, les variables $R_n^{(i)}$ $(1\leqq i\leqq p_n)$ sont indépendantes et qu'on peut appliquer le théorème de Lindeberg sur les tableaux triangulaires (voir par exemple Feller [14], p. 530) à la famille $(R_n^{(i)}-E[R_n^{(i)}])$. Pour vérifier la condition de Lindeberg il suffit de montrer que:

$$E[(R_n-E[R_n])^4]\leqq Cn^2(\log n)^2.$$

Cette majoration est aisément établie à l'aide des résultats de la partie 5 en utilisant les mêmes techniques que dans la preuve du lemme 6.2.

(iv) Le théorème 6.1 est étroitement lié au résultat de renormalisation de Varadhan [40]. De la même façon on peut rapprocher le théorème central limite pour (R_n) en dimension 3 des résultats de renormalisation obtenus par Yor [44] pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$.

(v) D'autres résultats asymptotiques concernant la suite (R_n) ont été établis par Donsker et Varadhan [5] qui ont déterminé un équivalent de $\log E[\exp-\lambda R_n]$ $(\lambda>0)$ quand n tend vers l'infini. Il est remarquable que le résultat ainsi obtenu soit l'exact analogue d'un résultat établi par les mêmes auteurs [4] relatif à la saucisse de Wiener dans $\mathbb{R}^d$. Ceci pose à nouveau la question de l'existence d'un théorème d'invariance «suffisamment fort» qui permettrait de passer de l'une des deux situations à l'autre.

7. Conclusion et remarques

Les résultats des parties 4 et 5 donnent dans certaines cas particuliers une réponse au problème général suivant. Soient $X^1,\dots,X^k$ k $(k\geqq 1)$ marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) de la partie 3, et I_n le nombre de points visités à la fois par $X^1,\dots,X^k$ avant l'instant n. Alors peut-on trouver une fonction déterministe $f(n)$ telle que la suite $(f(n))^{-1}I_n$ converge en distribution? Le problème n'a d'intérêt que si $I_\infty=\infty$, p.s. On a le résultat élémentaire suivant.

Proposition 7.1. *Supposons de plus que $X^1,\dots,X^k$ ont des moments d'ordre $d-1$. Alors $E[I_\infty]=\infty$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée:*

- $d=1$ *ou* 2, k *quelconque*,
- $d=3$, $k\leqq 3$,
- $d=4$, $k\leqq 2$,
- $d\geqq 5$, $k=1$.

Preuve. On écrit:

$$E[I_\infty]=\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\left(\prod_{i=1}^{k}P[y\in X^i(0,\infty)]\right).$$

Si $d=1$ ou 2 le fait que les X^i soient récurrentes montre immédiatement que $I_\infty=\infty$ p.s. Si $d\geqq 3$, (3.t) montre que la relation $E[I_\infty]=\infty$ équivaut à:

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^d-\{0\}} |y|^{k(2-d)}=\infty\,,$$

ce qui équivaut encore à:

$$k(2-d)+d-1\geqq -1\,,$$

d'où la proposition. □

Remarque. L'hypothèse de moments sur les X^i n'est certainement pas la meilleure possible. Il suffit en fait que l'équivalence (3.t) soit vérifiée pour toutes les marches considérées.

Les résultats des parties 4 et 5, et les rappels de l'introduction concernant le cas $k=1$, montrent que le problème du comportement asymptotique de I_n est résolu dans tous les cas où $E[I_\infty]=\infty$, à l'exception des cas $d=3$, $k=3$ et $d=4$, $k=2$ [remarquons aussi que si $d=2$, $k\geqq 4$ on obtient seulement la convergence des moments de $((\log n)^k/n)I_n$]. Un peu comme la dimension $d=2$ était critique pour le problème de la visite des points, ces deux valeurs du couple (d,k) peuvent être considérées comme critiques pour le problème de l'étude des intersections de trajectoires de marches aléatoires indépendantes. En effet elles correspondent à la situation où les trajectoires de k mouvements browniens indépendants en dimension d n'ont pas de points communs, alors que le contraire se produit si on remplace les mouvements browniens par des marches alétoires (voir à ce sujet les remarques d'Erdös et Taylor [12]). Les résultats correspondants aux cas critiques sont établis dans [29]. Supposons pour simplifier que les X^i $(1\leqq i\leqq k)$ satisfont l'hypothèse (H3) de la partie 3, notons σ_i la constante associée à X^i et q_i la probabilité que X^i partant de 0 n'y revienne jamais. Alors:

– si $d=4$, $k=2$,

$$\lim_{n\to\infty}(\log n)^{-1}I_n=(2\pi)^{-2}(\sigma_1\sigma_2)^{-2}q_1q_2N^2$$

– si $d=3$, $k=3$,

$$\lim_{n\to\infty}(\log n)^{-1}I_n=(2\pi)^{-3}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^{-2}q_1q_2q_3M\,,$$

où dans les deux cas la convergence a lieu en distribution, N est une variable normale centrée réduite et M suit une loi gamma de paramètre 1/4 de moyenne 1, dont la densité s'écrit:

$$4^{-1/4}(\Gamma(1/4))^{-1}x^{-3/4}\exp(-x/4)\,.$$

Bibliographie

1. Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New York: Wiley 1968
2. Brydges, D., Spencer, T.: Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. Commun. Math. Phys. **97**, 125–148 (1985)
3. Csaki, E., Revesz, P.: Strong invariance for local times. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **55**, 237–254 (1981)

4. Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S.: Asymptotic estimates for the Wiener sausage. Commun. Pure Appl. Math. **28**, 525–565 (1975)
5. Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S.: On the number of sites visited by a random walk. Commun. Pure Appl. Math. **32**, 721–747 (1979)
6. Doob, J.L.: Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. Bull. Soc. Math. Fr. **85**, 431–458 (1957)
7. Dvoretzky, A., Erdös, P.: Some problems on random walk in space. Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, pp. 353–367. Berkeley, CA: University of California Press 1951
8. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Double points of paths of Brownian motion in n-space. Acta Sci. Math. (Szeged) **12**, 64–81 (1950)
9. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. Bull. Res. Council Isr. Sect. F **3**, 364–371 (1954)
10. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S., Taylor, S.J.: Triple points of Brownian paths in 3-space. Proc. Camb. Phil. Soc. **53**, 856–862 (1957)
11. Dynkin, E.B.: Random fields associated with multiple points of the Brownian motion. J. Funct. Anal. **62**, 397–434 (1985)
12. Erdös, P., Taylor, S.J.: Some intersection properties of random walk paths. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **11**, 231–248 (1960)
13. Felder, G., Fröhlich, J.: Intersection properties of simple random walks: a renormalization group approach. Commun. Math. Phys. **97**, 111–124 (1985) [see also Aizenman, M.: Commun. Math. Phys. **97**, 91–110 (1985)]
14. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, II. New York: Wiley 1961
15. Freed, K.F.: Polymers as self-avoiding random walks. Ann. Probab. **9**, 537–556 (1981)
16. Geman, D., Horowitz, J., Rosen, J.: A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Ann. Probab. **12**, 86–107 (1984)
17. Getoor, R.K., Sharpe, M.J.: Excursions of Brownian motion and Bessel processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **47**, 83–106 (1979)
18. Jain, N.C., Pruitt, W.E.: The range of recurrent random walk in the plane. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **16**, 279–292 (1970)
19. Jain, N.C., Pruitt, W.E.: The range of transient random walk. J. Anal. Math. **24**, 369–393 (1971)
20. Jain, J.C., Pruitt, W.E.: The range of random walk. Proc. Sixth Berkeley Symposium on Math. Statistics and probability, Vol. 3, pp. 31–50. Berkeley University of California Press: 1973
21. Jain, N.C., Pruitt, W.E.: Further limit theorems for the range of random walk. J. Anal. Math. **27**, 94–117 (1974)
22. Jain, N.C., Orey, S.: On the range of random walk. Isr. J. Math. **6**, 373–380 (1968)
23. Kingman, J.F.C.: The ergodic theory of subadditive processes. J. R. Stat. Soc. Ser. B **30**, 499–510 (1968)
24. Lawler, G.F.: A self-avoiding random walk. Duke Math. J. **47**, 655–693 (1980)
25. Lawler, G.F.: The probability of intersection of independent random walks in four dimensions. Commun. Math. Phys. **86**, 539–554 (1982)
26. Lawler, G.F.: Intersections of random walks in four dimensions, II. Commun. Math. Phys. **97**, 583–594 (1985)
27. Le Gall, J.-F.: Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Preprint (1984), à paraître dans Ann. Probab.
28. Le Gall, J.-F.: Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. In: Séminaire de probabilités XIX. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123, pp. 314–331. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985
29. Le Gall, J.-F.: Propriétés d'intersection des marches aléatoires, II, étude des cas critiques. Commun. Math. Phys. **104**, 505–524 (1986)
30. Montroll, E.W., Weiss, G.H.: Random walks on lattices. II. J. Math. Phys. **6**, 167–181 (1965)
31. Pitman, J.W., Yor, M.: Bessel processes and infinitely divisible laws. In: Stochastic integrals. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 851, pp. 285–370. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1981

32. Pitman, J.W., Yor, M.: A decomposition of Bessel bridges. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **59**, 425–457 (1982)
33. Rosen, J.: A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. Commun. Math. Phys. **88**, 327–338 (1983)
34. Rosen, J.: A representation for the intersection local time of Brownian motion in space. Ann. Probab. **13**, 145–153 (1985)
35. Rosen, J.: Tanaka's formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion Preprint University of Massachusetts 1984
36. Shohat, J.A., Tamarkin, J.D.: The problem of moments. Math. Surveys **1**, Providence, RI: Am. Math. Soc. 1963
37. Spitzer, F.: Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. Trans. Am. Math. Soc. **87**, 187–197 (1958)
38. Spitzer, F.: Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **3**, 110–121 (1964)
39. Spitzer, F.: Principles of random walk. Princeton, NI: Van Nostrand 1964
40. Varadhan, S.R.S.: Appendix to: Euclidean quantum field theory, by K. Symanzik. In: Local quantum theory. New York: Academic Press 1969
41. Williams, D.: Path decomposition and continuity of local times for one-dimensional diffusion I. Proc. Lond. Math. Soc. III **28**, 738–768 (1974)
42. Wolpert, R.: Wiener path intersections and local time. J. Funct. Anal. **30**, 329–340 (1978)
43. Yor, M.: Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. In: Séminaire de probabilités XIX. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123, pp. 332–349. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985
44. Yor, M.: Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. In: Séminaire de probabilités XIX. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123, pp. 350–365. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985

Communicated by J. Fröhlich

Reçu le 27 septembre 1985