

# Approximation semi-classique de l'équation de Heisenberg

Xue-Ping Wang

U.E.R. de Mathématiques, Université de Nantes, F-44072 Nantes Cedex, France

**Abstract.** We study the semi-classical approximation for the solution of Heisenberg equation in terms of pseudo-differential operators and establish a semi-classical version of Egorov's theorem. As an application of these results, we get the classical limit of quantum mechanical correlation functions for a class of non-bounded observables.

## 1. Introduction

Il est bien connu qu'il existe une équivalence physique entre la représentation de Schrödinger et la représentation de Heisenberg. Soient  $H$  un hamiltonien quantique et  $u(t)$  la fonction d'onde représentant l'état d'une particule à l'instant  $t$ . Dans le modèle de Schrödinger,  $u(t)$  vérifie l'équation de mouvement:

$$ih \frac{d}{dt} u(t) = H u(t), \quad u(0) = u_0 \quad (1.1)$$

tandis que dans la représentation de Heisenberg, l'évolution quantique  $G(t)$  d'un observable quantique  $G_0$  doit satisfaire

$$ih \frac{d}{dt} G(t) = [G(t), H], \quad G(0) = G_0, \quad (1.2)$$

Si l'on note pour  $L$  un opérateur dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\langle L \rangle_\varphi = \langle \varphi, L\varphi \rangle$ , où  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $(.,.)$  est le produit scalaire, on a alors au moins formellement:

$$\langle G(t) \rangle_{u_0} = \langle G_0 \rangle_{u(t)}.$$

Cela montre qu'il y a une équivalence entre (1.1) et (1.2). Mais il ne s'agit pas d'une équivalence mathématique. En fait la solution fondamentale de (1.1) peut être approchée par des opérateurs intégraux de Fourier sous certaines conditions de régularité (voir [1, 11]). Dans cet article on va montrer que la solution de (1.2) peut être approchée par des opérateurs pseudo-différentiels. Donc au niveau d'approximation semi-classique, (1.2) est plus facile à étudier.

Supposons que  $a(t)$ ,  $t \in ]-T, T[$ , soit une famille de symboles sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , qui vérifie les estimations

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, t)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x| + |\xi|)^{(2 - |\alpha| - |\beta|)_+}, \quad t \in ]-T, T[, \quad (1.3)$$

et  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, t)$  est continue en  $t \in ]-T, T[$ . On note par  $a^w(h^2x, h^2D, t)$  l'opérateur pseudo-différentiel associé par le formalisme de Weyl:

$$\begin{aligned} & (a^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t)f)(x) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \exp(i(x-y) \cdot \xi) a(h^{1/2}(x+y)/2, h^{1/2}\xi, t) f(y) dy d\xi, \quad f \in S(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où  $d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$  et  $h > 0$  est un petit paramètre. On notera aussi par  $\text{Op}_h^w b$  l'opérateur associé au symbole  $b$  par le formalisme (1.4). On va considérer l'approximation semi-classique de l'équation de Heisenberg:

$$ih \frac{\partial F_h(t, s)}{\partial t} = [F_h(t, s), A_h(t)], \quad F_h(s, s) = C^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D), \quad (1.5)$$

où l'on a noté  $A_h(t) = a^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t)$ . Dans le cas où  $C$  est un symbole de poids borné, ce problème a été considéré dans [12]. Pour  $C$  non borné, le problème de domaine se pose. Notre étude de (1.5) est basée sur la régularité de la solution de l'équation de Schrödinger (voir Wang [19]):

$$ih \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} = A_h(t)u(t, s), \quad u(s, s) = \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.6)$$

On montre que la solution de (1.5) admet un développement semi-classique en termes d'opérateurs  $h$ -pseudo-différentiels dont le premier terme est un opérateur de symbole  $C \circ \phi_s^t$  où  $\phi_s^t = (x(t, s), p(t, s))$  est la solution du système hamiltonien:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} &= \partial_p a(x(t, s), p(t, s), t) & x(s, s) &= y \\ \frac{\partial p(t, s)}{\partial t} &= -\partial_x a(x(t, s), p(t, s), t) & p(s, s) &= q, \quad (y, q) \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Ce résultat peut être considéré comme une version semi-classique du théorème d'Egorov [3]. Il décrit la liaison étroite entre évolution quantique et trajectoire classique et possède des applications intéressantes (voir par exemple [12, 13, 20]). En particulier, on va appliquer ce résultat à l'étude de la limite classique de fonctions de corrélations quantiques et retrouver les résultats de [19] obtenus par d'autres méthodes. Remarquons que depuis le travail élégant de Hepp [7], il y a de nombreux articles sur ce sujet (voir par exemple [5, 8, 14-16]). Mais les auteurs cités ci-dessus ont généralement considéré les opérateurs de type:

$$W_h(x_0, p_0) * U_h(t) \exp(-ih^{1/2}(r \cdot x + s \cdot D_x)) U_h(t) W_h(x_0, p_0),$$

où  $W_h(x_0, p_0)$  est l'opérateur de Weyl:

$$W_h(x_0, p_0) = \exp(ih^{-1/2}(p_0 \cdot x - x_0 \cdot D_x)).$$

Dans notre cas, on considère les opérateurs de type:

$$W_h(x_0, p_0) * U_h(t) B(h) U_h(t) W_h(x_0, p_0),$$

où  $B(h)$  est un opérateur pseudo-différentiel, généralement non borné dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Donc il s'applique au théorème d'Ehrenfest et permet d'obtenir une correspondance remarquable entre mécanique quantique et mécanique classique. Pour d'autres aspects concernant ce sujet, on renvoie à [19].

## 2. Existence de la solution de l'équation de Heisenberg

Soit  $a(\cdot, \cdot, t)$  une famille de symboles réels,  $t \in ]-T, T[$ . Supposons que pour tous  $\alpha, \beta$ ,  $\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x, p, t)$  soit continue en  $t \in ]-T, T[$ ,  $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$  et que

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x, p, t)| \leq C_{\alpha\beta} \quad t \in ]-T, T[, \quad (x, p) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (2.1)$$

pour  $|\alpha| + |\beta| \geq 2$ . Posons  $A_h(t) = a^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t)$ . Considérons l'équation de Heisenberg:

$$ih \frac{\partial}{\partial t} F_h(t, s) = [F_h(t, s), A_h(t)], \quad F_h(s, s) = b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D), \quad (2.2)$$

dans  $\mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n), S(\mathbb{R}^n))$ , où  $b$  est un symbole de poids tempéré. Rappelons le résultat suivant concernant la régularité de la solution de l'équation de Schrödinger:

$$ih \frac{\partial u_h(t, s)}{\partial t} = A_h(t)u_h(t, s), \quad u_h(s, s) = u_0 \in S(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

**Theoreme 2.1.** *Sous les conditions ci-dessus, la solution du problème (2.3) existe pour  $t, s \in ]-T, T[$  avec  $|t-s|$  assez petit. Si l'on note par  $U_h(t, s)$  l'application  $u_0 \rightarrow u_h(t, s)$ ,  $U_h(t, s)$  se prolonge en un propagateur unitaire dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Si l'on note par  $B^m(h)$  l'espace:*

$$B^m(h) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); (h^{1/2}x)^\alpha (h^{1/2}D_x)^\beta f \in L^2, |\alpha| + |\beta| \leq m\}$$

*muni de la norme naturelle notée  $\|\cdot\|_{m,h}$ ,  $U_h(t, s)$  est uniformément continu de  $B^m(h)$  dans  $B^m(h)$ :*

$$\|U_h(t, s)f\|_{m,h} \leq C_m \|f\|_{m,h}, \quad f \in B^m(h), \quad 0 < h \leq 1.$$

*En particulier  $U_h(t, s)$  est un isomorphisme topologique de  $S(\mathbb{R}^n)$  sur  $S(\mathbb{R}^n)$ .*

Pour la démonstration du Théorème 2.1, on renvoie à [19] (voir aussi Fujiwara [4] et Kitada et Kumano-go [10]).

D'après le Théorème 2.1,  $F_h(t, s) = U_h(s, t)b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D)U_h(t, s)$  est une application continue de  $S$  dans  $S$  et vérifie l'équation de Heisenberg (2.2).

**Proposition 2.2.** *Soit  $a(\cdot, \cdot, t)$  une famille de symboles vérifiant (2.1). Alors il existe  $T_1 > 0$  tel que pour  $t, s \in ]-T, T[$ ,  $|t-s| \leq T_1$ , le problème (2.2) admet une solution unique  $F_h(t, s) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n); S(\mathbb{R}^n))$ . De plus pour  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ,  $(t, s) \rightarrow F_h(t, s)\varphi$  est de classe  $C^1$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  par rapport à  $(t, s) \in ]-T, T[ \times ]-T, T[$ ,  $|t-s| \leq T_1$ .*

*Preuve.* On a déjà démontré l'existence de la solution. L'unicité de la solution pour (2.2) vient de la surjectivité de  $U_h(t, s)$  comme opérateur de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$ . C.Q.F.D.

Dans la suite on va donner un développement semi-classique de l'opérateur du type  $U_h(s, t)BU_h(t, s)$ , qui représente la solution de l'équation de Heisenberg.

### 3. Un theoreme du type Egorov

On commence par établir certaines estimations sur le flot hamiltonien classique.

*Definition 3.1.* On désigne par  $S^m(h)$  la classe des symboles admissibles  $b(h)$  vérifiant que pour tous  $\alpha, \beta$ , il existe une constante  $C_{\alpha\beta}$  telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x, p, h)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x| + |p|)^{m - |\alpha| - |\beta|}, \quad \forall h \in ]0, 1]. \quad (3.1)$$

On désigne par  $S_+^m(h)$  la classe des symboles  $b(h)$  vérifiant l'estimation:

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x, p, h)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x| + |p|)^{(m - |\alpha| - |\beta|)_+} \quad \forall h \in ]0, 1]. \quad (3.2)$$

Soit  $a(\cdot, \cdot, t)$ ,  $t \in ]-T, T[$ , une famille de symboles réels vérifiant:

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour tout } T_1, 0 < T_1 < T, \text{ pour tous } \alpha \text{ et } \beta, \text{ il existe une constante } C \\ \text{telle que} \\ |\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x, p, t)| \leq C(1 + |x| + |p|)^{2 - |\alpha| - |\beta|}, \quad |t| \leq T_1, (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Alors on sait que la solution du système hamiltonien associé à  $a(t)$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t}(t, s) = \partial_q a(y(t, s), q(t, s), t) \\ \frac{\partial q}{\partial t}(t, s) = -\partial_y a(y(t, s), q(t, s), t) \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

avec données initiales

$$y(s, s) = x, \quad q(s, s) = p \quad (3.5)$$

existe pour  $|t|, |s| \leq T_1$ . De plus, si on note par  $\phi_s^t$  le flot hamiltonien défini par (3.4) et (3.5):  $\phi_s^t = (y(t, s), q(t, s))$ , il existe  $\delta(T_1) > 0$  tel que pour  $|t - s| \leq \delta(T_1)$ , on a:

$$1 + |\phi_s^t(x, p)| \geq C_0(1 + |x| + |p|) \quad (3.6)$$

avec  $C_0 > 0$  indépendant de  $(x, p)$  et de  $t, s$  tels que  $|t - s| \leq \delta(T_1)$ .

**Lemme 3.1.** *Sous les conditions précédentes, soient  $(y(t, s), q(t, s))$  répondant au problème (3.4) et (3.5). Alors  $y(t, s)$  et  $q(t, s)$  sont  $C^\infty$  par rapport à  $(x, p)$  et  $C^1$  par rapport à  $t, s$ . De plus, on a:*

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta y(t, s)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x| + |p|)^{1 - |\alpha| - |\beta|}, \quad (3.7)$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta q(t, s)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x| + |p|)^{1 - |\alpha| - |\beta|} \quad (3.8)$$

pour tous  $\alpha, \beta$  et pour tous  $t, s$ ,  $|t - s| \leq \delta(T_1)$ .

La démonstration de ce lemme est élémentaire. On l'omet.

**Lemme 3.2.** *Soient  $t, s$ ,  $|t - s| \leq \delta(T_1)$ . Alors pour tout  $b(h) \in S^m(h)$ ,*

$$\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(\phi_s^t, h) \in S^{m - |\alpha| - |\beta|}(h) \quad \text{pour tous } \alpha, \beta. \quad (3.9)$$

De même, pour tout  $b(h) \in S_+^m(h)$ , on a:

$$\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(\phi_s^t, h) \in S_+^{(m - |\alpha| - |\beta|)_+}(h) \quad \text{pour tous } \alpha, \beta. \quad (3.10)$$

*Preuve.* Utilisant les notations du Lemme 3.1, notant  $u = (x, p)$ , on peut écrire:

$$\partial_u^\theta b(\phi_s^t, h) = \sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_j = \theta \\ \gamma_k \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}}} C_{\gamma_1 \dots \gamma_j} (\partial_u^j b)(\phi_s^t, h) \partial_u^{\gamma_1} \phi_s^t \dots \partial_u^{\gamma_j} \phi_s^t. \quad (3.11)$$

Donc si  $b(h) \in S^m(h)$ , on a:

$$\left. \begin{aligned} |\partial_u^\theta b(\phi_s^t, h)| &\leq C \sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{\gamma_1 + \dots + \gamma_j = \theta} (1 + |\phi_s^t|)^{m-j} (1 + |u|)^{j-|\theta|} \\ &\leq C'(1 + |u|)^{m-|\theta|} \quad \text{si } |t-s| \leq \delta(T_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

De même, pour  $b(h) \in S_+^m(h)$ , on a:

$$\left. \begin{aligned} |\partial_u^\alpha b(\phi_s^t, h)| &\leq \tilde{C} \sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{\gamma_1 + \dots + \gamma_j = \theta} (1 + |\phi_s^t|)^{(m-j)_+} (1 + |u|)^{j-|\theta|} \\ &\leq \tilde{C}'(1 + |u|)^{(m-|\theta|)_+} \quad \text{si } (t-s) \leq \delta(T_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

(3.9) et (3.10) découlent de (3.12) et (3.13). C.Q.F.D.

Considérons maintenant l'approximation semi-classique de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Heisenberg (2.2). On va donner un développement semi-classique pour  $F_h(t, s) = U_h(s, t) b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, h) U_h(t, s)$  où  $b(h) \in S^m(h)$ , ainsi obtenir un théorème du type Egorov (voir [3]).

**Theoreme 3.3.** *Sous les conditions ci-dessus, il existe  $\delta(T_1) > 0$  tel que pour tout  $b(h) \in S^m(h)$ ,  $F_h(t, s)$  admet un développement au sens suivant: pour tout entier  $N \geq 0$ , on peut écrire:*

$$F_h(t, s) = \sum_{j=0}^N h^j B_j(t, s; h) + h^{N+1} R_{N+1}(t, s; h) \quad \text{pour } |t-s| \leq \delta(T_1), \quad (3.14)$$

où  $B_j(t, s; h)$  est un opérateur pseudo-différentiel de symbole  $b^j(\cdot, \cdot, t, s; h) \in S^{m-j}(h)$ ,  $j=0, 1, \dots, N$ ,  $R_{N+1}(t, s; h)$  applique continûment de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$  et pour tout entier  $k \geq 0$ , il se prolonge en un opérateur continu de  $B^k(h)$  dans  $B^{k+N-m}(h)$  uniformément par rapport à  $h \in ]0, 1]$ ,  $|t-s| \leq \delta(T_1)$ . En particulier,  $b^0(t, s; h)$  est donné par:

$$b^0(x, p; t, s; h) = b(\phi_s^t(x, p), h), \quad (3.15)$$

où  $\phi_s^t$  est le flot associé à l'Hamiltonien  $a(x, p, t)$ , c'est à dire la solution du problème:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y(t, s) &= \partial_a a(y(t, s), q(t, s), t), & y(s, s) &= x, \\ \frac{\partial}{\partial t} q(t, s) &= -\partial_y a(y(t, s), q(t, s), t), & q(s, s) &= p. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

*Remarque.* Dans le cas où  $a(t)$  est indépendant de  $t$ , soit  $\phi_s^t$  résolvant le problème (3.16) avec  $s=0$ . Alors le Théorème 3.3 donne

$$U_h(t) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, h) U_h(t) = B_0(t, h) + h B_1(t, h) + h^2 B_2(t, h) + \dots,$$

où  $U_h(t)$  est le groupe unitaire associé à  $A_h = a^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$  et  $B_0(t, h)$  est un opérateur pseudo-différentiel de symbole  $b(\phi_0^t, h)$ . Voir Robert [12] pour le cas où  $b(h)$  est de classe  $S^0(h)$ .

Avant d'aborder la démonstration du Théorème 3.3, on prépare des lemmes. Soit  $\delta(T_1)$  donné dans le Lemme 3.2,  $|t - s| \leq \delta(T_1)$ . On définit l'opérateur  $B_h(r)$  par:

$$B_h(r)\varphi = U_h(s, r)\text{op}_h^w b(\phi_r^t, h)U_h(r, s)\varphi, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (3.17)$$

**Lemme 3.4.** *Pour tout  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_h(r)\varphi$  est continûment différentiable dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Et on a:*

$$\frac{d}{dr}B_h(r)\varphi = U_h(s, r)\left\{\frac{i}{h}[A_h(r), \text{op}_h^w b(\phi_r^t, h)](\text{op}_h^w \{a(r), b(\phi_r^t, h)\})\right\}U_h(r, s)\varphi. \quad (3.18)$$

*Preuve.* D'après le Théorème 2.1,  $B_h(r)\varphi$  est évidemment différentiable dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Comme:

$$\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s)\varphi = -ih^{-1}A_h(t)U_h(t, s)\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial s}U_h(t, s)\varphi = ih^{-1}U_h(t, s)A_h(s)\varphi$$

on obtient facilement:

$$\frac{d}{dr}B_h(r)\varphi = U_h(s, r)\left\{-\frac{i}{h}[A_h(r), (\text{op}_h^w b(\phi_r^t, h))] + \frac{\partial}{\partial r}(\text{op}_h^w b(\phi_r^t, h))\right\}U_h(r, s)\varphi, \quad (3.19)$$

$\phi_s^t$  étant la solution du problème (3.16), on a évidemment:

$$\frac{\partial}{\partial r}b(\phi_r^t, h) = -\{a(r), b(\phi_r^t, h)\},$$

où  $\{\cdot, \cdot\}$  est le crochet de Poisson. On peut vérifier:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(\text{op}_h^w b(\phi_r^t, h))\varphi &= \left(\text{op}_h^w \frac{\partial}{\partial r}b(\phi_r^t, h)\right)\varphi \\ &= -(\text{op}_h^w \{a(r), b(\phi_r^t, h)\})\varphi \quad \varphi \in \varphi(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (3.20)$$

(3.18) vient de (3.19) et (3.20). Q.C.F.D.

**Lemme 3.5.** *Posons:*

$$hR_1(h, r, t) = h^{-1}[A_h(r), (\text{op}_h^w b(\phi_r^t, h))] - \text{op}_h^w \{a(\cdot, \cdot, r), b(\phi_r^t, h)\}.$$

Alors  $R_1(h, r, t)$  admet comme symbole  $b_1(r, t; h) \in S^{m-2}(h)$ .

*Preuve.* Comme  $b(h) \in S^m(h)$ ,  $b(\phi_r^t, h) \in S^m(h)$  par le Lemme 3.2. D'après la formule de composition, le symbole de  $\frac{i}{h}[A_h(r), (\text{op}_h^w b(\phi_r^t, h))] - \text{op}_h^w \{a(r), b(\phi_r^t, h)\}$  s'écrit sous la forme:

$$h^2 \sum_{j \geq 3} \sum_{|\alpha| + |\beta| = j} C_{\alpha\beta} h^j \partial_x^\alpha D_p^\beta a(r) \partial_x^\beta D_p^\alpha b(\phi_r^t, h).$$

D'après le Lemme 3.2, chaque terme est dans la classe  $S^{m-2}(h)$ . En sommant asymptotiquement ce développement, on prouve que  $R_1(h, r, t)$  admet comme symbole  $b_1(r, t; h) \in S^{m-2}(h)$ . C.Q.F.D.

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer le Théorème 3.3.

*Preuve du théorème 3.3.* D'après le Lemme 3.4, on a pour  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} & U_h(s, t) \cdot b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, h)U_h(t, s)\varphi - (\text{op}_h^w b(\phi_s^t, h))\varphi \\ &= \int_s^t U_h(s, r) \left\{ \frac{i}{h} [A_h(r), \text{op}_h^w b(\phi_r^t, h)] - (\text{op}_h^w \{a(\cdot, \cdot, r), b(\phi_r^t, h)\}) \right\} U_h(r, s)\varphi dr \\ &= h^2 \int_s^t U_h(s, r) \text{op}_h^w b_1(r, t; h) U_h(r, s)\varphi dr. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Par le Lemme 3.5,  $b_1(r, t; h) \in S^{m-2}(h)$ , donc l'opérateur  $U_h(s, r)\text{op}_h^w b_1(r, t; h)U_h(r, s)$  est uniformément continu de  $B^{k+m-1}(h)$  dans  $B^k(h)$  pour tout entier  $k$ .

Appliquant (3.21) successivement  $N$  fois, on obtient:

$$\begin{aligned} & U_h(s, t)b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D, h)U_h(t, s)\varphi \\ &= \text{op}_h^w b(\phi_s^t, h)\varphi + h^2 \int_s^t (\text{op}_h^w b_1(r_1, t; h) \circ \phi_s^t) \varphi dr_1 \\ &+ \dots + h^{2N} \int_s^t \int_s^{r_1} \dots \int_s^{r_{N-1}} (\text{op}_h^w b_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N; h) \circ \phi_s^{tN}) \varphi dr_1 \dots dr_N \\ &+ h^{2N+2} \int_s^t \int_s^{R_1} \dots \int_s^{r_N} U_h(s, r_{N+1}) (\text{op}_h^w b_{N+1}(t, r_1, r_2, \dots, r_{N+1}; h)) \\ &\cdot U_h(r_{N+1}, s)\varphi dr_1 dr_2 \dots dr_{N+1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'où, il suffit de prendre:

$$\begin{aligned} b^0(\cdot, \cdot, t, s; h) &= b(\phi_s^t, h), \\ b^j(\cdot, \cdot, t, s; h) &= \int_s^{r_1} \int_s^{r_2} \dots \int_s^{r_{j-1}} b_j(t, r_1, r_2, \dots, r_{j-1}; h) \circ \phi_s^{tj} dr_1 dr_2 \dots dr_j. \end{aligned}$$

Par une récurrence, il est facile à montrer  $b^j(\cdot, \cdot, t, s; h) \in S^{m-2j}(h)$ . Et pour  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ,  $|t-s| \leq \delta(T_1)$ , on a:

$$\|R_{N+1}(t, s; h)\varphi\|_{k+N-m, h} \leq C\|\varphi\|_{k, h} \quad \text{pour } h \in ]0, 1], k \text{ entier}. \quad (3.23)$$

Donc  $R_{N+1}(t, s; h)$  se prolonge en une famille d'opérateurs uniformément continus de  $B^k(h)$  dans  $B^{k+2N-m}(h)$ . Cela finit les démonstration du Théorème 3.3. C.Q.F.D.

On a résultat analogue pour  $b(h) \subset S_+^m(h)$ .

**Theoreme 3.6.** *Sous les conditions du Théorème 3.3 pour  $a(t)$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $b(h) \in S_+^m(h)$  et pour tout entier  $N \geq 0$ , on a:*

$$F_h(t, s) = \sum_{j=0}^N h^j B_j(t, s; h) + h^{N+1} R_{N+1}(t, s; h), \quad |t-s| \leq \delta, \quad (3.24)$$

où  $B_j(t, s; h)$  admet comme symbole  $b^j(t, s; h) \in S_+^{(m-j)}(h)$  et  $R_{N+1}(t, s; h)$  se prolonge en une famille d'opérateurs continus de  $B^k(h)$  dans  $B^{k-(m-N)}(h)$  pour tout entier  $k$ . En particulier,  $b^0(t, s; h) = b(\phi_s^t, h)$ .

On omet la preuve du Théorème 3.6 qui suit la même ligne que celle du Théorème 3.3. Une conséquence du Théorème 3.6 est le résultat suivant qui est une version semi-classique du théorème d'Egorov [3].

**Théorème 3.7.** *Sous les conditions du Théorème 3.3 pour  $a(t)$ , posons:*

$$F_h(t, s) = U_h(s, t)b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D)U_h(t, s),$$

où  $b$  satisfait aux estimations:

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x, p)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |p|)^{m - |\alpha| - |\beta| +}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Alors il existe  $\delta > 0$  tel que l'on a:

$$F_h(t, s) = \sum_{j=0}^N h^j b_j^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D; t, s) + h^{N+1} R_{N+1}(t, s; h), \quad |t-s| \leq \delta, \quad (3.25)$$

où  $b_j(t, s)$  est un symbole vérifiant:

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b_j(x, p; t, s)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |p|)^{m-j - |\alpha| - |\beta| +}, \quad |t-s| \leq \delta$$

pour  $j=0, 1, 2, \dots$  et pour  $N \geq 0$  assez grand  $R_{N+1}(t, s; h)$  se prolonge en un opérateur uniformément borné dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . En particulier, on a

$$b_0(t, s) = b \circ \phi_s^t. \quad (3.26)$$

*Remarque.* Dans le cas où  $m=0$ , on peut obtenir (3.25) en remplaçant (3.3) par:

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x, p, t)| \leq C_{\alpha\beta}, \quad |\alpha| + |\beta| \geq 2 \quad (3.27)$$

voir Robert [12].

#### 4. Limite classique de fonctions de corrélation quantique

On montre dans cette section que les résultats obtenus dans [19] se déduisent facilement du théorème du type Egorov établi dans la Sect. 3. On se borne ici au cas où  $a(t)$  est indépendant de  $t$ . Pour hamiltoniens dépendant de  $t$ , on a aussi les résultats analogues à ceux de [19].

Soit  $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Posons  $W_h(x_0, p_0) = \exp(ih^{-1/2}(x \cdot p_0 - x_0 \cdot D))$ . Alors d'après Hörmander [9],  $W_h(x_0, p_0)$  est un opérateur pseudodifférentiel et on a:

$$\begin{aligned} & W_h(x_0, p_0) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) W_h(x_0, p_0) f \\ & = b^w(h^{1/2}x + x_0, h^{1/2}D + p_0) f, \quad f \in S(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $b$  est un symbole de poids tempéré quelconque.

**Lemme 4.1.** *Pour tout symbole de poids tempéré  $b$ , on a:*

$$\|(W_h(x_0, p_0) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) W_h(x_0, p_0) - b(x_0, p_0))f\| \leq C(f)h^{1/2}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n), \quad (4.2)$$

où  $C(f)$  est une constante dépendant de  $f$ .

*Preuve.* Il suffit d'utiliser (4.1) et de développer le symbole de  $b^w(h^{1/2}x + x_0, h^{1/2}D + p_0)$  autour de  $(x_0, p_0)$ . C.Q.F.D.

**Théorème 4.2.** *Supposons que le symbole  $b$  vérifie qu'il existe un entier  $N$  tel que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x, p)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |p|)^N \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Alors pour tout  $f \in B^N(1)$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} W_h(x_0, p_0) * U_h(t) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) U_h(t) W_h(x_0, p_0) f = b(x(t), p(t)) f \quad (4.3)$$



dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , où  $(x(t), p(t))$  est la trajectoire classique pour l'hamiltonien  $a$ , avec données initiales  $(x_0, p_0)$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \partial_p a(x(t), p(t)), & x(0) &= x_0, \\ \frac{dp(t)}{dt} &= -\partial_x a(x(t), p(t)), & p(0) &= p_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

En particulier si  $b$  est un symbole borné, on a:

$$s\text{-}\lim_{h \rightarrow 0_+} W_h(x_0, p_0) * U_h(t) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) U_h(t) W_h(x_0, p_0) = b(x(t), p(t)) \quad (4.5)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . La limite dans (4.3) et (4.5) est uniforme en  $t$  dans tout compact de  $\mathbb{R}$ .

*Preuve.* On note par  $\phi^t$  la solution de (4.4) avec données initiales  $(x, p)$ . Alors la démonstration du Théorème 3.3 donne

$$\|U_h(t) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) U_h(t) f - (b \circ \phi^t)^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) f\| \leq C_1 h, \quad f \in S(\mathbb{R}^n). \quad (4.6)$$

D'après le Lemme 4.1, on a

$$\|W_h(x_0, p_0) * (b \circ \phi^t)^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) W_h(x_0, p_0) f - b \circ \phi^t(x_0, p_0) f\| \leq C_2 h^{1/2}, \quad (4.7)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont dépendants de  $f$ , mais indépendant de  $t$  dans un compact fixe de  $\mathbb{R}$ . De (4.6) et (4.7), il vient

$$\begin{aligned} &\|W_h(x_0, p_0) * U_h(t) * b^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D) U_h(t) W_h(x_0, p_0) f \\ &\quad - b(x(t), p(t)) f\| \leq C h^{1/2}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Par un argument de densité, on obtient (4.3) C.Q.F.D.

**Corollaire 4.3.** *Sous les conditions du Théorème 4.2, on a pour tout  $f \in B^1$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} W_h(x_0, p_0) * U_h(t) * h^{1/2} x_j U_h(t) W_h(x_0, p_0) f = x_j(t) f,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} W_h(x_0, p_0) * U_h(t) * h^{1/2} D_j U_h(t) W_h(x_0, p_0) f = p_j(t) f, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , où  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$  est la solution de (4.4).

Appliquant le théorème d'Ehrenfest, on obtient:

**Corollaire 4.4.** *Supposons que  $a = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$  avec  $V$  satisfaisant*

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha, \quad \text{pour } |\alpha| \geq 2.$$

*Si l'on note pour un opérateur auto-adjoint  $L: \langle L \rangle_{\varphi_n(t)} = (U_h(t) W_h(x_0, p_0) \varphi, L U_h(t) W_h(x_0, p_0) \varphi)$ , on a alors pour tout  $\varphi \in B^1$ :*

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{d}{dt} (\langle h^{1/2} x_j \rangle_{\varphi_n(t)}) &= p_j(t) \|\varphi\|^2, \\ \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{d}{dt} (\langle h^{1/2} D_j \rangle_{\varphi_n(t)}) &= -\frac{\partial V(x(t))}{\partial x_j} \|\varphi\|^2. \end{aligned} \right\}$$

*La limite étant localement uniforme en  $t \in \mathbb{R}$ .*

Notons que si l'on s'intéresse seulement à établir (4.5), on peut lâcher le contrôle sur la croissance du symbole  $a$  (voir [19] et aussi [7, 15, 16]).

## Bibliographie

1. Albeverio, S., Arede, T.: The relation between quantum mechanics and classical mechanics. A survey of some mathematical aspects, to appear in Proc. Como. Conf., 1983, "Quantum Chaos", G. Casati (ed.), New York: Plenum
2. Chazarain, J.: Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique. Commun. Partial Differ. Equations **5** (6), 595–644 (1980)
3. Egorov, Yu.V.: On canonical transformation of pseudo-differential operators. Usp. Mat. Nauk. **25**, 235–236 (1969)
4. Fujiwara, D.: A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equations. J. Anal. Math. **35**, 41–96 (1979)
5. Hagedorn, G.A.: Semi-classical quantum mechanics, I, the  $\hbar \rightarrow 0$  limit for coherent states. Commun. Math. Phys. **71**, 77–93 (1980)
6. Helffer, B., Robert, D.: Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles. J. Funct. Anal. **53** (3), 246–268 (1983)
7. Hepp, K.: The classical limits for quantum mechanical correlation functions. Commun. Math. Phys. **35**, 265–277 (1974)
8. Hogreve, H., Potthoff, J., Schrader, R.: Classical limits for quantum particles in Yang-Mills potentials. Commun. Math. Phys. **91**, 573–598 (1983)
9. Hormander, L.: The Weyl calculus of pseudo-differential operators. Commun. Pure Appl. Math. **32**, 359–443 (1979)
10. Kitada, H., Kumano-go, H.: A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equations. Osaka J. Math. **18**, 291–360 (1981)
11. Maslov, V.P., Fedoriuk, M.V.: Semi-classical approximation in quantum mechanics. Dordrecht: Reidel 1981
12. Robert, D.: Autour de l'approximation semi-classique. Notas de Curso, n° 21, Recife, 1983
13. Robert, D., Tamura, H.: Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotic for scattering phase. Commun. Partial Differ. Equations **9** (10), 1017–1058 (1984)
14. Schrader, R., Taylor, M.: Small asymptotics for quantum partition functions associated to particles in external Yang-Mills potentials. Commun. Math. Phys. **92**, 555–594 (1984)
15. Simon, B.: The classical limit of quantum partition functions. Commun. Math. Phys. **71**, 247–276 (1980)
16. Sirgue, M., Sirgue-Collin, A., Truman, A.: Semi-classical approximation and microcanonical ensemble. Ann. Inst. H. Poincaré **41** (4), 429–444 (1984)
17. Wang, X.P.: Comportement semi-classique de traces partielles. C.R. Acad. Sci. Paris **299** (17), 867–870 (1984)
18. Wang, X.P.: Asymptotic behaviour of spectral means for pseudo-differential operators. J. Approximation Theory and its Applications **1**(2), 119–136 and **1**(3), 1–32 (1985)
19. Wang, X.P.: Etude semi-classique d'observables quantiques. Ann. Fac. Sci. (Toulouse), sér. 5, Vol. 7 (1985)
20. Wang, X.P.: Time-delay operators in semi-classical limit. Exposé Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Université Rennes 1985

Communicated by B. Simon

Reçu le 11 may 1985