Commun. Math. Phys. 73, 247–264 (1980)

Communications in Mathematical Physics



# Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger à Coefficients Analytiques

Halim Doss*

Laboratoire de Probabilités, F-75230 Paris Cedex 05, France

**Abstract.** Under some hypotheses of analyticity and integrability we show the existence and uniqueness of a strong regular solution of the Schrödinger equation using a natural generalisation to the complex case of the Feynman-Kac formula. This explicit representation allows us to study in certain cases the asymptotic behavior of the solution when the Planck constant $h$ tends to zero. The same method can be used for the solution of more general Schrödinger equations.

Considérons l'équation de Schrödinger:

$$\left.\begin{aligned} &ih\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)=-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi(t,x)+V(x)\Psi(t,x)\,;\,t\in[0,T],x\in 0 \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \\ &\qquad\Psi(0,x)=f(x)\,;\,h>0,m>0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Soit $\lambda$, une constante réelle strictement positive. Considérons aussi l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x)=\frac{\lambda^2}{2m}\Delta\Psi(t,x)+V(x)\Psi(t,x) \\ &\quad\Psi(0,x)=f(x)\,;\,(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\,. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Il est bien connu que, si les fonctions $f$ et $V$ sont suffisamment régulières, l'équation (1') possède une solution forte et une seule donnée par la formule de Feynman-Kac:

$$\Psi(t,x)=E\left\{f\left(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}B_t\right)\exp\left(\int_0^t\frac{V}{\lambda}\left(x+\sqrt{\frac{\lambda}{m}}B_s\right)ds\right)\right\}$$

où $(B_t)$ est le mouvement Brownien issu de zéro (cf. [12]).

Si, formellement, on remplace dans l'équation (1') la constante $\lambda$ par $i\cdot h$, on retrouve l'équation (1).

---

* Membre du Laboratoire Associé au C.N.R.S., n° 224 «Processus Stochastiques et Applications»

0010-3616/80/0073/0247/$03.60

Cette analogie est le point de départ de notre travail.

Lorsque les données $f$ et $V$ admettent respectivement un prolongement analytique dans un ouvert $D$ de $\mathbb{C}^n$ bien choisi et lorsque certaines conditions d'intégrabilité sont satisfaites, on montre simplement, grâce à une représentation probabiliste qui est la formule de Feynman-Kac étendue de manière naturelle au cas complexe, l'existence et l'unicité d'une solution forte $\Psi=(\Psi(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times 0}$ de l'équation (1), qui se prolonge en une fonction de classe $C^1$ sur $[0,T]\times D$, analytique en $x(x\in D)$. Des méthodes fondées sur une idée de prolongement analytique ont été développées par Caméron [5], Nelson [15] et d'autres auteurs.

Celle que nous présentons ici a l'avantage de la simplicité et s'applique dans des cas non recouverts par les études antérieures; de plus, à l'aide de la représentation explicite obtenue, nous montrons qu'il est possible d'examiner le comportement asymptotique de la solution de l'équation (1) en fonction de la constante de Planck $h\cdot(h\downarrow 0)$.

On démontre ensuite que la même méthode reste valable pour la résolution d'équations de Schrödinger plus générales.

## 1. Equation de Schrödinger

Soit $B=(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, issu de zéro, défini sur l'espace canonique $\Omega=C_{[0,T]}(\mathbb{R}^n)$, muni de la norme uniforme sur $[0,T]$.

Si $\omega\in\Omega$, on notera $\|\omega\|=\sup_{j=1,\dots,n}\cdot\sup_{t\in[0,T]}|\omega_j(t)|$ où $\omega_j(t)$ est la composante d'indice $j$ du vecteur $\omega(t)$.

On supposera dans la suite que la constante $m$ figurant dans l'équation (1) est égale à 1, ce qui ne diminue pas la généralité.

**Lemme 1.** *Soit $k$ une application mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, alors:*

$$E\{k(\|B\|)\}\leqq 2n\cdot\left(\frac{2}{\pi T}\right)^{1/2}\cdot\int_0^\infty k(u)\exp\left(-\frac{u^2}{2T}\right)du.$$

*Preuve.* Soit $A$ un borélien de $\mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned}P\{\|B\|\in A\}&\leqq nP\left\{\sup_{t\in[0,T]}|B_1(t)|\in A\right\}\\&\leqq 2nP\left\{\sup_{t\in[0,T]}B_1(t)\in A\right\}.\end{aligned}$$

Car les processus $B_1$ et $-B_1$ ont même loi.

Or on sait que les variables aléatoires $\sup_{t\in[0,T]}B_1(t)$ et $|B_1(T)|$ ont même loi, donc:

$$P\{\|B\|\in A\}\leqq 2n\cdot\left(\frac{2}{\pi T}\right)^{1/2}\int_A\exp\left(-\frac{u^2}{2T}\right)du.$$

**Lemme 2.** *Soit $\lambda\in\mathbb{C}^n$ et $W\subseteqq\mathbb{C}^n$ défini par: $W=\{(\lambda_1 y_1,\dots,\lambda_n y_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\}$. Soit $S$ un ouvert contenant $W$ et $p=(p(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}))$ une application holomorphe de $\mathbb{C}\times S$ dans $\mathbb{C}$.*

*Alors si $(A_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus à variation finie à valeurs dans $\mathbb{C}$, adapté à la filtration naturelle du mouvement Brownien, on a:*

$$p(A_t,\lambda B_t)=p(A_0,0)+\int_0^t \frac{\partial p}{\partial x_1}(A_s,\lambda B_s)dA_s$$
$$+\sum_{j=2}^{n+1}\left\{\lambda_{j-1}\int_0^t \frac{\partial p}{\partial x_j}(A_s,\lambda B_s)dB_{j-1}(s)+\frac{1}{2}\lambda_{j-1}^2\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\cdot p(A_s,\lambda B_s)ds\right\} \quad (2)$$

*où on a posé $\lambda B_t=(\lambda_1 B_1(t),\dots,\lambda_n B_n(t))$.*

*Preuve.* Supposons que $n=1$, la démonstration pour $n$ quelconque étant identique. Compte tenu de la formule d'Itô, on voit que l'égalité (2) est évidente car l'application qui à $y\in\mathbb{R}$ fait correspondre $\mu(y)=p(A_t,\lambda y)$ est de classe $C^\infty$ et

$$\mu'(y)=\lambda\frac{\partial p}{\partial x_2}(A_t,\lambda y),\qquad \mu''(y)=\lambda^2\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(A_t,\lambda y).$$

On notera $\sqrt{i}$ l'une des deux racines carrées du nombre complexe $i$.

Soit $D$ l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ défini par:

$$D=\{(x_1+\sqrt{i}\,y_1,x_2+\sqrt{i}\,y_2,\dots,x_n+\sqrt{i}\,y_n)\quad \text{où}$$
$$x=(x_1,\dots,x_n)\in 0\quad\text{et}\quad y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\}.$$

Supposons que les données $f$ et $V$ figurant dans l'équation (1) vérifient l'hypothèse d'analyticité suivante:

(I) Il existe deux applications holomorphes $\tilde{f}$ et $\tilde{V}$ de $D$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\tilde{f}_{|0}=f$ et $\tilde{V}_{|0}=V$.

Nous ne chercherons pas à caractériser les fonctions $f$ et $V$ qui vérifient l'hypothèse (I) mais celle-ci nous semble naturelle et nous permet de considérer une large classe de données initiales $f=(f(x))_{x\in 0}$ et de potentiels $V=(V(x))_{x\in 0}$ qui peuvent avoir des singularités à la frontière de l'ouvert 0. [Cf. l'exemple de la Proposition 4, la Remarque 5 et l'Appendice (I).] Soit $\mathscr{H}(D)$ l'ensemble des applications holomorphes de $D$ dans $\mathbb{C}$ et $L$ l'opérateur de $\mathscr{H}(D)$ dans $\mathscr{H}(D)$ défini par:

$$Lc(\alpha)=\frac{1}{2}ih\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_j^2}c(\alpha)+\frac{1}{ih}\tilde{V}(\alpha)\,c(\alpha)$$

si $c\in\mathscr{H}(D)$ et $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in D$.

Définissons les fonctionnelles $F$, $G$, $H_1$, $H_2$, $R_1$ et $R_2$ de $[0,T]\times D\times\Omega$ dans $\mathbb{C}$ par:

$$G(t,x,\omega)=\tilde{f}(x+\sqrt{ih}\,B_t(\omega)),$$

$$F(t,x,\omega)=\frac{1}{ih}\int_0^t \tilde{V}(x+\sqrt{ih}\,B_s(\omega))\,ds,$$

$$H_1(t,x,\omega)=G(t,x,\omega)\exp(F(t,x,\omega));\,R_1(t,x,\omega)=\operatorname*{Sup}_{s\leq t}|H_1(s,x,\omega)|,$$

$$H_2(t,x,\omega)=L\tilde{f}(x+\sqrt{ih}\,B_t(\omega))\exp(F(t,x,\omega));\,R_2(t,x,\omega)=\operatorname*{Sup}_{s\leq t}|H_2(s,x,\omega)|$$

si $(t,x,\omega)\in[0,T]\times D\times\Omega$.

Faisons de plus l'hypothèse suivante:

(II) Pour tout $(t,x)\in[0,T]\times D$ les variables aléatoires $R_1(t,x,\cdot)$ et $R_2(t,x,\cdot)$ sont intégrables et l'application qui à $x\in D$ fait correspondre $\Psi(t,x)=E(H_1(t,x))$ est holomorphe.

Remarquons que si pour tout $x\in D$, il existe une boule compacte $K$ contenant $x$ telle que

$$E\left(\operatorname*{Sup}_{z\in K}|H_1(t,z)|\right)<\infty$$

alors l'application qui à $x\in D$ fait correspondre $\Psi(t,x)$ est holomorphe. Pour le voir, il suffit d'appliquer les Théorèmes de Fubini et de Morera.

En utilisant le Lemme 1, il n'est pas difficile de trouver des conditions de croissance portant sur les prolongements $\tilde{f}$ et $\tilde{V}$ pour que l'hypothèse (II) soit vérifiée [cf. l'Appendice (I)].

**Théorème 3.** *Sous les hypothèses* (I) *et* (II), *il existe une solution forte unique* $\Psi=(\Psi(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times 0}$ *de l'équation* (1) *qui vérifie la condition suivante:*

$\Psi=(\Psi(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times 0}$ *se prolonge en une fonction de classe* $C^1$ *sur* $[0,T]\times D$, *analytique en* $x$ $(x\in D)$.

*On a, de plus, la représentation suivante:*

$$\Psi(t,x)=E\left\{\tilde{f}(x+\sqrt{ih}\,B_t)\exp\left(\frac{1}{ih}\int_0^t\tilde{V}(x+\sqrt{ih}\,B_s)\,ds\right)\right\} \tag{3}$$

*si* $(t,x)\in[0,T]\times D$.

*Preuve.* Soit $x\in D$ et $y\in\mathbb{C}$, considérons le processus de diffusion $X_t^{(x,y)}=(X_{1,t}^x,X_{2,t}^{(x,y)})$ à valeurs dans $D\times\mathbb{C}$ défini par

$$\left.\begin{aligned} X_{1,t}^x &=x+\sqrt{ih}\,B_t\\ X_{2,t}^{(x,y)}&=y+\frac{1}{ih}\int_0^t\tilde{V}(x+\sqrt{ih}\,B_s)\,ds\,.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pour toute application mesurable $r$ de $D\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $r(X_{1,t}^x,X_{2,t}^{(x,y)})$ soit intégrable, on considère aussi

$$\pi_t r(x,y)=E\{r(X_{1,t}^x,X_{2,t}^{(x,y)})\}\,.$$

On définit ainsi un semi-groupe, c'est à dire que:

$$\pi_{t+s}r(x,y)=\pi_t[\pi_s r](x,y),\qquad t,s\in\mathbb{R}_+\,. \tag{5}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} &r(\alpha,\beta)=\tilde{f}(\alpha)\exp(\beta)\,;\ (\alpha,\beta)\in D\times\mathbb{C}\quad\text{et}\\ &\chi_t(x,y)=\pi_t r(x,y)=E\left\{\tilde{f}(x+\sqrt{ih}\,B_t)\exp\left(\frac{1}{ih}\int_0^t\tilde{V}(x+\sqrt{ih}\,B_s)\,ds\right)\right\}\exp(y)\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

D'après l'hypothèse (II) $\chi_t(x,y)$ est bien défini et l'application qui à $(x.\,y)\in D\times\mathbb{C}$ fait correspondre $\chi_t(x,y)$ est holomorphe. De plus, en appliquant le Lemme 2 au produit $\tilde{f}(X_{1,t}^x)\exp(X_{2,t}^{(x,y)})$ on voit que l'application qui à $t\in\mathbb{R}_+$ fait correspondre

$\chi_t(x, y)$ est de classe $C^1$. Soit $\mathscr{H}(D\times\mathbb{C})$ l'ensemble des applications holomorphes de $D\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $\tilde{L}$ l'opérateur de $\mathscr{H}(D\times\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}(D\times\mathbb{C})$ défini par:

$$\tilde{L}r(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}ih\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_j^2}r(\alpha,\beta)+\frac{1}{ih}\tilde{V}(\alpha)\cdot\frac{\partial r}{\partial\beta}(\alpha,\beta) \tag{7}$$

si $r\in\mathscr{H}(D\times\mathbb{C})$, $(\alpha,\beta)\in D\times\mathbb{C}$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Soit $r=(r(\alpha,\beta))$ et $\chi=(\chi_t(x,y))$ les applications définies par la formule (6).

On voit aisément, grâce au Lemme 2, que si $u\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}\pi_{T-u}r(X_{1,u}^x,X_{2,u}^{(x,y)})&=\pi_T r(x,y)+M_u\\&\quad+\int_0^u\tilde{L}\pi_{T-s}r(X_{1,s}^x,X_{2,s}^{(x,y)})\,ds-\int_0^u\frac{\partial}{\partial t}\pi_{T-s}r(X_{1,s}^x,X_{2,s}^{(x,y)})\,ds\end{aligned} \tag{8}$$

où $(M_u)_{u\in[0,T]}$ est une martingale locale continue.

En utilisant la propriété de Markov du processus de diffusion $(X_{1,t}^x,X_{2,t}^{(x,y)})_{t\geqq 0}$ on remarque que le terme de gauche dans l'égalité (8) est une martingale continue, en effet

$$\pi_{T-u}r(X_{1,u}^x,X_{2,u}^{(x,y)})=E\{r(X_{1,T}^x,X_{2,T}^{(x,y)})/\mathscr{F}_u\}$$

où $\mathscr{F}_u$ est la tribu engendrée par les v.a. $(X_{1,s}^x,X_{2,s}^{(x,y)})$, $0\leqq s\leqq u$.

La partie à variation finie figurant dans le terme de droite de l'égalité (8) est donc constante et, pour tout $s\in[0,T]$, on a:

$$\tilde{L}\pi_{T-s}r(X_{1,s}^x,X_{2,s}^{(x,y)})=\frac{\partial}{\partial t}\pi_{T-s}r(X_{1,s}^x,X_{2,s}^{(x,y)}).$$

En particulier, pour $s=0$:

$$\tilde{L}\pi_t r(x,y)=\frac{\partial}{\partial t}\pi_t r(x,y) \tag{9}$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_t(x,y)=\frac{1}{2}ih\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\chi_t(x,y)+\frac{1}{ih}\tilde{V}(x)\frac{\partial}{\partial y}\chi_t(x,y)\,; \tag{9'}$$

or d'après la définition de $\chi_t(x,y)$ [cf. (6)] on voit que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\chi_t(x,y)=\chi_t(x,y). \tag{10}$$

En posant:

$$\Psi_t(x)=\chi_t(x,y)\exp(-y)=E\left\{\tilde{f}(x+\sqrt{ih}\,B_t)\exp\left(\frac{1}{ih}\int_0^t\tilde{V}(x+\sqrt{ih}\,B_s)\,ds\right)\right\}$$

on voit, d'après (9′) et (10), qu'on a ainsi obtenu une solution de l'équation de Schrödinger (1).

Montrons l'unicité d'une telle solution, vérifiant la condition de prolongement analytique énoncée dans le Théorème 2; notons la $(\tilde{\Psi}_t(x))_{(t,x)\in[0,T]\times D}$.

Posons $\tilde{\chi}_t(x,y)=\tilde{\Psi}_t(x)\exp(y)\,(x,y)\in D\times\mathbb{C}$.
On remarque que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\chi}_t(x,y)=\tilde{L}\tilde{\chi}_t(x,y). \tag{11}$$

En appliquant à nouveau le Lemme 2 on obtient, grâce à (11):

$$\tilde{\chi}_{T-u}(X^x_{1,u},X^{(x,y)}_{2,u})=\tilde{\chi}_T(x,y)+N_u \qquad u\in[0,T] \tag{12}$$

où $(N_u)$ est une martingale locale continue nulle en 0.
En particulier pour $u=T$ on voit que:

$$\tilde{f}(X^x_{1,T})\exp(X^{(x,y)}_{2,T})=\tilde{\chi}_T(x,y)+N_T. \tag{13}$$

Or d'après (13) et l'hypothèse d'intégrabilité (II), la martingale locale $(N_u)_{u\in[0,T]}$ est en fait une martingale, donc $E(N_T)=0$ et

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_t(x,y)&=E[\tilde{f}(X^x_{1,t})\exp(X^{(x,y)}_{2,t})]\\&=\Psi_t(x)\exp(y)\quad \text{pour tout}\quad t\in[0,T]\end{aligned}$$

donc $\tilde{\Psi}_t(x)=\Psi_t(x)$. C.Q.F.D.

*Un Exemple.* Soient $\ell\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et $c\in\mathbb{R}$ fixés.
Soit 0 l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $0=\{x=(x_1,\dots,x_n)$ tels que

$$\langle\ell,x\rangle+c\neq 0\}; \quad \text{on a posé} \quad \langle\ell,x\rangle=\sum_{j=1}^n \ell_j x_j.$$

Pour tout $x_0\in 0$ et tout $\alpha>0$, soit

$$I_{x_0}(\alpha)=\{(z_1+\sqrt{i}\,y_1,\dots,z_n+\sqrt{i}\,y_n) \quad \text{où} \quad z=(z_1,\dots,z_n)\in 0, |z-x_0|<\alpha$$

et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n\}$ alors $D=\bigcup_{\substack{x_0\in 0\\ \alpha>0}} I_{x_0}(\alpha)$.

Considérons une application $f$ holomorphe de $D$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition suivante:

Pour tout $x_0\in 0$, il existe $\alpha>0$ et deux constantes $K_{1,x_0}$, $K_{2,x_0}$ telles que

$$hK_{2,x_0}<\frac{1}{2T} \quad \text{et pour tout} \quad x\in I_{x_0}(\alpha): \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)\right| \leq K_{1,x_0}\exp(K_{2,x_0}|x|^2). \tag{14}$$

Soit $\mathbf{J}$ la demi-droite du plan complexe définie par: $\mathbf{J}=i\mathbb{R}_+$.

**Proposition 4.** *Pour tout $r>0$ et tout $k\in\mathbb{R}$, il existe une solution forte unique $\Psi=(\Psi(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times 0}$ qui se prolonge en une fonction de classe $C^1$ sur $[0,T]\times D$, analytique en $x$, $(x\in D)$, de l'équation de Schrödinger:*

$$\begin{aligned}&ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x)=-\frac{h^2}{2}\Delta\Psi(t,x)+\frac{k}{|\langle\ell,x\rangle+c|^r}\Psi(t,x)\\&\Psi(0,x)=f(x) \qquad (t,x)\in[0,T]\times 0.\end{aligned} \tag{15}$$

*Cette solution est donnée par la formule*

$$\Psi(t,x)=E\left\{f(x+\sqrt{ih}\,B_t)\exp\left(\frac{k}{ih}\int_0^t ds\exp\left(-\frac{r}{2}\operatorname{Log}[(\langle\ell,x\rangle+c+\sqrt{ih}\langle\ell,B_s\rangle)^2]\right)\right)\right\} \tag{16}$$

*où* $(t,x)\in[0,T]\times D$ *et où* Log *designe la détermination principale du Logarithme prolongée sur* $\mathbb{C}-\mathbf{J}$.

*Preuve.* Soit $x\in D: x=(z_1+\sqrt{i}\,y_1,\dots,z_n+\sqrt{i}\,y_n)$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in 0$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Posons $X=\langle\ell,z\rangle+c$ et $Y=\langle\ell,y\rangle$. On remarque, par un calcul élémentaire, que $|X+\sqrt{i}\,Y|^2\geqq\frac{X^2}{2}>0$ pour tout $Y$.

On vérifie de plus que $\{(X+\sqrt{i}\,Y)^2, X\neq 0, Y\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}-\mathbf{J}$.

Donc $|\exp(-r/2\operatorname{Log}[(\langle\ell,x\rangle+c+\sqrt{ih}\langle\ell,B_t\rangle)^2])|\leqq\exp(-r/2\operatorname{Log}(X^2/2))$, $X\neq 0$.

Compte tenu de la condition (14), on vérifie facilement, à l'aide du Lemme 1, que les hypothèses (I) et (II) du Théorème 3 sont vérifiées.

*Remarque 5.* On résoud de la même façon l'équation de Schrödinger lorsque le potentiel $V$ est de la forme

$$\frac{k}{(\langle\ell,x\rangle+c)^r},\quad (\langle\ell,x\rangle+c\neq 0, r\in\mathbb{N}),$$

$$\frac{k}{(\sin(\langle\ell,x\rangle+c))^r},\qquad (r\in\mathbb{N}\text{ et }\langle\ell,x\rangle+c\neq p\pi\text{ pour tout }p\in\mathbb{Z}),$$

ou $k\cdot(\operatorname{tg}(\langle\ell,x\rangle+c))^r$, $(r\in\mathbb{N}$ et $\langle\ell,x\rangle+c\neq\pi/2+p\pi$ pour tout $p\in\mathbb{Z})$ etc. ....

Lorsque $V$ est un polynôme:

$$V(x)=a_0+a_1x+\dots+a_dx^d\qquad(x\in\mathbb{R}^n)$$

où $a_m(0\leqq m\leqq d)$ est une application multilinéaire symétrique de $(C^n)^m$ dans $\mathbb{C}$ telle que $a_m((\mathbb{R}^n)^m)\subseteq\mathbb{R}$, on vérifie aisément que $\operatorname{Im}(V(x+\sqrt{i}\,y))$ $(x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^n)$ vérifie la condition 2 de l'Appendice (I) si $d^0V=1$ ou bien si $d^0V=d=2+4p$ $(p\in\mathbb{N})$ et

$$\left.\begin{array}{lll}(-1)^p a_d x^d<0 & \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^n & \text{quand } p\geqq 1\\ a_2x^2<\dfrac{1}{4T^2}|x|^2 & \text{quand } p=0 & \end{array}\right\}\left(|x|=\sup_{j=1,\dots,n}|x_j|\text{ si }x\in\mathbb{C}^n\right)$$

## 2. Etude de Cas Particuliers

Nous allons montrer sur deux exemples que la représentation stochastique de la solution de l'équation de Schrödinger permet d'établir un développement asymptotique de cette solution en fonction de la constante de Planck $h$, quand $h\downarrow 0$.

Un grand nombre d'études ont été faites sur ce sujet (méthodes «W.K.B.», cf. [14] et [2] entre autres) mais cette approche probabiliste ne semble pas avoir été utilisée.

Soit $\Omega_0^t$ ($t \in \mathbb{R}_+$) l'ensemble des applications continues $\omega$ de $[0,t]$ dans $\mathbb{R}^n$, nulles en zéro et qui admettent une dérivée $\dot{\omega}$ au sens de Lebesgue de carré intégrable sur $[0,t]$.

Soit $V$ une application continue d'un ouvert $D$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{R}^n \subseteqq D$ et que $V(\mathbb{R}^n) \subseteqq R$. Pour tout couple $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ on définit:

$$b_V(t,x) = \operatorname*{Sup}_{\omega \in \Omega^t{}_0} \left\{ \int_0^t V(\omega_s + x)\,ds - \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{\omega}_s|^2\,ds \right\}. \tag{17}$$

On se restreindra dans ce qui suit aux applications $V$ de la forme:

$$\left.\begin{aligned} V_1(x) &= \alpha x + \beta = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \beta \\ V_2(x) &= -\frac{1}{2} k^2 \cdot (x+\gamma)^2 + \delta = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j^2 (x_j + \gamma_j)^2 + \delta \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où $x \in D$, $\alpha$ et $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\beta$ et $\delta \in \mathbb{R}$, le vecteur $k^2 = (k_j^2)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition suivante: soit ($k_j \in \mathbb{R}$) soit

$$\left( k_j \in i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad T \cdot |k_j| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Pour établir les résultats qui suivent avec des potentiels $V$ plus généraux, il faut, semble-$t$-il, utiliser une étude de Schilder [16], menée dans le cas réel, concernant le comportement asymptotique d'intégrales de Wiener. Nous supposerons, sans nuire à la généralité, que dans la formule (18) $\gamma = 0$; $\beta = \delta = 0$.

**Lemme 6.** *La borne supérieure $b_{V_j}(t,x)$ est atteinte pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ en un point ${}^j\omega_0^{(t,x)} \in \Omega_0^t$ unique ($j = 1,2$).*

*On a les formules explicites suivantes:*

$$\left.\begin{aligned} {}^1\omega_{0,\ell}^{(t,x)}(s) &= \alpha_\ell \left( st - \frac{s^2}{2} \right) \\ {}^2\omega_{0,\ell}^{(t,x)}(s) &= x_\ell \left[ \frac{\operatorname{Ch}(k_\ell(s-t))}{\operatorname{Ch}(k_\ell t)} - 1 \right], \qquad s \in [0,t], \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

*où ${}^j\omega_{0,\ell}^{(t,x)}(s)$ est la composante d'indice $\ell \in \{1,\ldots,n\}$ du vecteur ${}^j\omega_0^{(t,x)}(s) \in \mathbb{R}^n$*

$$\left.\begin{aligned} b_{V_1}(t,x) &= \sum_{\ell=1}^n \left( \alpha_\ell^2 \frac{t^3}{6} + \alpha_\ell x_\ell t \right) \\ b_{V_2}(t,x) &= -\sum_{\ell=1}^n \left( k_\ell \frac{x_\ell^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{Sh}(2k_\ell t)}{\operatorname{Ch}^2(k_\ell t)} \right). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

*Preuve.* L'existence de ${}^j\omega_0^{(t,x)}$, ($j = 1,2$), est facile à établir, cf. [6]. Pour déterminer ${}^j\omega_0$ on utilise la propriété suivante: Pour tout

$$u \in \Omega_0^t : \int_0^t \operatorname{grad} V_j({}^j\omega_0(s) + x) \cdot U_s\,ds = \int_0^t {}^j\dot{\omega}_0(s) \cdot \dot{U}_s\,ds.$$

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et tout $f\in\mathscr{P}$ notons $(\Psi^f_{h,j}(t,x))$ la solution de l'équation de Schrödinger:

$$\left.\begin{aligned} &ih\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Psi^f_{h,j}(t,x)=-\frac{h^2}{2}\Delta\Psi^f_{h,j}(t,x)+V_j(x)\Psi^f_{h,j}(t,x)\\ &\Psi^f_{h,j}(0,x)=f(x),(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{C}^n;\quad (j=1,2).\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

On vérifie, d'après le Théorème 3, que $(\Psi^f_{h,j}(t,x))$ existe.

**Théorème 7.** *On a les propriétés suivantes:*

1) $\Psi^f_{h,j}(t,x)=\exp\left(\dfrac{b_{V_j}(t,x)}{ih}\right)Q^f_j(t,x)[\sqrt{ih}]\qquad (j=1,2)$

*où $Q^f_j(t,x)\,[\sqrt{ih}]$ est un polynôme en $\sqrt{ih}$ qu'on peut déterminer explicitement.*

2) $\dfrac{\Psi^f_{h,j}(t,x)}{\Psi^1_{h,j}(t,x)}\xrightarrow[h\downarrow 0]{} f({}^j\omega^{(t,x)}_0(t)+x)\quad (j=1,2)\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$

*Preuve.* Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ la démonstration du Théorème 3 montre qu'il existe une solution unique $(\Psi^f_{(\lambda),j}(t,x))$ de l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\Psi^f_{(\lambda),j}(t,x)=\frac{\lambda^2}{2}\Delta\Psi^f_{(\lambda),j}(t,x)+\frac{1}{\lambda^2}V_j(x)\Psi^f_{(\lambda),j}(t,x)\\ &\Psi^f_{(\lambda),j}(0,x)=f(x),(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{C}^n\quad (j=1,2)\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

et

$$\Psi^f_{(\lambda),j}(t,x)=E\left\{f(x+\lambda B_t)\exp\left(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t V_j(x+\lambda B_s)\,ds\right)\right\}.$$

Commençons par calculer $(\Psi^1_{(\lambda),j}(t,x))$, $(j=1,2)$.

Pour ceci on utilise le Lemme suivant:

**Lemme 8.** *Supposons que $(B_t)$ soit un mouvement Brownien réel, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$; $x,r,\alpha\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$ ou $\left(k\in i\mathbb{R}\text{ et } T|k|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, alors:*

$$\begin{aligned}&E\left\{\exp\left(rB_t+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t\alpha(x+\lambda B_s)\,ds\right)\right\}\\ &\quad=\exp\left[\frac{\alpha x t}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(r^2t+\frac{\alpha^2t^3}{3\lambda^2}+\frac{r\alpha t^2}{\lambda}\right)\right]\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&E\left\{\exp\left(rB_t-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\lambda^2}\cdot\int_0^t(\lambda B_s+x)^2\,ds\right)\right\}\\ &\quad=\sqrt{\frac{2}{1+e^{2kt}}}\cdot\exp\left[\frac{k}{2}\left(t+\left(\frac{r}{k}-\frac{x}{\lambda}\right)^2-2\frac{(x/\lambda\cdot e^{kt}-r/k)^2}{1+e^{2kt}}\right)\right]\end{aligned}\tag{24}$$

*si $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$.*

*Preuve.* La formule (23) est facile à établir, en effet:

$$rB_t + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \alpha B_s\, ds$$

est une v.a. Gaussienne.

Pour démontrer la formule (24) on utilise une technique de calcul qu'on peut trouver dans un article de Williams [18] et qui est une application du Théorème de Girsanov: supposons $\lambda$ et $k$ réels, et $k^2 T < \frac{1}{2T}$, alors

$$E\left\{\exp\left(rB_t - \frac{1}{2}\frac{k^2}{\lambda^2}\int_0^t (\lambda B_s + x)^2\, ds\right)\right\}$$

$$= E\left\{\exp\left(rB_t - \int_0^t \left(\frac{k}{\lambda}\right)(\lambda B_s + x)\, dB_s\right)\exp\left(\int_0^t \left(\frac{k}{\lambda}\right)(\lambda B_s + x)\, dB_s - \frac{1}{2}\frac{k^2}{\lambda^2}\int_0^t (\lambda B_s + x)^2\, ds\right)\right\}$$

$$= E_Q\left\{\exp\left[rB_t - \frac{kx}{\lambda} B_t - k\left(\frac{B_t^2 - t}{2}\right)\right]\right\}$$

où $Q$ est une nouvelle probabilité pour laquelle le processus:

$$\beta_t = B_t - \int_0^t \left(\frac{k}{\lambda}\right)(\lambda B_s + x)\, ds, \tag{25}$$

est un mouvement Brownien, d'après le critère d'uniforme intégrabilité des martingales exponentielles de Novikov

$$\text{car } E\left\{\exp\left(\frac{1}{2}\frac{k^2}{\lambda^2}\int_0^t (\lambda B_s + x)^2\, ds\right)\right\} < \infty \qquad \text{(cf. Lemme 1).}$$

De cette dernière équation on déduit que le processus $(B_t)$ est, pour la probabilité $Q$, un processus Gaussien dont il suffit de calculer la moyenne et la variance:

Posons $m_t = E_Q(B_t)$ et $\sigma_t = E_Q(B_t^2)$.

D'après (25), on voit que $(m_t)$ est solution de l'équation

$$m_t - k\int_0^t m_s\, ds = \frac{kxt}{\lambda}. \tag{26}$$

D'autre part, d'après la formule d'Itô:

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\left(kB_s + \frac{kx}{\lambda}\right) ds + t + M_t$$

où $(M_t)$ est une martingale continue nulle en zéro.

On en déduit que:

$$\sigma_t = t + 2k\int_0^t \sigma_s\, ds + \frac{2kx}{\lambda}\int_0^t m_s\, ds. \tag{27}$$

Les Éqs. (26) et (27) sont faciles à résoudre et on termine par un calcul standard et grâce à un prolongement analytique la démonstration de la formule (24). C.Q.F.D.

On déduit du Lemme 8, avec $r=0$, que

$$\Psi^1_{(\lambda),1}(t,x)=E\left\{\exp\left(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t \alpha(x+\lambda B_s)ds\right)\right\}=\exp\left(\frac{\alpha x t}{\lambda^2}+\frac{1}{6}\frac{|\alpha|^2 t^3}{\lambda^2}\right)$$

$$\Psi^1_{(\lambda),2}(t,x)=E\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\lambda^2}\cdot\int_0^t(\lambda B_s+x)^2\,ds\right)\right\},$$

$$=\prod_{\ell=1}^n\sqrt{\frac{2}{1+\exp(2k_\ell t)}}\cdot\exp\left[\frac{k_\ell}{2}\left(t+\left(\frac{x_\ell}{\lambda}\right)^2-2\left(\frac{x_\ell}{\lambda}\right)^2\frac{e^{2k_\ell t}}{1+e^{2k_\ell t}}\right)\right]$$

et donc, grâce à une vérification simple, on voit que:

$$\left.\begin{aligned}&\Psi^1_{(\lambda),1}(t,x)=\exp\left(\frac{b_{V_1}(t,x)}{\lambda^2}\right)\\&\Psi^1_{(\lambda),2}(t,x)=\prod_{\ell=1}^n\sqrt{\frac{2}{1+\exp(2k_\ell t)}}\cdot\exp\left(\frac{k_\ell t}{2}\right)\cdot\exp\left(\frac{b_{V_2}(t,x)}{\lambda^2}\right),\\&\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Pour démontrer le Théorème 7, posons $\lambda=\sqrt{ih}$.

Il suffit évidemment de supposer que $f$ est un monôme du type $\mathscr{a}(x,\ldots,x)=\mathscr{a}\cdot x^m$ où $\mathscr{a}$ est une application multilinéaire de $(\mathbb{C}^n)^m$ dans $\mathbb{C}$.

Pour la propriété 1) du Théorème 7, on se ramène à montrer, grâce à (28), que

$$\frac{\lambda^m E\left\{B_1^{m_1}(t)\ldots B_n^{m_n}(t)\exp\left(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t V_j(x+\lambda B_s)\,ds\right)\right\}}{\Psi^1_{(\lambda),j}(t,x)}.$$

est un polynôme en $\lambda(m_i\in\mathbb{N},\ \sum m_i=m,\ j=1,2)$.

Ensuite, grâce à l'indépendance des composantes du mouvement Brownien, on voit qu'il suffit de montrer que si $(B_t)$ est un mouvement Brownien réel, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $x,k,\alpha\in\mathbb{R}$

$$I_1(\lambda)=\frac{\lambda^m E\left\{B_t^m\exp\left(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t\alpha(\lambda B_s+x)\,ds\right)\right\}}{E\left\{\exp\left(\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t\alpha(\lambda B_s+x)\,ds\right)\right\}}$$

et

$$I_2(\lambda)=\frac{\lambda^m E\left\{B_t^m\exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda^2}\int_0^t(\lambda B_s+x)^2\,ds\right)\right\}}{E\left\{\exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda^2}\int_0^t(\lambda B_s+x)^2\,ds\right)\right\}}$$

sont des polynômes en $\lambda$.

Or ceci se voit aisément grâce au calcul explicite du Lemme 8: il suffit de développer en puissances de $r$ les quotients:

$$A=\frac{E\left\{\exp\left(rB_t+\frac{1}{\lambda^2}\cdot\int_0^t\alpha(\lambda B_s+x)\,ds\right)\right\}}{E\left\{\exp\left(\frac{1}{\lambda^2}\cdot\int_0^t\alpha(\lambda B_s+x)\,ds\right)\right\}}$$

et

$$\tilde{A}=\frac{E\left\{\exp\left(rB_t-\frac{k^2}{2\lambda^2}\cdot\int_0^t(\lambda B_s+x)^2\,ds\right)\right\}}{E\left\{\exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda^2}\cdot\int_0^t(\lambda B_s+x)^2\,ds\right)\right\}}$$

et d'identifier les coefficients de $r^m$ ($m\in\mathbb{N}$).

Faisons par exemple le calcul pour l'expression $\tilde{A}$, le calcul pour $A$ étant analogue:

$$\tilde{A}=\exp\left\{\frac{k}{2}\left[\left(\frac{r}{k}-\frac{x}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2-\frac{2}{1+e^{2kt}}\left(\left(\frac{x}{\lambda}e^{kt}-\frac{r}{k}\right)^2-\left(\frac{x}{\lambda}e^{kt}\right)^2\right)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{r\frac{x}{\lambda}\left(\frac{2e^{kt}-1-e^{2kt}}{1+e^{2kt}}\right)+\frac{1}{2}r^2\frac{1}{k}\left(\frac{e^{2kt}-1}{e^{2kt}+1}\right)\right\},$$

$$=E\left\{\exp\left[r\left(\frac{x}{\lambda}\left(\frac{2e^{kt}-1-e^{2kt}}{1+e^{2kt}}\right)+\sqrt{\frac{e^{2kt}-1}{k(e^{2kt}-1)}}\,B_1\right)\right]\right\}.$$

On en déduit que:

$$I_2(\lambda)=E\left\{\left(x\frac{(2e^{kt}-1-e^{2kt})}{1+e^{2kt}}+\lambda\sqrt{\frac{e^{2kt}-1}{k(e^{2kt}-1)}}\,B_1\right)^m\right\}.$$

D'après la démonstration précédente, le quotient

$$C_j(\lambda)=\frac{\Psi^f_{(\lambda),j}(t,x)}{\Psi^1_{(\lambda),j}(t,x)}\quad\text{est un polynôme en }\lambda(\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\})\qquad(j=1,2).$$

De plus, Schilder [16] a démontré que si $B=(B_t)_{t\in[0,T]}$ est le mouvement Brownien considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans $\Omega=C_{[0,T]}(\mathbb{R}^n)$, si $F$ et $G$ sont deux fonctionnelles définies sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant certaines conditions de régularité peu restrictives et si $\omega_0\in\Omega_0^T$ est le point où la fonctionnelle

$$Y(\omega)=F(\omega)-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{\omega}_s|^2\,ds,$$

définie sur $\Omega_0^T$, atteint son maximum propre (on suppose qu'il existe), alors:

$$\lim_{\substack{\lambda\downarrow 0\\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}}\frac{E\{G(\lambda B)\exp(\lambda^{-2}F(\lambda B))\}}{E\{\exp(\lambda^{-2}F(\lambda B))\}}=G(\omega_0).$$

En prenant $G(\lambda B)=f(x+\lambda B_t)$ et $F(\lambda B)=\int_0^t V_j(x+\lambda B_s)\,ds$, on vérifie que le polynôme $C_j(\lambda)$ converge, quand $\lambda$ tend vers zéro, vers

$$f({}^j\omega_0^{(t,x)}(t)+x) \qquad (j=1,2).$$

La preuve de la propriété 2) du Théorème 7 est donc terminée.

*Remarque* 9. On s'est limité, pour ne pas alourdir les calculs, à la classe des applications $f$ qui sont polynômiales mais on voit facilement que le Théorème 7 reste valable si on considère des fonctions analytiques $f$ dont le développement en série entière converge suffisamment rapidement, l'expression $Q_j^f(t,x)[\sqrt{ih}]$ figurant dans l'énoncé de la propriété 1) du Théorème 7 représente alors une série entière en $\sqrt{ih}$ ($|h|$ étant assez petit).

Par exemple, si $f(x)=\sum_{m\geqq 0} \mathscr{a}_m\cdot x^m$, il suffit qu'il existe une constante $c>0$ telle que $\sum_{m\geqq 0} \|\mathscr{a}_m\|\, c^m\left(\frac{(2m)!}{m!}\right)^{1/2}<\infty$.

## 3. Une Généralisation

Nous allons, pour simplifier, considérer l'équation de Schrödinger à une dimension, la démarche à suivre en dimension $n$ ($n>1$) étant identique.

Soient $\sigma$ et $b$ deux applications holomorphes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et soit $(X_t^x)$ la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$X_t^x=x+\int_0^t \sigma(X_s^x)\,dB_s+\int_0^t b(X_s^x)\,ds,\ 0\leqq t<T^x\,(x\in\mathbb{C}) \tag{29}$$

où $(B_t)_{t\geqq 0}$ est le mouvement Brownien issu de zéro et $T^x$ le temps d'explosion du processus de diffusion $(X_t^x)$.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, soit $(H(\alpha,\beta))_{\beta\in I_\alpha}$, $I_\alpha$ intervalle de $\mathbb{R}$, la solution maximale de l'équation différentielle:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial\beta}(\alpha,\beta)=\sigma(H(\alpha,\beta)), \qquad \beta\in I_\alpha \\ &H(\alpha,0)=\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Remarquons que l'équation (29) s'identifie à une équation stochastique réelle à deux dimensions, le nombre complexe $\sigma(x)$ ($x\in\mathbb{C}$) devenant une matrice dégénérée à deux lignes et une colonne.

Pour cette raison, il est légitime de considérer des ouverts $G$ du plan complexe vérifiant les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ x\in G\Rightarrow T^x=+\infty \text{ ps. et } X_t^x\in G \text{ pour tout } t\in\mathbb{R}_+ \\ &2)\ \alpha\in G\Rightarrow I_\alpha=\mathbb{R} \text{ et } H(\alpha,\beta)\in G \text{ pour tout } \beta\in\mathbb{R}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

L'Appendice (II) donne un critère pour que les conditions (31) soient vérifiées.

**Lemme 10.** *Soit $\Phi: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $(A_t)_{t \geq 0}$, un processus à variation finie sur tout compact à valeurs dans $\mathbb{C}$, adapté à la filtration du mouvement Brownien, alors, si $0 \leq t < T^x$, on a:*

$$\Phi(A_t, X_t^x) = \Phi(A_0, x) + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(A_s, X_s^x)\, dA_s + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(A_s, X_s^x)\, \sigma(X_s^x)\, dB_s$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(A_s, X_s^x)\, b(X_s^x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}(A_s, X_s^x)\, \sigma^2(X_s^x)\right] ds.$$

*Preuve.* Elle est immédiate, compte tenu de la formule d'Itô ordinaire et des hypothèses (décomposer en parties réelles et imaginaires).

Soit $H$ la fonction définie par les relations (30) et $x \in G$ où $G$ est un ouvert vérifiant les conditions (31).

Posons $D_t^x = H(X_t^x, -B_t)$ $(0 \leq t < \infty)$.

On peut voir, de la même façon qu'en [7] que le processus $(D_t^x)_{t \geq 0}$ ainsi défini est p.s. dérivable en $t$ et qu'il est solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} D_t^x = \frac{\partial H}{\partial \alpha}(H(D_t^x, B_t), -B_t)\left\{-\frac{1}{2}\sigma'\sigma(H(D_t^x, B_t)) + b(H(D_t^x, B_t))\right\} \\ &D_0^x = x. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

De plus les propriétés de $H$ montrent que:

$$X_t^x = H(D_t^x, B_t) \tag{33}$$

On déduit de la représentation (33) que, p.s., l'application qui à $x \in G$ fait correspondre $X_t^x(\omega)$ est holomorphe.

Soit $\mathscr{H}(G)$ l'ensemble des applications holomorphes de $G$ dans $\mathbb{C}$ et $V \in \mathscr{H}(G)$.

On désigne par $\mathscr{L}$ l'opérateur de $\mathscr{H}(G)$ dans $\mathscr{H}(G)$ défini par:

$$\mathscr{L} c(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha)\frac{d^2 c}{d\alpha^2}(\alpha) + b(\alpha)\frac{dc}{d\alpha}(\alpha) + V(\alpha)\, c(\alpha) \quad \text{si} \quad c \in \mathscr{H}(G).$$

Soit $0 < T < \infty$ et $f \in \mathscr{H}(G)$. On définit les fonctionnelles $I_1$, $I_2$, $S_1$ et $S_2$ de $[0, T] \times G \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ par:

$$I_1(t, x, \omega) = f(X_t^x(\omega)) \exp\left(\int_0^t V(X_s^x(\omega))\, ds\right)$$

$$I_2(t, x, \omega) = \mathscr{L} f(X_t^x(\omega)) \exp\left(\int_0^t V(X_s^x(\omega))\, ds\right)$$

$$S_1(t, x, \omega) = \sup_{0 \leq s \leq t} |I_1(s, x, \omega)|$$

$$S_2(t, x, \omega) = \sup_{0 \leq s \leq t} |I_2(s, x, \omega)|, \quad \text{si} \quad (t, x, \omega) \in [0, T] \times G \times \Omega.$$

On dira que $f$ vérifie l'hypothèse (III) si:

(III) Pour tout $(t,x)\in[0,T]\times G$, les variables aléatoires $S_1(t,x,\cdot)$ et $S_2(t,x,\cdot)$ sont intégrables et l'application qui à $x\in G$ fait correspondre $\chi(t,x)=E(I_1(t,x))$ est holomorphe. Remarquons, de la même façon que précédemment [cf. l'hypothèse (II)], et grâce à la représentation (33) que si pour tout $x\in G$ il existe une boule compacte $K$ contenant $x$ telle que $E\left(\operatorname{Sup}_{z\in K}|I_1(t,x)|\right)<\infty$ alors l'application qui à $x\in G$ fait correspondre $\chi(t,x)$ est holomorphe. $V\in\mathscr{H}(G)$ étant donné, on notera $\mathscr{R}_V(G)$ l'ensemble des éléments $f$ de $\mathscr{H}(G)$ vérifiant l'hypothèse (III).

**Théorème 12.** *Soit $V\in\mathscr{H}(G)$ et $f\in\mathscr{R}_V(G)$.*

*Considérons l'équation:*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,x)=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi(t,x)+b(x)\frac{\partial}{\partial x}\chi(t,x)+V(x)\,\chi(t,x)\\&\chi(0,x)=f(x),\ (t,x)\in[0,T]\times G.\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

*Il existe une solution forte et une seule $(\chi(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times G}$ de l'équation* (34), *qui vérifie la condition suivante: $(\chi(t,x))_{(t,x)\in[0,T]\times G}$ est de classe $C^1$ sur $[0,T]\times G$ et analytique en $x$ ($x\in G$). On a, de plus, la représentation suivante:*

$$\chi(t,x)=E\left\{f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t V(X_s^x)\,ds\right)\right\},\ (t,x)\in[0,T]\times G.\tag{35}$$

*Preuve.* La démonstration du Théorème 12 suit pas à pas celle du Théorème 3. Il suffit de considérer, pour tout $x\in G$ et $y\in\mathbb{C}$ le processus de diffusion $Y_t^{(x,y)}=(Y_{1,t}^x,Y_{2,t}^{(x,y)})$ à valeurs dans $G\times\mathbb{C}$ défini par:

$$\left.\begin{aligned}&Y_{1,t}^x=X_t^x\\&Y_{2,t}^{(x,y)}=y+\int_0^t V(X_s^x)\,ds.\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

*Exemple.* Considérons l'équation:

$$\left.\begin{aligned}&ih\cdot\frac{\partial\chi}{\partial t}(t,x)=-\frac{1}{2}(h+p\sqrt{i}\,x)^2\cdot\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}(t,x)+(cx+d)\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x}(t,x)+V(x)\,\chi(t,x)\\&\chi(0,x)=f(x),\ (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

où $h>0$, $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$; $c,d\in\mathbb{C}$;

$f$ et $V$ sont deux fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Le processus de diffusion $(X_t^x)_{t\geqq 0}$ associé à l'équation (37) est solution de:

$$X_t^x=x+\int_0^t\left(\sqrt{ih}+\frac{pi}{\sqrt{h}}X_s^x\right)dB_s-i\int_0^t\left(\frac{c}{h}X_s^x+\frac{d}{h}\right)ds.$$

En appliquant la formule (33) on trouve que:

$$\begin{aligned}X_t^x=&\exp\left(\frac{ip}{\sqrt{h}}\cdot B_t+\left(\frac{1}{2}p^2-ic\right)\frac{t}{h}\right)\\&\cdot\left\{\left(x+\frac{h}{p\sqrt{i}}\right)-i\left(\frac{d}{h}-\frac{c}{p\sqrt{i}}\right)\int_0^t\exp\left(-\frac{ip}{\sqrt{h}}B_s-\left(\frac{1}{2}p^2-ic\right)\frac{s}{h}\right)ds\right\}.\end{aligned}\tag{38}$$

On déduit de l'égalité (38) que le module de $X_t^x(\omega)$ est majoré par une fonction continue en $(t,x)$, $M(x,t)$, qui ne dépend pas de l'élément $\omega$ variant dans l'espace de probabilité de base. Le potentiel $V$ étant une fonction holomorphe quelconque, toute donnée initiale, $f$, holomorphe vérifie l'hypothèse (III) et on peut appliquer le Théorème (12): l'équation (37) possède une solution forte $(\chi(t,x))_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}}$ et une seule, analytique en $x$, donnée par:

$$\chi(t,x)=E\left\{f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t V(X_s^x)\,ds\right)\right\}.$$

Remarquons que si, dans l'équation (37), on fait tendre $p$ vers zéro et si $c=d=0$ on retrouve l'équation de Schrödinger habituelle.

## Appendice (I)

Soit $c>\sqrt{h}$, on définit une mesure $\mu_c$ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$ par: $\mu_c(dx)=\exp\left(-\dfrac{x^2}{2c^2T}\right)dx$.

Pour tout $x_0\in 0$ et tout $\alpha>0$ soit

$$I_{x_0}(\alpha)=\{(z_1+\sqrt{i}\,y_1,\ldots,z_n+\sqrt{i}\,y_n)\quad \text{où}\quad z=(z_1,\ldots,z_n)\in 0, |z-x_0|<\alpha \quad \text{et}\quad y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n\}.$$

**Proposition.** *L'hypothèse* (II) *est vérifié si pour tout* $x_0\in 0$, *il existe* $\alpha>0$ *et deux applications mesurables croissantes* $\phi_{x_0}$ *et* $\tilde{\phi}_{x_0}$ *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions suivantes*

1) $\phi_{x_0}(\cdot)\exp\left(\dfrac{T}{h}\tilde{\phi}_{x_0}(\cdot)\right)\in L^1(\mathbb{R}_+,\mu_c(dx))$ *pour au moins un* $c>\sqrt{h}$.

2) *Pour tout* $x\in I_{x_0}(\alpha)$:

$$(1+|\tilde{V}(x)|)\,|\tilde{f}(x)|+\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\tilde{f}(x)\right|\leqq\phi_{x_0}(|x|)$$

*et* $\operatorname{Im}\tilde{V}(x)\leqq\tilde{\phi}_{x_0}(|x|)$.

*Preuve.* On voit que $\bigcup_{\substack{x_0\in 0\\ \alpha>0}} I_{x_0}(\alpha)=D$.

Soit $x\in D$, alors il existe $x_0\in 0$, $\alpha>0$ et une boule compacte $K$ tels que $x\in K$ et $K\subseteqq I_{x_0}(\alpha)$. On vérifie que:

$$\begin{aligned}
&E\left\{\sup_{z\in K}[R_1(t,z,\cdot)+R_2(t,z,\cdot)]\right\}\\
&\leqq LE\left\{\sup_{z\in K}\phi_{x_0}(|z|+\sqrt{h}\cdot\|B\|)\exp\left(\frac{T}{h}\tilde{\phi}_{x_0}(|z|+\sqrt{h}\|B\|)\right)\right\}\\
&\leqq L\int_0^\infty \phi_{x_0}(m+\sqrt{h}u)\exp\left(\frac{T}{h}\tilde{\phi}_{x_0}(m+\sqrt{h}u)\right)\exp\left(-\frac{u^2}{2T}\right)du\ \text{(d'après le Lemme 1)}\\
&\leqq M+L\int_p^\infty \phi_{x_0}(cu)\exp\left(\frac{T}{h}\tilde{\phi}_{x_0}(cu)\right)\exp\left(-\frac{u^2}{2T}\right)du<\infty
\end{aligned}$$

où

$$L=\left(h+\frac{1}{h}\right)\left(1+2n\cdot\left(\frac{2}{\pi T}\right)^{1/2}\right),\ m=\operatorname*{Sup}_{z\in K}|z|$$

$$p=\frac{m}{c-\sqrt{h}}\quad \text{et}\quad M=L\cdot\int_0^p \phi_{x_0}(m+\sqrt{h}u)\exp\left(\frac{T}{h}\tilde{\phi}_{x_0}(m+\sqrt{h}u)\right)\exp\left(-\frac{u^2}{2T}\right)du.$$

Grâce à la remarque qui suit l'énoncé de l'hypothèse (II), on voit que la preuve est terminée.

## Appendice (II)

**Proposition.** *Soit $\gamma$ une application de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $G$ un ouvert borné de $\mathbb{C}$, $\partial G$ le bord de $G$ et soit $M(t)$ (resp. $N(t)$) le point d'affixe $\gamma(t)$ (resp. $\gamma(t)+b(\gamma(t)) - \frac{1}{2}\sigma'\cdot\sigma(\gamma(t))$).*

*Si $\partial G=\{\gamma(t), t\in\mathbb{R}\}$ et si pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a:*

*1) $\dot\gamma(t)\neq 0$ et $\operatorname{Arg}\sigma(\gamma(t))=\operatorname{Arg}(\dot\gamma(t))\operatorname{mod}(\pi)$, $\dot\gamma$ étant la dérivée de $\gamma$;*

*2) le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est dirigé vers l'intérieur de $G$ ou bien est tangent à $\gamma$, alors les conditions* (31) *sont vérifiées.*

*Preuve.* Soit $C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $C^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ nulles en zéro. Si $x\in G$ et $u\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ nous désignerons par $\phi_u^x$ la solution maximale de l'équation différentielle:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\phi_u^x(t)=\sigma(\phi_u^x(t))\cdot\dot u(t)+b(\phi_u^x(t))-\dfrac{1}{2}\sigma'\cdot\sigma(\phi_u^x(t))\\[2mm] \phi_u^x(0)=x.\end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que les hypothèses 1) et 2) de la Proposition entrainent que $\phi_u^x$ est en fait définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ $\phi_u^x(t)\in G$ et que la condition (31) 2) est vérifiée.

Posons $S_x=\{\phi_u^x, u\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\}$.

Grâce au fait que l'ouvert $G$ est borné et en utilisant un théorème établi en [17] décrivant le support de la loi d'un processus de diffusion on peut montrer que si, $x\in G$, le processus $(X_t^x)$, solution de l'équation différentielle stochastique (29), est bien défini pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ : en notant $\operatorname{Supp}P_x$ le support topologique de la loi de $(X_t^x)$ dans l'espace $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, on a: $\operatorname{Supp}P^x=\bar S_x$ où $\bar S_x$ désigne l'adhérence de $S_x$.

La représentation (33) entraine alors que $X_t^x\in G$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.

*Remerciements.* Je tiens à remercier Messieurs P. Priouret et M. Yor qui m'ont aidé à éclaircir certains points de ce travail.

## Bibliographie

1. Albeverio, S.A., Høegh-Krohn, R.J.: Mathematical theory of Feynman path integrals. Lecture notes in mathematics **523**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976
2. Albeverio, S.A., Høegh-Krohn, R.J.: Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics. I. Inventiones Maths. **106**, 40–49 (1977)

3. de Broglie, L.: Recherches d'un demi-siècle. Paris: Editions Albin Michel 1976
4. Caméron, R.H.: A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals. J. Math. Phys. **39**, 126–141 (1961)
5. Caméron, R.H.: The Ilstow and Feynman integrals. J. d'Anal. Math. **10**, 187–361 (1962–63)
6. Doss, H.: Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques. Ann. Inst. Henri Poincaré (à paraître)
7. Doss, H.: Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. Ann. Inst. Henri Poincaré **XIII**, Section B, 99–125 (1977)
8. Feynman, R.P., Hibbs, A.R.: Quantum mechanics and path integrals. New York: MacGraw Hill 1968
9. Gelfand, I.M., Yaglom, A.M.: Integration in functional spaces and it's applications in quantum physics. J. Math. Phys. **1**, 48–69 (1960)
10. Itô, K.: Wiener integrals and Feynman integral. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. and Prob. Vol. 2, pp. 227–238. Berkeley: Univ. California Press 1961
11. Itô, K.: Generalized uniform complex measures in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman path integral. Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. Vol. 11, pp. 145–161. Berkeley: Univ. California Press 1967
12. Kac, M.: Probability and related topics in physical sciences. New York: Interscience 1959
13. Kunita, H.: Diffusion processes and control systems. Cours de $3^{\text{ème}}$Cycle, Second semestre 1974. Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Paris VI (1974)
14. Maslov, V.P.: Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Paris: Dunod 1972
15. Nelson, E.: Feynman integrals and the Schrödinger equation. J. Math. Phys. **5**, 332–343 (1964)
16. Schilder, M.: Some asymptotic formulas for Wiener integrals. Trans. Am. Math. Soc. **125**, 63–85 (1966)
17. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. $6L^h$ Berkeley Symposium, Vol. III, 1972
18. Williams, D.: On a stopped Brownian motion formula of H.M. Taylor. Séminaire de Probabilité X. Lectures notes in mathematics **511**, pp. 235–239. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976

Transmis par J. Ginibre

Reçu le 19 novembre 1979