ÜBER DIE LAGE DER NULLSTELLEN EINES ABSTANDS-POLYNOMS UND SEINER DERIVIERTEN

GYULA V. SZ. NAGY

1. **Der Begriff eines Abstandspolynoms.** *Ein Abstandspolynom $F(x, y, z)$ n-ten Grades* in dem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z ist ein reelles Polynom der drei Veränderlichen von der Form

$$
\begin{aligned}
&F(x, y, z) = C\prod_{k=1}^{n} d_k(x, y, z), \\
&d_k(x, y, z) = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2, \qquad C > 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ ist also eine nichtnegative reelle Funktion von der Form

$$F(x, y, z) = C(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}) + \Phi(x, y, z), \tag{2}$$

wo Φ ein reelles Polynom ist, das für die drei Veränderlichen bzw. für die einzelnen Veränderlichen höchstens den Grad $2n-1$ bzw. $2n-2$ besitzt.

Das Abstandspolynom $F(z, y, z)$ besitzt n Nullstellen, und zwar die Punkte

$$Q_k = (x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{3}$$

Ausser den Nullstellen nimmt das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ in jedem (reellen) Punkte des Raumes einen positiven Wert an.

Das Polynom $d_k(x, y, z) = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2$ ist ein Abstandspolynom ersten Grades und ist ein *Wurzelfaktor* des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades. F ist also ein Produkt von n Wurzelfaktoren. Kommt der Wurzelfaktor d_k unter den n Wurzelfaktoren p-mal vor ($p \geqq 1$), so ist Q_k eine p-fache Nullstelle von F. Dann ist

$$F(x, y, z) = d_k^p(x, y, z) \cdot G(x, y, z), \tag{4}$$

wo $G(x, y, z)$ ein Abstandspolynom $(n-p)$-ten Grades ist, für welches die Ungleichung $G(x_k, y_k, z_k) \neq 0$ besteht.

Jedes Abstandspolynom $f(x, y, z) = d_k(x, y, z)$ ersten Grades genügt offenbar der Identät

$$f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = 4 \cdot f. \tag{5}$$

Hat eine ganze rationale Funktion $2n$-ten Grades von der Form (2)

Received by the editors March 1, 1948.

einen Faktor zweiten Grades, so hat dieser Faktor leicht ersichtlich die Form $f(x, y, z) = c(x^2+y^2+z^2+a_1x+a_2y+a_3z+a_4)$, $c\neq 0$. Das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ n-ten Grades ist eine Verallgemeinerung eines Polynoms $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z.

Sind nämlich

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \\
z &= x + iy,\ z_k = x_k + iy_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n), \\
f(x + iy) &= U(x, y) + iV(x, y), \\
\bar{f}(x - iy) &= U(x, y) - iV(x, y),
\end{aligned} \tag{6}
$$

so ist

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= U^2(x, y) + V^2(x, y) = |f(z)|^2 \\
&= \prod_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = \prod [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]
\end{aligned} \tag{7}
$$

ein Abstandspolynom n-ten Grades in der x, y Koordinatenebene.

Ein Abstandspolynom $F(x, y, z)$ geht durch eine orthogonale Transformation der Veränderlichen x, y, z offenbar wieder in ein Abstandspolynom über. Daraus folgt, dass ein Abstandspolynom, dessen Nullstellen in einer Ebene liegen, durch eine lineare Transformation sich auf die Form

$$
F(x, y, z) = C\prod_{k=1}^{n} [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + z^2] \tag{8}
$$

bringen lässt.

2. **Die Derivierte eines Abstandspolynoms.** Ist $F(x, y, z)$ ein Abstandspolynom n-ten Grades, so ist das Polynom $(4n-2)$-ten Grades

$$
H(x, y, z) = F_x^2(x, y, z) + F_y^2(x, y, z) + F_z^2(x, y, z)
$$

durch $4\cdot F(x, y, z)$ teilbar, sodass die Funktion

$$
\begin{aligned}
F'(x, y, z) &= \frac{H(x, y, z)}{4F(x, y, z)} \\
&= \frac{F_x^2(x, y, z) + F_y^2(x, y, z) + F_z^2(x, y, z)}{4\cdot F(x, y, z)}
\end{aligned} \tag{9}
$$

ein Polynom $2(n-1)$-ten Grades von den Veränderlichen x, y, z ist.

Diese Funktion $F'(x, y, z)$ wird *als Derivierte des Abstandspolynoms* $F(x, y, z)$ genannt.

Ist

$$F(x, y, z) = f^p(x, y, z) \cdot G(x, y, z),$$
$$f(x, y, z) = d_k(x, y, z), \qquad p \geqq 1, \qquad G(x_k, y_k, z_k) \neq 0$$

so ist

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = p^2 f^{2p-2} G^2 (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) \\ &\quad + 2pf^{2p-1}(f_x G_x + f_y G_y + f_z G_z) + f^{2p}(G_x^2 + G_y^2 + G_z^2) \\ &= f^{2p-1}[4p^2 G^2 + 2pG(f_x G_x + f_y G_y + f_z G_z) \\ &\quad + f(G_x^2 + G_y^2 + G_z^2)]. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass H durch die $(2p-1)$-te Potenz des Wurzelfaktors $f = d_k$ teilbar ist, durch eine höhere Potenz von f aber nicht, weil die zwischen den eckigen Klammerzeichen stehende Funktion im Punkte $Q_k = (x_k, y_k, z_k)$ den Wert $4p^2G^2(x_k, y_k, z_k) \neq 0$ annimmt.

Hieraus folgt, dass H durch jeden Wurzelfaktor von F und deshalb auch durch F teilbar ist und dass eine p-fache Nullstelle Q_k des Abstandspolynoms F eine $2p-1-p=(p-1)$-fache Nullstelle der Derivierten ist, weil F' durch die $(p-1)$-te Potenz von d_k teilbar ist.

Nach der Regel der logarithmischen Differentiation ist

$$\frac{F_x}{F} = \frac{\partial}{\partial x} \log F = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{n} \log d_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} \cdot \frac{\partial d_k}{\partial x} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{d_k} \cdot$$

Es gelten also für die Nullstellen (x, y, z) der Derivierten $F'(x, y, z)$, die von den Nullstellen des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ abweichen, die Gleichungen

$$\begin{gathered} \frac{F_x}{2 \cdot F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{d_k} = 0, \qquad \frac{F_y}{2 \cdot F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y - y_k}{d_k} = 0, \\ \frac{F_z}{2 \cdot F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{d_k} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Auf Grund der Bezeichnungen (6) und (7) ist

$$F'(x, y) = \frac{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y)}{4 \cdot F(x, y)} = |f'(z)|^2, \tag{11}$$

weil

$$F_x = 2(UU_x + VV_x), \qquad F_y = 2(UU_y + VV_y),$$

$$f'(z) = U_x + iV_x = V_y - iU_y, \qquad U_x = V_y, \qquad U_y = -V_x$$

und deshalb

$$F_x^2 + F_y^2 = 4[(UU_x + VV_x)^2 + (UU_y + VV_y)^2]$$
$$= 4(U^2 + V^2)(U_x^2 + V_x^2) = 4 \cdot F(x, y) \cdot F'(x, y)$$

sind.

Die Derivierte des Abstandspolynoms $F(x, y)$ ist also wieder ein Abstandspolynom der Veränderlichen x, y, falls $n > 1$ ist.

Sind $z_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, so erhält man für die von den Nullstellen des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ abweichenden Nullstellen der Derivierten $F'(x, y, z)$ aus (10) die Gleichungen

$$z = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} = 0.$$

Die Nullstellen der Derivierten $F'(x, y, z)$ stimmen also im Falle $z_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ mit den Nullstellen der Funktion $F'(x, y)$ von (11) überein. Ist

$$f'(z) = n(z - z_1')(z - z_2') \cdots (z - z_{n-1}'),$$
$$z = x + iy, \qquad z_h' = x_h' + iy_h' \qquad (h = 1, 2, \cdots, n - 1)$$

so ist

$$F'(x, y) = n^2 \prod_{h=1}^{n-1} [(x - x_h')^2 + (y - y_h')^2] = F_1(x, y, 0)$$

und deshalb ist auch die Derivierte

$$F'(x, y, z) = n^2 \prod_{h=1}^{n-1} [(x - x_h')^2 + (y - y_h')^2 + z^2] = F_1(x, y, z)$$

ein Abstandspolynom.

Naheliegend ist die Vermutung, das die Derivierte jedes Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades $(n \geqq 2)$ stets ein Abstandspolynom ist.

3. Der Gauss-Lucas-sche Satz über Abstandspolynome.

I. *Die (reellen) Nullstellen der Derivierten eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ fallen in die konvexe Hülle der Nullstellen von $F(x, y, z)$. Die Randfläche dieser konvexen Hülle kann nur dann eine Nullstelle*

P_0 der Derivierten enthalten, wenn P_0 mit einer Nullstelle von $F(x, y, z)$ zusammenfällt.

Bedeutet nämlich $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ eine Nullstelle der Derivierten des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$, für welche $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ gilt und sind

$$m_k = \frac{1}{(x_0 - x_k)^2 + (y_0 - y_k)^2 + (z_0 - z_k)^2}, \qquad M = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

so lassen sich die Gleichungen (10) in der Form

$$\text{(12)} \quad \sum_{k=1}^{n} m_k(x_0 - x_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k(y_0 - y_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k(z_0 - z_k) = 0$$

oder

$$Mx_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \qquad My_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \qquad Mz_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k$$

schreiben.

Daraus folgt der Satz, weil P_0 der Schwerpunkt der Punkte Q_k von den Massen m_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ ist.

Aus den Gleichungen (12) folgt auch die folgende Form des Satzes I.

II. *Jede Nullstelle $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ der Derivierten des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ für welche $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ gilt, ist eine Gleichgewichtslage eines materiellen Punktes P des Raumes, auf welchen die Nullstellen Q_k von $F(x, y, z)$ dem Abstand umgekehrt proportionale abstossende Kräfte ausüben.*

Bei geeignet gewähltem Masssystem sind nämlich die linken Seiten der Gleichungen (12) den Komponenten der Resultante dieser Kräfte in bezug auf den Punkt P_0 gleich.

Bezeichnet $Q_k' = (x_k', y_k', z_k')$ den Spiegelpunkt von $Q_k=(x_k, y_k, z_k)$ in bezug auf die Kugel vom Mittelpunkt P_0 und vom Einheitsradius, so sind

$$x_k' - x_0 = m_k(x_k - x_0), \qquad y_k' - y_0 = m_k(y_k - y_0),$$
$$z_k' - z_0 = m_k(z_k - z_0).$$

Für diese Punkte Q_k' bestehen also die Gleichungen

$$\text{(13)} \quad \begin{gathered} \sum (x_k' - x_0) = 0, \qquad \sum (y_k' - y_0) = 0, \qquad \sum (z_k' - z_0) = 0, \\ \text{oder} \quad nx_0 = \sum x_k', \qquad ny_0 = \sum y_k', \qquad nz_0 = \sum z_k'. \end{gathered}$$

Daraus folgt der Satz

III. *Ist* $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ *eine (reelle) Nullstelle der Derivierten des Abstandspolynoms* $F(x, y, z)$ *n-ten Grades mit den Nullstellen* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, *für welche* $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ *gilt, und bezeichnet* Q_k' *den Spiegelpunkt von* Q_k *in bezug auf eine Kugel vom Mittelpunkt* P_0, *so ist* P_0 *der Schwerpunkt der Punkte* Q_k' $(k=1, 2, \cdots, n)$. *Die Vektoren* $\mathbf{P_0Q_k'}$ *lassen sich in ein Raumvieleck zusammensetzen, weil ihre Summe verschwindet.*

4. **Die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Abstandspolynoms** $F(x, y, z)$ **in der Umgebung einer Nullstelle von** $F(x, y, z)$. Bedeutet $|PQ|$ den Abstand der Punkte P, Q, so kann man aus dem Satz III den Satz ableiten:

IV. *Bezeichnen* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ *bzw.* $p_1, p_2, \cdots, p_m$ *die verschiedenen Nullstellen des Abstandspolynoms* $F(x, y, z)$ *n-ten Grades bzw. ihre Vielfachheiten* $(p_k\geqq 1, p_1+p_2+\cdots+p_m=n)$ *und bezeichnet* K *den Konvexkörper der gemeinsamen Punkte* P *der* $m-1$ *Kugeln*

$$|PQ_1| \leqq \frac{p_1}{n-p_1}|PQ_k| \qquad (k=2, 3, \cdots, m),$$

so besitzt die Derivierte $F'(x, y, z)$ *im Innern des Körpers* K *ausserhalb von* Q_1 *keine Nullstelle.*

Ist $d=\mathrm{Min}\ |Q_1Q_k|$ $(k=2, 3, \cdots, m)$, *so ist die Kugel vom Mittelpunkt* Q_1 *und vom Halbmesser* $p_1\cdot d/n$ *ein Teilkörper von* K. *Sie enthält ausserhalb von* Q_1 *keine Nullstelle der Derivierten* $F'(x, y, z)$ *im Innern.*

Für einen inneren Punkt $P_0(\neq Q_1)$ des Körpers K kann nämlich die Vektorgleichung

$$\mathbf{P_0N} = \sum_{k=1}^{m} p_k\cdot \mathbf{P_0Q_k'} = p_1\cdot \mathbf{P_0Q_1'} + \sum_{k=2}^{m} p_k\cdot \mathbf{P_0Q_k'} = 0$$

nicht bestehen, weil

$$|P_0N| \geqq p_1\cdot |P_0Q_1'| - \sum_{k=2}^{m} p_k\cdot |P_0Q_k'| > 0$$

ist.

Aus den Annahmen des Satzes IV folgen nämlich die Ungleichungen

$$\frac{|P_0Q_k'|}{|P_0Q_1'|} = \frac{|P_0Q_1|}{|P_0Q_k|} < \frac{p_1}{n-p_1} \qquad (k=2, 3, \cdots, m),$$

$$\sum_{k=2}^{m} p_k \,|\, P_0Q_k' \,| < \frac{p_1}{n-p_1}(p_2+p_3+\cdots+p_m)\cdot |\, P_0Q_1' \,| = p_1 |\, P_0Q_1' \,|,$$

$$|\, P_0N \,| \geqq p_1 |\, P_0Q_1' \,| - \sum_{k=2}^{m} p_k |\, P_0Q_k' \,| > 0.$$

Damit ist der Satz IV bewiesen.

5. **Die Nullstellenverteilung eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ in zwei Kugeln, die sich in einer Nullstelle der Derivierten von aussen berühren.** Es gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes[1] von mir über die Polynome mit einer komplexen Veränderlichen:

V. *Bezeichnet $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ eine Nullstelle der Derivierten eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades (für welche $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ ist), bezeichnen ferner K bzw. K' die abgeschlossenen Inneren von zwei sich im Punkte P_0 von aussen berührenden beliebigen Kugeln mit dem Halbmesser R bzw. $R'=(n-1)R$ und besitzt endlich das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ in K mindestens eine Nullstelle, so besitzt es auch in K' mindestens eine. Enthält K' keine Nullstelle von $F(x, y, z)$, so enthält auch K keine.*

Zum Beweis dieses Satzes kann man annehmen, das $x_0=y_0=z_0=0$ sind und dass die Berührungsebene der Kugeln K und K' im Punkte P_0 die yz-Ebene ist, weil man diese Lage durch eine Koordinatentransformation erreichen kann. Bei dieser Annahme hat die erste Gleichung von (12) die Form

$$(14)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2+y_k^2+z} = \sum_{k=1}^{n} X_k = 0, \qquad X_k = \frac{x_k}{x_k^2+y_k+z_k^2}\,.$$

Ist $X_k=0$, so liegt die Nullstelle Q_k in der yz-Ebene. Liegt ein Punkt Q_k ausserhalb der yz-Ebene, so besitzt die Summe von (14) mindestens je ein positives und negatives Glied.

Wir nehmen an, dass die Indizes der Punkte Q_k so gewählt sind, dass die ersten ν Glieder in der Summe von (14) positiv, die folgenden ν' Glieder negativ und die letzten $n-\nu-\nu'$ Glieder Null sind ($\nu\geqq 1$, $\nu'\geqq 1$, $n-\nu-\nu'\geqq 0$) und dass die Ungleichungen

$$X_1 \geqq X_2 \geqq \cdots \geqq X_\nu > 0, \qquad X_1' \geqq X_2' \geqq \cdots \geqq X_{\nu'}' > 0,$$
$$X_i' = -X_{\nu+i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu')$$

bestehen. Dann liegen die Punkte $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu$ bzw. $Q_{\nu+1}$,

[1] Gy. (F.) v. Sz. Nagy, *Über geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten*, Jber. Deutschen Math. Verein. bd. 27 (1918) pp. 44–88; *Über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms*, Tôhoku Math. J. bd. 35 (1932) pp. 126–135.

$Q_{\nu+2}, \cdots, Q_{\nu+\nu'}$ an der positiven bzw. negativen Seite der yz-Ebene, die übrigen Punkte $Q_{\nu+\nu'+1}, \cdots, Q_n$ liegen in der yz-Ebene.

Sind

$$X_h = 1/D_h, \quad X_i' = 1/D_i' \qquad (h = 1, 2, \cdots, \nu;\ i = 1, 2, \cdots, \nu')$$

so lässt sich die Gleichung (14) in der Form

$$\sum_{h=1}^{\nu} \frac{1}{D_h} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{D_i'}, \qquad \frac{1}{D_1} \geqq \frac{1}{D_2} \geqq \cdots \geqq \frac{1}{D_\nu}, \tag{15}$$
$$\frac{1}{D_1'} \geqq \frac{1}{D_2'} \geqq \cdots \geqq \frac{1}{D_{\nu'}}$$

schreiben. Hier bedeutet D_h bzw. D_i' den Durchmesser der durch den Punkt Q_h bzw. $Q_{\nu+i}$ gehenden und die yz-Ebene im Anfangspunkt berührenden Kugel.

Man erhält aus (15) die Ungleichungen

$$\frac{1}{D_1} \leqq \frac{\nu'}{D_1'} \leqq \frac{n-1}{D_1'}, \qquad \frac{p}{D_p} \leqq \frac{\nu'}{D_1'} \leqq \frac{n-1}{D_1'} \qquad (p \leqq \nu),$$

oder

$$D_1' \leqq \nu' \cdot D_1 \leqq (n-1) \cdot D_1, \quad D_1' \leqq \frac{\nu'}{p} D_p \leqq \frac{n-p}{p} D_p. \tag{16}$$

Aus der Ungleichung $D_1' \leqq (n-1)D_1$ folgt der Satz V. In dieser Ungleichung besteht das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $\nu = 1$, $\nu' = n-1$, $D_1' = D_2' = \cdots = D_\nu'$ sind. Liegt der Punkt Q_1 auf der Kugel K $(D_1 = 2R)$ und liegt kein Punkt Q_k innerhalb der Kugel K' $(D_1' = 2R')$, so fallen die $n-1$ Punkte $Q_2, Q_3, \cdots, Q_n$ auf die Kugel K'.

Aus der zweiten Ungleichung von (16) folgt die folgende Verallgemeinerung des Satzes V:

VI. *Bezeichnet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ eine Nullstelle der Derivierten eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades, für welche $F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ist, bezeichnen ferner K und K' sich im Punkte P_0 von aussen berührende Kugeln von Halbmessern R bzw. $R' = (n-p)/p \cdot R$ und besitzt das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ in der abgeschlossenen Kugel K mindestens p Nullstellen, so besitzt es in der Kugel K' mindestens eine Nullstelle. Besitzt das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ im Innern von K' keine Nullstelle, so besitzt es auf der Kugel K bzw. K' genau p bzw. $n-p$ Nullstellen.*

Ist $\nu = \nu' = 1$, so ist $D_1 = D_1'$. Es gilt dann der Satz V:

VII. *Besitzt ein Abstandspolynom n-ten Grades die Nullstellen Q_1 und Q_2 ausserhalb einer Ebene E, die übrigen $n-2$ Nullstellen $Q_3, Q_4, \cdots, Q_n$ aber in der Ebene E und enthält die Ebene E eine Nullstelle P_0 der Derivierten ($P_0 \neq Q_k$, $k=1, 2, \cdots, n$), so haben die Kugeln, die durch den Punkt Q_1 bzw. Q_2 gehen und im Punkte P_0 die Ebene E berühren, gleiche Durchmesser.*

Aus der Gleichung (15) erhält man leicht den Satz

VIII. *Es sei P_0 eine Nullstelle der Derivierten eines Abstandspolynoms 4-ten Grades, deren Nullstellen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 nicht in einer Ebene liegen. Ist K_{234} die Umkugel des Tetraeders $P_0Q_2Q_3Q_4$ und ist K_1 die Kugel durch den Punkt Q_1, von der die Kugel K_{234} im Punkte P_0 berührt wird, so ist $R_{234}=3\cdot R_1$, wo R_{234} bzw. R_1 den Halbmesser von K_{234} bzw. K_1 bedeutet. Bezeichnet E_{34} die Ebene der Punkte $P_0Q_3Q_4$ und bezeichnet K_1'' bzw. K_2' die Kugel durch den Punkt Q_1 bzw. Q_2, von der die Ebene E_{34} im Punkte P_0 berührt wird, so ist $R_1''=R_2'$ (wo R_1'' und R_2' die Halbmesser von K_1'' und K_2' bedeuten). Bezeichnet $E_{12,34}$ die durch den Punkt P_0 gehende und zu den Geraden Q_1Q_2 und Q_3Q_4 parallele Ebene und bezeichnet K_{12} bzw. K_{34} die Kugel durch das Punktpaar Q_1Q_2 bzw. Q_3Q_4, von der die Ebene $E_{12,34}$ im Punkte P_0 berührt wird, so ist $R_{12}=R_{34}$ (wo R_{12} und R_{34} die Halbmesser von K_{12} und K_{34} sind).*

Im ersten, zweiten bzw. dritten Teil dieses Satzes sind nämlich

$$\nu = 3, \quad \nu' = 1, \quad D_1 = D_2 = D_3 = 2R, \quad D_1' = 2R', \quad D_1 = 3D_1';$$

$$\nu = \nu' = 1, \quad D_1 = D_1', \quad D_1 = 2R, \quad D_1' = 2R;$$

bzw.

$$\nu = \nu' = 2, \quad D_1 = D_2, \quad D_1' = D_2', \quad D_1 = D_1', \quad D_1 = 2R, \quad D_1' = 2R'.$$

Damit ist der Satz VIII bewiesen.

6. **Der Satz von Laguerre für ein Abstandspolynom.** Es gilt der Satz:

IX. *Ist $P=(x, y, z)$ keine Nullstelle des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ oder seiner Derivierten, so werden die Nullstellen von $F(x, y, z)$ von jeder Kugelfläche getrennt, die den Punkt P und den Punkt $\Pi=(\xi, \eta, \zeta)$*

$$\xi = x - 2n\frac{F_x(x, y, z)}{H(x, y, z)}, \qquad \eta = y - 2n\frac{F_y(x, y, z)}{H(x, y, z)}, \tag{17}$$
$$\zeta = z - 2n\frac{F_z(x, y, z)}{H(x, y, z)}$$

enthält, wo $H(x, y, z)=F_x^2(x, y, z)+F_y^2(x, y, z)+F_z^2(x, y, z)$ *ist.*

Der Punkt $\Pi=(\xi, \eta, \zeta)$ wird als *Polarpunkt* von P in bezug auf das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ genannt. Der Punkt Π kann nach Laguerre als der derivierte Punkt[2] von P in bezug auf $F(x, y, z)$, oder nach Pólya-Szegö als der Schwerpunkt[3] der Nullstellen von $F(x, y, z)$ in bezug auf P genannt werden.

In diesem Satz sind die Ebenen durch das Punktpaar $P\Pi$ den Kugeln zu rechnen. Die Kugelfläche K trennt dann die Nullstellen von $F(x, y, z)$, wenn sie jede dieser Nullstellen enthält, oder wenn das Abstandspolynom $F(x, y, z)$ innerhalb und ausserhalb von K mindestens je eine Nullstelle besitzt.

Zum Beweis des Satzes IX können wir annehmen, dass $P=(0, 0, 0)$ ist. Haben die Nullstellen Q_k von $F(x, y, z)$ in diesem Koordinatensystem die Koordinaten (x_k, y_k, z_k) $(k=1, 2, \cdots, n)$, so hat der Spiegelpunkt Q_k' von Q_k in bezug auf die Einheitskugel (vom Mittelpunkt $P=(0, 0, 0)$ und vom Einheitshalbmesser) die Koordinaten

$$x_k' = \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}, \quad y_k' = \frac{y_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}, \quad z_k' = \frac{z_k}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}.$$

Der Schwerpunkt $S'=(X', Y', Z')$ der n Punkte Q_k' $(k=1, 2, \cdots, n)$ hat nach (10) die Koordinaten

$$X' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k' = \frac{-1}{2n}\cdot\frac{F_x(0, 0, 0)}{F(0, 0, 0)}, \qquad Y' = \frac{-1}{2n}\cdot\frac{F_y(0, 0, 0)}{F(0, 0, 0)},$$

$$Z' = \frac{-1}{2n}\cdot\frac{F_z(0, 0, 0)}{F(0, 0, 0)}.$$

Ist $S=(X, Y, Z)$ der Spielgelpunkt von $S'=(X', Y', Z')$ in bezug auf die Einheitskugel, so fällt S mit dem Punkt Π zusammen, weil

$$X = \frac{X'}{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = \frac{-2n\cdot F_x(0, 0, 0)}{H(0, 0, 0)}, \qquad Y = \frac{-2n\cdot F_y(0, 0, 0)}{H(0, 0, 0)},$$

$$Z = \frac{-2n\cdot F_z(0, 0, 0)}{H(0, 0, 0)}$$

sind.

Das Punktsystem $Q_1', Q_2', \cdots, Q_n'$ wird von jeder durch seinen Schwerpunkt S' gehenden Ebene E getrennt. Die Spiegelung in bezug auf die Einheitskugel führt die Ebene E in eine die Punkte P und $S\equiv\Pi$ enthaltende Kugelfläche K, die Punkte $Q_1', Q_2', \cdots, Q_n'$

[2] E. Laguerre, *Oeuvres de Laguerre*, bd. II, pp. 56–63.

[3] G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, bd. II, pp. 55–66.

in die Punkte $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ über, die also von der Kugelfläche K getrennt werden. Damit ist der Satz IX bewiesen.

7. Abstandspolynom mit in bezug auf eine Ebene symmetrisch liegenden Nullstellen. Der bekannte Jensensche Satz[4] lässt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

X. *Ist das Nullstellenpaar $Q_{2h-1}Q_{2h}$ $(h=1, 2, \cdots, p)$ eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades symmetrisch in bezug auf eine Ebene E und liegen seine übrigen Nullstellen Q_k $(k=2p+1, 2p+2, \cdots, n)$ in der Ebene E, so fällt eine ausserhalb der Ebene E liegende und von den Punkten Q_i $(i=1, 2, \cdots, 2p)$ verschiedene Nullstelle P der Derivierten $F'(x, y, z)$ entweder in das Innere von mindestens einer der p Kugeln mit den Durchmessern $Q_{2h-1}Q_{2h}$ $(h=1, 2, \cdots, p)$, oder P ist ein gemeinsamer Punkt dieser p Kugelflächen.*

Zum Beweis dieses Satzes können wir annehmen, dass die Ebene E mit der xy-Ebene zusammenfält, dass also

$$Q_{2h-1} = (x_h, y_h, z_h), \quad Q_{2h} = (x_h, y_h, -z_h) \quad (z_h \neq 0,\ h = 1, 2, \cdots, p);$$
$$Q_k = (x_k, y_k, 0) \qquad (k = 2p+1, 2p+2, \cdots, n)$$

sind. Ist $P=(x, y, z)$ im Satz X, so sind $F'(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)\neq 0$ und $z\neq 0$. Aus (10) ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{F_z(x, y, z)}{2F(x, y, z)} &= \sum_{h=1}^{p}\left[\frac{z-z_h}{(x-x_h)^2+(y-y_h)^2+(z-z_h)^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{z+z_h}{(x-x_h)^2+(y-y_h)^2+(z+z_h)^2}\right]\\ &\qquad+\sum_{k=2p+1}^{n}\frac{z}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+z^2}\\ &= 2z\left\{\sum_{h=1}^{p}\frac{(x-x_h)^2+(y-y_h)^2+z^2-z_h^2}{[(x-x_h)^2+(y-y_h)^2+(z-z_h)^2]\cdot[(x-x_h)^2+(y-y_h)^2+(z+z_h)^2]}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=2p+1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+z^2}\right\} = 0.\end{aligned}$$

[4] L. W. Jensen, *Recherches sur la théorie des équations*, Acta Math. bd. 36 (1913) pp. 181–195.

Gy. (F.) v. Sz. Nagy, *Zur Theorie der algebraischen Gleichungen*, Jber. Deutschen Math. Verein. bd. 31 (1922) pp. 258–251.

Der Faktor von $2z$ ($z\neq 0$) kann nur dann verschwinden, wenn die erste Summe mindestens ein Glied mit einem negativen Zähler besitzt, oder wenn jedes Glied der erste Summe verschwindet und die zweite Summe kein Glied enthält ($n=2p$).

Damit ist der Satz X bewiesen.

Der Faktor $2z$ verändert sich nicht, wenn man den Punkt $P=(x, y, z)$ durch den Punkt $P'=(x, y, -z)$ ersetzt. Ebenso bleiben die Summen in den ersten zwei Gleichungen von (10) bei dieser Ersetzung unverändert. Daraus folgt, dass auch die Lage der Nullstellen der Derivierten $F'(x, y, z)$ in bezug auf die Ebene E symmetrisch ist.

Aus dem Satz X folgt:

XI. *Liegen die Nullstellen $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ eines Abstandspolynoms n-ten Grades in einer Ebene E, sind die Punktpaare $Q_{2h-1}Q_{2h}$ ($h=1, 2, \cdots, p$) in bezug auf eine Gerade g der Ebene E symmetrisch und fallen die übrigen $n-2p$ Punkte Q_k auf die Gerade g, so ist jede ausserhalb von g liegende und von den Punkten Q_k ($k\leqq 2p$) verschiedene Nullstelle der Derivierten ein Punkt von mindestens einer Kreisscheibe unter den p Kreisscheiben mit den Durchmessern $Q_{2h-1}Q_{2h}$.*

Die Nullstellen des Abstandspolynoms in diesem Satz sind nämlich auch in bezug auf die Ebene E' symmetrisch, die durch die Gerade g geht und zu E senkrecht steht.

8. **Die Lage der Nullstellen eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ in bezug auf zwei Nullstellen seiner Derivierten.** Es gilt der Satz:

XII. *Bezeichnen $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ und $P_0'=(x_0', y_0', z_0')$ zwei verschiedene Nullstellen der Derivierten eines Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ n-ten Grades, für welche $F(x_0, y_0, z_0)$ und $F(x_0', y_0', z_0')$ nicht verschwinden und bezeichnet E bzw. E_0 eine beliebige Ebene durch die Punkte P_0 und P_0', bzw. die Mittelebene der Punkte P_0, P_0', so trennt das Ebenenpaar EE_0 die Nullstellen von $F(x, y, z)$. (Enthält das Ebenenpaar nicht jede Nullstelle von $F(x, y, z)$, so besitzt $F(x, y, z)$ im Inneren beider von E und E_0 begrenzten Doppel-Raumwinkel mindestens je eine Nullstelle.)*

Dreht man eine gleichseitige Hyperbel mit der Hauptachse P_0P_0' um die Gerade P_0P_0' herum, so trennt das so enstandene zweischalige Hyperboloid die Nullstellen des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$.

Zum Beweis dieses Satzes können wir annehmen, dass $P_0=(0, 0, z_0)$, $P_0'=(0, 0, -z_0)$, $z_0\neq 0$ sind. Bezeichnen $Q_k=(x_k, y_k, z_k)$ die Nullstellen von $F(x, y, z)$ in diesem Koordinatensystem und ist

$$N_k = [x_k^2 + y_k^2 + (z_k - z_0)^2]\cdot[x_k^2 + y_k^2 + (z_k + z_0)^2] \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

so erhält man aus (10) die Gleichungen

$$G_1 \equiv \frac{1}{2z_0}\left[\frac{F_x(0, 0, z_0)}{F(0, 0, z_0)} - \frac{F_x(0, 0, -z_0)}{F(0, 0, -z_0)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{-2x_k z_k}{N_k} = 0,$$

$$G_2 \equiv \frac{1}{2z_0}\left[\frac{F_y(0, 0, z_0)}{F(0, 0, z_0)} - \frac{F_y(0, 0, -z_0)}{F(0, 0, -z_0)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{-2y_k z_k}{N_k} = 0,$$

$$G_3 \equiv \frac{1}{2z_0}\left[\frac{F_z(0, 0, z_0)}{F(0, 0, z_0)} - \frac{F_z(0, 0, -z_0)}{F(0, 0, -z_0)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 + y_k^2 - z_k^2 + z_0^2}{N_k} = 0.$$

Bezeichnen A und B beliebige reele Zahlen, so ist

$$AG_1 + BG_2 \equiv -\sum_{k=1}^{n} \frac{(Ax_k + By_k)z_k}{N_k} = 0.$$

Daraus folgt der erste Teil des Satzes XII. Verschwindet nämlich das Produkt $(Ax+By)z$ nicht für jede Nullstelle Q_k, so gibt es mindestens je einen Punkt Q_h bzw. Q_i, für den dieses Produkt positiv bzw. negativ ist. Das Punktpaar Q_hQ_i wird also von den Ebenen $Ax+By=0$ und $z=0$ getrennt. Ebenso folgt der zweite Teil von XII aus der Gleichung $G_3=0$.

Aus der Gleichung $A\cdot G_1+B\cdot G_2+G_3=0$ folgt die folgende Ergänzung des Satzes XII:

Die Nullstellen des Abstandspolynoms $F(x, y, z)$ werden im Falle $P_0=(0, 0, z_0)$, $P_0'=(0, 0, -z_0)$ von jeder Fläche zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$(18) \qquad (x - Az)^2 + (y - Bz)^2 - (1 + A^2 + B^2)z^2 + z_0^2 = 0$$

getrennt, wo A und B beliebige reele Zahlen bedeuten.

Diese Flächen sind im allgemeinen zweischalige Hyperboloide. Im Grenzfall $A\to\infty$, $B\to\infty$, stellt die Gleichung (18) zwei senkrechte Ebenen dar.