SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE DÉTERMINÉES DANS UNE RÉGION ILLIMITÉE

MIROSLAW KRZYŻAŃSKI

L'un des problèmes rélatifs à l'équation de la chaleur consiste en la recherche d'une solution de cette équation, se réduisant à une fonction donnée sur la caractéristique. Cette solution est donnée par l'intégrale classique de Weierstrass.[1] Cependant la question de l'unicité de cette solution n'a été complètement résolue que dans les travaux récentes de M. M. Picone et M. A. Tychonoff.[2]

Or il y a intérêt à éteindre ces résultats à l'équation linéaire du type parabolique:

$$\begin{aligned}(1)\quad \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} &= \sum_{j=1}^{m} a_j(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)\frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &\quad + b(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)u,\end{aligned}$$

la forme $\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\lambda_i\lambda_k$ étant positive définie, en cherchant la solution u de cette équation déterminée dans une région illimitée R: $0 \leqq y \leqq h$; $-\infty < x_i < +\infty$ $(i=1, 2, \cdots, m)$, telle que

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_m).$$

Nous commençons par introduire une classification des fonctions caractérisant la façon dont elles se comportent à l'infini. Conviendrons d'appeler dans la suite la classe E_α $(\alpha > 0)$ une classe de fonctions $F(x)$ qui ont la propriété suivante: il existe deux nombres constants positifs M et K tels que

$$|F(x)| < Me^{K|x|^\alpha}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Nous allons voir que dans la classe E_2 par rapport aux x_i il existe une solution et une seule du problème posé.

Le résultat analogue pour l'équation de la chaleur a été obtenu par

[1] Voir par exemple E. Goursat, *Cours d'Analyse*, Tome 3, Paris, 1927, chap. 29, p. 294.

[2] P. Picone, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera*, Mathematische Annalen, Tome 101 (1929), pp. 701–712. A. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de chaleur*, Recueil Mathématique de Moscou, Tome 42 (1935), pp. 199–214. Cf. aussi le travail récent de M. F. G. Dressel, *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Mathematical Journal, Tome 7 (1940), pp. 186–203.

M. Tychonoff (voir le travail cité), qui a démontré en outre que l'unicité du problème n'a pas lieu dans la classe $E_{2+\epsilon}$, où ϵ est un nombre positif arbitrairement petit.

Considérons l'équation de la forme (1) dont les coefficients sont continus et bornés dans la région R; plus précisemment, supposons l'existence des nombres positifs A, α et γ tels que: $|A_{ik}| < A$, $|a_j| < \alpha$, $|c| < \gamma$, $(i, k, j = 1, 2, \cdots, m)$, dans toute la région R; quant au coefficient b, on suppose l'existence des nombres β et β_1 tels que $\beta_1 > b > \beta > 0$ partout dans R. Tout ceci étant supposé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *La seule solution de l'équation* (1) *appartenant à la classe E_2 par rapport aux x_i et s'annulant sur la caractéristique $y=0$ est $u \equiv 0$.*

Démonstration. D'après la règle générale due à M. Picone (voir le travail cité) on transforme l'équation (1) en posant $u(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) = v(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) \cdot W(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)$, v étant la nouvelle fonction inconnue; W étant supposé différent de zéro, on obtient ainsi

$$(2) \qquad \sum_{i,k=1}^{m} A_{i,k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(1)} \frac{\partial v}{\partial x_j} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c^{(1)} v$$

et on doit choisir W de sorte que 1° le coefficient $c^{(1)}$ soit positif dans R, 2° $v \to 0$ pour $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \to \infty$.

Passons donc à la construction de la fonction W conforme à notre problème. La fonction u appartenant à la classe E_2, il existe deux nombres M et K_0 tels que

$$(3) \qquad |u(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)| < M \exp\left(K_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)$$

dans R. Soit

$$\mu = \frac{5K}{\beta}; \qquad \nu = \frac{1}{\beta}\left[m\left(1 + \frac{\alpha}{A}\right)^2 + K + \gamma\right]$$

où $K > K_0$ et posons

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) = v(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) \cdot H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; K),$$

avec

$$(4) \qquad H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; K) = \exp\left[\frac{K \sum_{i=1}^{m} x_i^2}{1 - \mu y} + \nu y\right].$$

Supposons que la hauteur h de R est inférieure à $1/\mu$.

Ainsi dans la transformation de M. Picone nous avons remplacé la fonction W par H. Un calcul montre qu'en chaque point de R le coefficient $c^{(1)}$ de l'équation (2) est supérieur à une forme quadratique en x_i positive définie, à savoir:

$$c^{(1)} > A \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{K \mid x_j \mid}{1 - \mu y} - \left(1 + \frac{\alpha}{A} \right) \right]^2 + K.$$

Il en résulte que si l'on construit un parallélipipède rectangulaire R_n, détaché de R par les plans $x_i = \pm n$, *la fonction v ne pourrait atteindre dans R_n ni un maximum positif, ni un minimum négatif que sur la partie de sa surface située sur les plans $x_i = \pm n$ et $y = 0$* (voir le travail cité de M. Picone).

Soit $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, y^{(0)})$ un point quelconque de R; pour n assez grand R_n contiendra P_0. En vertu de (3') on peut déterminer n de sorte que $|v| < \epsilon$ sur la surface latérale de R_n, $\epsilon > 0$ étant un nombre arbitrairement petit. D'autre part v s'annule sur le plan $y = 0$, donc $|v(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, y^{(0)})| < \epsilon$. Il en résulte que $v(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ et, par suite, $u(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, y^{(0)}) = 0$. Comme P_0 est un point arbitraire de R, on a

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) \equiv 0$$

dans R.

Passons à la démonstration de l'existence de la solution du problème, en supposant que les *coefficients $A_{i,k}$ et b admettent les dérivées du premier ordre continues.*

THÉORÈME II. *La fonction $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ étant de la classe E_2 et continue, il existe une solution et une seule de l'équation* (1) *appartenant à la classe E_2 en tant que la fonction des x_i déterminée dans la région R de hauteur h (suffisamment petite) et se réduisant à la fonction ϕ sur la caractéristique $y = 0$.*

DÉMONSTRATION. L'unicité de cette solution résulte aussitôt du Théorème I. Il suffit donc de démontrer son existence.

La fonction ϕ étant de la classe E_2, il existe deux nombres M et K tels que

$$(5) \qquad | \phi(x_1, x_2, \cdots, x_m) | < M \exp \left(K \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right).$$

Construisons la parallélipipède R_p, analogue à R_n (voir la démonstration du Théorème I) et soit S_p sa surface latérale, composé des parties des plans $x_i = \pm p$. D'après les résultats de M. Giraud et

M. Gevrey[3] il existe une solution u_p de (1) telle que:

$$u_p(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_m),$$
$$u_p(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_m) \qquad \text{sur } S_p.$$

Cette solution est déterminée dans R_p. D'une manière analogue définissons la solution u_q de (1), déterminée dans le parallélipipède R_q $(q>p)$ analogue à R_p; soit S_q sa surface latérale.

Supposons que $h<2/KA$ et soient v_p, v_q et v_q^* les fonctions définies par les égalités

$$u_p = v_p\cdot H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; 2K);\ u_q = v_q\cdot H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; 2K);$$
$$u_q = v_q^*\cdot H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; K).$$

Observons que $H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; 2K) > H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; K)$ $\cdot \exp(\overline{K}\sum_{i=1}^m x_i^2)$ ($\overline{K}$ étant un nombre positif) de sorte que

$$v_q < v_q^* \exp\left(-\overline{K}\sum_{i=1}^m x_i^2\right); \tag{6}$$

on peut supposer que $\overline{K}<K$. D'après (5) et la définition de H on a $|v_q^*|<M$ sur S_q et $|v_q^*(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0)|<M$; il en résulte que $|v_q^*|<M$ partout dans R_q et en particulier sur S_p. En égard à (6) on a donc $|v_q|<Me^{-\overline{K}mp^2}$ sur S_p.

La fonction:

$$w_{pq}(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) = v_q(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) - v_p(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)$$

est déterminée partout dans R_p et l'on a $|w_{pq}|<2M\exp(-\overline{K}mp^2)$ sur S_p et $w_{pq}(x_1, x_2, \cdots, x_m, 0)=0$. Donc

$$|w_{pq}(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)| < 2Me^{-\overline{K}mp^2} \qquad \text{partout dans } R_p. \tag{7}$$

Soit maintenant P_0 un point quelconque de R; considérons un parallélipipède fixe $\rho\subset R$ de hauteur h, entourant P_0. D'après (7) on peut déterminer un nombre p_0 de sorte que l'on ait

$$|u_q(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) - u_p(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)| < \epsilon$$

pour $q>p>p_0$ partout dans ρ. Ceci montre que la suite $\{u_p\}$ tend vers une limite $U(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)$ partout dans R, le point P_0 étant un point arbitraire de R; en particulier $U_p\to U$ uniformement dans ρ.

Nous démontrerons que U est précisemment la solution de notre

[3] G. Giraud, *Sur certaines opérations aux dérivées partielles du type parabolique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Tome 195 (1932), pp. 98–100. M. Gevrey, *Systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique*, ibid., Tome 195 (1932), pp. 690–693.

problème. On a évidemment $U(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$; il nous reste à prouver que U satisfait à l'équation (1) partout dans R. Il suffit évidemment de démontrer que ceci a lieu au point P. Or soit $\bar{u}(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)$ la solution de (1) déterminée dans ρ, égale à ϕ pour $y=0$ et identique à U sur la surface latérale σ de ρ. Nous allons voir que $\bar{u} \equiv U$ dans ρ.

En effet, $\epsilon > 0$ étant un nombre arbitrairement petit, on peut déterminer le nombre p de sorte que

$$\left| u_p(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \cdots, \overset{(0)}{x_m}, \overset{(0)}{y}) - U(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \cdots, \overset{(0)}{x_m}, \overset{(0)}{y}) \right| < \epsilon/2,$$

$$\left| u_p(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) - U(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) \right| < \epsilon/2 \qquad \text{sur } \sigma.$$

Il résulte de la dernière inégalité, que

$$\left| u_p(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \cdots, \overset{(0)}{x_m}, \overset{(0)}{y}) - \bar{u}(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \cdots, \overset{(0)}{x_m}, \overset{(0)}{y}) \right| < \epsilon/2$$

puisque $u_p - \bar{u}$ est dans ρ une solution de (1) et on a $u_p = \bar{u}$ pour $y=0$ et $\bar{u} \equiv U$ sur σ. On en déduit $\left| \bar{u}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, y^{(0)}) - U(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)}, y^{(0)}) \right| < \epsilon$ donc

$$\bar{u}(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \cdots, \overset{(0)}{x_m}, \overset{(0)}{y}) = U(\overset{(0)}{x_1}, \overset{(0)}{x_2}, \cdots, \overset{(0)}{x_m}, \overset{(0)}{y}).$$

Ainsi U est une intégrale de (1) dans R, c'est donc la solution de notre problème.

Il nous reste encore à démontrer qu'elle est de la classe E_2 par rapport aux x_i. Or la fonction $v^* = \lim_{p\to\infty} v_p^*$ satisfait à l'inégalité $|v^*| < M$. Comme d'autre part $U = v^* \cdot H(x_1, x_2, \cdots, x_m, y; K)$, on a

$$\left| U(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) \right| < M \exp \left[\frac{K \sum_{i=1}^m x_i^2}{1 - \mu y} + \nu y \right].$$

Si la fonction ϕ est de la classe E_1, on démontrerait aisément, qu'il en est de même de U (par rapport aux x_i); plus précisemment, l'inégalité $|\phi| < M \exp \left[K(\sum_{i=1}^m x_i^2)^{1/2}\right]$ entraine

$$|U| < M \exp K \left[\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2} + \Gamma(y) \right],$$

Γ étant une fonction bornée. En particulier l'inégalité $|\phi| < M$ entraine $|U| < M$ dans R.

WILNO, POLAND