SULLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE CHE POSSEGGONO PER CURVA DI PUNTI UNITI UNA SESTICA CON DIECI PUNTI DOPPI

GIUSEPPE POMPILJ

In una precedente memoria *Sulla trasformazioni Cremoniane del piano che posseggono una curva di punti uniti*[1] ho messo in evidenza che tra i tipi possibili di siffatte trasformazioni si presentano quelle che hanno per curva di punti uniti una sestica con 10 punti doppi; per provare l'effettiva esistenza di tali trasformazioni ne ho dato un esempio (num. 21) che però è risultato essere insussistente perchè, come ha recentemente osservato A. B. Coble,[2] la trasformazione che si ottiene non è altro che l'identità. Perciò do quì un altro esempio.

La generica sestica razionale, con dieci punti doppi $P_1, P_2, \cdots, P_7$, A, B, C di cui gli ultimi tre nei vertici del triangolo fondamentale $A(0, 1, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 0, 1)$, ha equazione parametrica:

$$
\begin{aligned}
x &= t(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\gamma_1)(t-\gamma_2),\\
y &= t(t-\beta_1)(t-\beta_2)(t-\gamma_3)(t-\gamma_4),\\
z &= (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\beta_1)(t-\beta_2)(t-\gamma_5)(t-\gamma_6).
\end{aligned}
$$

Imponiamo a questa sestica di soddisfare alla seguente condizione: *le due involuzioni individuate dalle coppie che cadono nei punti doppi* A, C *e* B, C *devono essere permutabili*. Questo porta che sia $\alpha_1\alpha_2 = -\beta_1\beta_2$ o meglio $\beta_2 = -\alpha_1\alpha_2/\beta_1$; cioè si ha un solo legame tra i coefficienti e la condizione, come è naturale, risulta perfettamente simmetrica rispetto ai punti doppi A e B. In questo caso l'equazione della nostra sestica S diventa:

$$
\begin{aligned}
x &= t(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\gamma_1)(t-\gamma_2),\\
y &= t(t-\beta_1)(t+\alpha_1\alpha_2/\beta_1)(t-\gamma_3)(t-\gamma_4),\\
z &= (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\beta_1)(t+\alpha_1\alpha_2/\beta_1)(t-\gamma_5)(t-\gamma_6),
\end{aligned}
$$

ed un semplice esame di questa equazione parametrica ci assicura che nell'intorno dei tre punti doppi A, B, C non esistono altri punti multipli di S.

Ma ancora con una sola condizione si può imporre che la sestica abbia:

---

[1] Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Roma, (4), vol. 2 (1938).

[2] This Bulletin, vol. 45 (1939).

I. un punto triplo in luogo di tre punti doppi, o
II. un tacnodo, o
III. tre punti doppi su una retta, o
IV. sei punti doppi su una conica,

gli altri casi, come vedremo, non ci interessano perchè oltre che $P_1, \cdots, P_7$ fanno intervenire il punto doppio C ovvero, per la simmetria, A e B contemporaneamente.

Sorge così il dubbio che la condizione imposta equivalga a qualcuna di quelle sopra elencate.

Il primo caso si esclude subito. Supponiamo infatti che la nostra sestica abbia un punto triplo P in corrispondenza ai valori η_1, η_2, η_3 del parametro t; in tal caso le rette per P segano ulteriomente S secondo una g_3^1 che sul parametro t è espressa da:

$$(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\delta_1)+\lambda(t-\beta_1)(t+\alpha_1\alpha_2/\beta_1)(t-\delta_2)=0\ ;$$

siccome poi questa g_3^1 deve contenere anche un gruppo del tipo $(0, \infty, \delta_3)$ segue che $\delta_1=-\delta_2\ (=\delta)$. Si osservi ora che le rette per A e B segano ulteriormente S secondo due g_4^1 espresse, sul parametro t dalle equazioni:

$$t(t-\gamma_1)(t-\gamma_2)+\lambda(t-\beta_1)(t+\alpha_1\alpha_2/\beta_1)(t-\gamma_5)(t-\gamma_6)=0$$
$$t(t-\gamma_3)(t-\gamma_4)+\mu(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\gamma_5)(t-\gamma_6)=0$$

e queste due g_4^1 devono possedere rispettivamente due gruppi del tipo $(\delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $(-\delta, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ il che però porta un'ulteriore condizione sui coefficienti; possiamo quindi concludere che in generale la nostra sestica possiede 10 punti doppi e non un punto triplo e sette punti doppi.

Gli altri tre casi non sono riuscito ad escluderli. Preciserò perciò che cosa diventano nei vari casi le trasformazioni involutorie del quarto tipo di Bertini[3] che hanno per fondamentali gli otto punti $(P_1, \cdots, P_7, A)$, $(P_1, \cdots, P_7, B)$.

Se non si presenta nessuno dei casi del numero precedente, ovvero se la sestica S ha un tacnodo si hanno due trasformazioni del 17° ordine con i punti fondamentali: $(P_1^6, \cdots, P_7^6, A^6)$, $(P_1^6, \cdots, P_7^6, B^6)$.

Se P_1, P_2, P_3 sono in linea retta si hanno due trasformazioni del 16° ordine con i punti fondamentali: $(P_1^5, P_2^5, P_3^5, P_4^6, \cdots, P_7^6, A^6)$, $(P_1^5, P_2^5, P_3^5, P_4^6, \cdots, P_7^6, B^6)$.

Se $P_1, \cdots, P_6$ sono su una conica si hanno due trasformazioni del 13° ordine con i punti fondamentali: $(P_1^4, \cdots, P_6^4, P_7^6, A^6)$, $(P_1^4, \cdots, P_6^4, P_7^6, B^6)$.

---

[3] V. Snyder, *The involutorial birational transformation of the plane, of order* 17, American Journal of Mathematics, vol. 33 (1911).

Cioè indicando con b_A la trasformazione del quarto tipo di Bertini che ha i punti fondamentali $(P_1, \cdots, P_7, A)$ e con b_B quella con i punti fondamentali $(P_1, \cdots, P_7, B)$ possiamo dire che le due trasformazioni b_A e b_B hanno rispettivamente i punti A e B come fondamentali e mutano i loro intorni in sestiche che passano doppiamente per $P_1, \cdots, P_7$ mentre hanno un punto triplo l'una in A e l'altra in B.

Data la natura della sestica S le due trasformazioni involutorie b_A e b_B sono permutabili su essa mentre, come dimostreremo, non lo sono sul piano; se infatti fosse $b_Ab_B = b_Bb_A$ siccome B è unito per b_A mentre è mutato da b_B in una sestica irriducibile $D_6\,(P_1^2, \cdots, P_7^2, B^3)$ seguirebbe che questa sestica D_6 sarebbe unita per b_A in contraddizione con il lemma VI (num. 10) della mia memoria precedentemente citata. Da ciò segue che la trasformazione $Q = b_Ab_Bb_Ab_B$ non è identica ed ha la sestica S come luogo di punti uniti.

Questa trasformazione Q non ha però tutti e dieci i punti doppi di S come fondamentali; per averne una che soddisfi anche a questo requisito, basta prendere una trasformazione cremoniana T la quale oltre che mutare in sè la sestica abbia per fondamentali quei punti doppi di S che non lo sono per Q, e quindi costruire la: $R = T^{-1}QTQ^{-1}$.

R. Università,
Rome, Italy