QUELQUES REMARQUES SUR LES RELATIONS ENTRE LES NOTIONS D'ÉCART RÉGULIER ET DE DISTANCE

N. ARONSZAJN

Madame A. Frink a donné récemment* une nouvelle démonstration très élégante du théorème suivant de M. E. W. Chittenden: *Si dans un espace E la notion de limite est définie par un écart régulier r,† elle peut être définie également par une distance ρ.*

La démonstration de Mme Frink repose sur une construction de la distance ρ qui, à cause de sa simplicité, permet d'établir des relations étroites entre les propriétés métriques de l'écart r et de la distance ρ.

Dans ce qui suit, nous allons indiquer des relations de ce genre dans quelques cas simples. Par r nous désignerons un écart régulier défini dans l'espace E et par ρ la distance correspondante construite par Mme Frink.

1. **Les écarts complets.** Nous dirons qu'une suite de points $\{p_n\}$ de E est une *suite de Cauchy selon r*, si $\lim_{i=\infty, j=\infty} r(p_i, p_j)=0$. Si toute suite de Cauchy selon r converge dans E, l'écart r sera dit *complet.*

De la démonstration de Mme. Frink résulte qu'il existe deux fonctions croissantes $\mu_1(\eta)$ et $\mu_2(\eta)$ telles que $\mu_i(\eta)>0$ pour $\eta>0$, $\mu_i(0) = \lim_{\eta=0} \mu_i(\eta) = 0$, et que

$$\mu_1(r(p, q)) \leqq \rho(p, q) \leqq \mu_2(r(p, q)), \tag{1}$$

pour tous les p, q de E.‡

Il s'ensuit de (1) immédiatement qu'une suite de Cauchy selon r est en même temps une suite de Cauchy selon la distance ρ et vice versa. De ce fait découle le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour que la distance ρ soit complète, il faut et il suffit que l'écart r le soit.*

2. **La presque-convexité.** Un écart r' est dit presque-convexe, si, pour tous a, b de E et tout $\eta>0$, il existe un c de E tel que

---

* Ce Bulletin, vol. 43 (1937), p. 133.

† On dit d'apres M. Fréchet que dans E est défini un écart régulier r, si pour tout couple de points (p, q) de E est défini un nombre $r(p, q)\geqq 0$ tel que: (1) $r(p, q)=0$ *équivaut à $p=q$*, (2) $r(p, q)=r(q, p)$, et (3) *il existe une fonction positive croissante $\delta(\epsilon)$, pour $\epsilon>0$, telle que, si $r(x, y)\leqq\delta(\epsilon)$ et $r(y, z)\leqq\delta(\epsilon)$, $r(x, z)\leqq\epsilon$.*

‡ Les fonctions $\mu_i(\eta)$ ne dépendent que de la fonction $\delta(\epsilon)$ qui correspond à l'écart r. Pour $\delta(\epsilon)=\epsilon/2$, on peut prendre $\mu_1(\eta)=\eta/4$ et $\mu_2(\eta)=\eta$.

$$(2.1) \qquad \left| r'(a, c) - \tfrac{1}{2}r'(a, b) \right| < \eta, \quad \left| r'(c, b) - \tfrac{1}{2}r'(a, b) \right| < \eta.*$$

Cette propriété entraîne évidemment la suivante:

(A) *Pour tous* a, b *de* E, $\eta > 0$, *et* n *entier positif, il existe une suite de points* c_k, $(k=1, 2, \cdots, (2^n-1))$, *tels que, en posant* $a=c_0$ *et* $b=c_{2^n}$, *on ait*

$$\left| r'(c_k, c_{k+1}) - \frac{1}{2^n} r'(a, b) \right| < \eta, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, (2^n - 1).$$

Supposons maintenant que l'écart r satisfait à la condition suivante:

(X) *Si* $r(x, y) \leqq \epsilon$ *et* $r(y, z) \leqq \epsilon$, $r(x, z) \leqq 2\epsilon$.†

THÉORÈME 2. *Si l'écart* r, *satisfaisant à* (X), *est presque-convexe, la distance* ρ *l'est également.*

DÉMONSTRATION. Revenons à la définition de la distance ρ. Pour un écart r satisfaisant à (X), elle s'écrit‡

$$(2.2) \qquad \rho(a, b) = \text{borne inf.} \sum_{i=0}^{N-1} r(p_i, p_{i+1}),$$

$\{p_i\}$, $(i=0, 1, \cdots, N)$, parcourant toutes les suites finies de points de E avec $p_0=a$ et $p_N=b$.

Pour un $\eta>0$ quelconque choisissons une telle suite avec

$$(2.3) \qquad \left| \rho(a, b) - \sum_{i=0}^{N-1} r(p_i, p_{i+1}) \right| < \frac{\eta}{4} \cdot$$

Dans la suite $\{p_i\}$ soit p_k le dernier terme pour lequel la somme $\sum_{i=0}^{k-1} r(p_i, p_{i+1})$ est encore $\leqq \frac{1}{2}\rho(a, b)$. D'après (2. 2), $k<N$. On a donc

$$(2.4) \qquad 0 \leqq \xi < r(p_k, p_{k+1}), \quad \text{où} \quad \xi = \tfrac{1}{2}\rho(a, b) - \sum_{i=0}^{k-1} r(p_i, p_{i+1}).$$

* La notion de presque-convexité a un sens pour les écarts les plus généraux, mais elle présente le plus d'intérêt quand r' est une distance. Elle a été introduite pour les distances dans notre thèse *Sur la métrique et la métrisation*, Varsovie, 1930 (non publiée). M. K. Menger a mentionné cette notion dans son article *Bericht über metrische Geometrie*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 40 (1931), p. 207. Il est à remarquer que pour une distance r', la presque-convexité entraîne la propriété plus forte suivante: *pour toute décomposition* $r'(a, b)=\alpha+\beta$, *avec* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, *et pour tout* $\eta>0$, *il existe un point* c *avec* $|r'(a, c)-\alpha| < \eta$ *et* $|r'(c, b)-\beta| < \eta$.

† La condition (X) signifie que $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$.

‡ Cf. A. Frink, loc. cit., p. 135.

Choisissons alors un n entier positif de sorte que

$$\frac{1}{2^n} r(p_k, p_{k+1}) < \frac{\eta}{4}, \tag{2.5}$$

et considérons la suite $\{q_j\}$, existant d'après (A), telle que

$$q_0 = p_k,\ q_{2^n} = p_{k+1},\ \left| r(q_j, q_{j+1}) - \frac{1}{2^n} r(p_k, p_{k+1}) \right| < \frac{\eta}{4\cdot 2^n}, \tag{2.6}$$
$$j = 0, 1, \cdots, (2^n - 1).$$

Dans la suite $\{q_j\}$ soit q_h le dernier terme avec $\sum_{j=0}^{h-1} r(q_j, q_{j+1}) \leqq \xi$, donc

$$0 \leqq \xi - \sum_{j=0}^{h-1} r(q_j, q_{j+1}) < r(q_h, q_{h+1}) < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4\cdot 2^n} < \frac{2\eta}{4}.^* \tag{2.7}$$

D'après la définition de la distance ρ, on tire des equations (2.4) et (2.7)

$$\begin{aligned} \rho(a, q_h) &\leqq \rho(a, p_k) + \rho(p_k, q_h) \\ &\leqq \sum_{i=0}^{k-1} r(p_i, p_{i+1}) + \sum_{j=0}^{h-1} r(q_j, q_{j+1}) \leqq \tfrac{1}{2}\rho(a, b). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Les inégalités de (2.3) à (2.7) nous donnent ensuite

$$\begin{aligned} \rho(q_h, b) &\leqq \rho(q_h, p_{k+1}) + \rho(p_{k+1}, b) \\ &\leqq \sum_{j=h}^{2^n-1} r(q_j, q_{j+1}) + \sum_{i=k+1}^{N-1} r(p_i, p_{i+1}) \\ &= \left[\sum_{j=0}^{2^n-1} r(q_j, q_{j+1}) - \sum_{j=0}^{h-1} r(q_j, q_{j+1}) \right] \\ &\quad + \left[\sum_{i=0}^{N-1} r(p_i, p_{i+1}) - \sum_{i=0}^{k} r(p_i, p_{i+1}) \right] \\ &< r(p_k, p_{k+1}) + \frac{\eta}{4} - \xi + \frac{2\eta}{4} \\ &\quad + \rho(a, b) + \frac{\eta}{4} + \xi - \frac{1}{2}\rho(a, b) - r(p_k, p_{k+1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\rho(a, b) + \eta. \end{aligned} \tag{2.9}$$

* Si $h = 2^n$, les inégalités (2.7) restent vraies à condition qu'on y efface le membre $r(q_h, q_{h+1})$ (ceci se déduit de (2.4) et (2.6).

En posant $c=q_h$ on déduit des inégalités (2.8) et (2.9) immédiatement que

$$\left|\rho(a, c)-\tfrac{1}{2}\rho(a, b)\right|<\eta \quad \text{et} \quad \left|\rho(c, b)-\tfrac{1}{2}\rho(a, b)\right|<\eta,$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. **Remarque sur la notion de distance géodésique.** Le Théorème 2 peut être considéré comme une conséquence d'un théorème concernant la distance géodésique dans un espace métrique général. On peut définir la distance géodésique de différentes manières.* D'un certain point de vue il est avantageux de la définir de manière suivante:

Soit r' un écart soumis uniquement aux conditions suivantes:

$$r'(x, y) \geqq 0, \qquad r'(x, x)=0. \tag{3.1}$$

On appelle *ϵ-chaîne unissant a et b* une suite $\{p_i\}$, $(i=0, 1, \cdots, N)$, telle que

$$p_0=a,\ p_N=b,\ r'(p_i, p_{i+1}) \leqq \epsilon, \qquad i=0, 1, \cdots, N-1. \tag{3.2}$$

On appelle *longueur* de la chaîne $\{p_i\}$, la quantité

$$L\{p_i\}=\sum_{i=0}^{N-1} r'(p_i, p_{i+1}). \tag{3.3}$$

Une chaîne $\{p_i'\}$ est dite *subdivision* de $\{p_i\}$, si elle s'obtient de cette dernière en intercalant entre certains (ou entre tous) éléments consécutifs p_i, p_{i+1} de nouveaux éléments.

Nous dirons qu'une suite des chaînes $\{\{p_i^{(k)}\}\}$, $(k=1, 2, \cdots)$, est *une suite convergente de subdivisions liant a à b*, si (1) $\{p_i^{(k)}\}$ sont des ϵ_k-chaînes unissant a et b, avec $\lim_{k=\infty} \epsilon_k=0$; (2) $\{p_i^{(k+1)}\}$ est une subdivision de $\{p_i^{(k)}\}$, et (3) $\lim_{k=\infty} L\{p_i^{(k)}\}$ existe (mais peut être fini ou infini).

La "distance" géodésique $\bar{\rho}(a, b)$ peut être maintenant définie comme suit:

$$\bar{\rho}(a, b)=\text{borne inf.} \lim_{k=\infty} L\{p_i^{(k)}\}, \tag{3.4}$$

les $\{\{p_i^{(k)}\}\}$ parcourant toutes les suites convergentes de subdivisions liant a à b.†

* M. K. Menger a considéré, dans les espaces distancés, une distance géodésique égale, d'après le modèle classique, à la borne inférieure des longueurs des arcs unissant deux points a et b de E (cf. Mathematische Annalen, vol. 103 (1930), p. 492).

† Il est à remarquer que si r' est une *distance complète*, $\bar{\rho}$ se confond avec la distance géodésique formée d'après le modèle classique.

On démontre pour $\bar{\rho}$ les propriétés suivantes: (i) $\bar{\rho}(x,y) \geqq 0$, $\bar{\rho}(x, x) = 0$ (mais $\bar{\rho}(x, y)$ peut être infini, $\bar{\rho}(x, y)$ peut être $=0$ sans que $x = y$ et il se peut que $\bar{\rho}(x, y) \neq \bar{\rho}(y, x)$); (ii) $\bar{\rho}(x, y) + \bar{\rho}(y, z) \geqq \bar{\rho}(x, z)$. A cause de l'inégalité triangulaire (ii) on peut considérer $\bar{\rho}$ comme une sorte de distance.

On démontre de plus la propriété: (iii) *la "distance" géodésique $\bar{\rho}$, si elle est finie, est toujours presque-convexe.*

En revenant maintenant aux conditions du Théorème 2, on prouve d'abord que la distance ρ est égale à la distance géodésique construite à l'aide de l'écart r et le théorème résulte alors de la propriété (iii).

4. **Les écarts complets et presque-convexes.** Les Théorèmes 1 et 2 donnent ensemble le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si l'écart r, satisfaisant à la condition* (X) *du* §2, *est complet et presque-convexe, il en est de même de la distance ρ.*

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'un espace avec une distance complète et presque-convexe possède des propriétés remarquables. Ainsi par exemple, dans un tel espace, deux points quelconques a et b peuvent être liés par un arc *presque-géodésique* de longueur inférieure à $\rho(a, b) + \epsilon$, pour $\epsilon > 0$ quelconque. Il en résulte la propriété topologique suivante: *l'espace est quasi-péanien.**

PARIS, FRANCE

---

* D'après M. K. Borsuk on appelle ainsi un espace connexe, localement connexe, et métrisable à l'aide d'une distance complète.