LA DÉRIVÉE ARÉOLAIRE ET LES POTENTIELS GÉNÉRALISÉS DANS LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

PAR N. THÉODORESCO

1. *Introduction.* La lecture des travaux de M. Griffith C. Evans sur un système elliptique correspondant à l'équation de Poisson et de ceux, plus récents, de M. J. H. Binney sur un système d'équations intégrales généralisant ce système, nous a permis de faire certains rapprochements avec la notion de *dérivée aréolaire* due à M. Pompeiu, que nous avons reprise et étudiée systématiquement, en 1931, dans notre Thèse de doctorat* et dans plusieurs autres mémoires.

La présente note a pour but d'établir ces rapprochements et, en même temps, de donner un exemple d'application de cette notion à des problèmes de la mécanique des milieux continus.

Pour ce qui concerne les considérations d'ordre historique, relatives à la dérivée aréolaire, jusqu'en 1930, nous renvoyons le lecteur au mémoire de M. E. R. Hedrick sur les fonctions non-analytiques.†

2. *La Dérivée Aréolaire et les Potentiels Généralisés.* La dérivée aréolaire est la limite du rapport

$$\frac{Df}{Dw} = \lim \frac{1}{2i} \frac{\int_C f(z)dz}{\iint_D dw}, \tag{1}$$

où $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est une fonction complexe de z, *non-analytique*, dont nous supposerons seulement les parties réelle et imaginaire continues dans un domaine connexe; C est une courbe simple fermée et rectifiable, D le domaine limité par C; la limite est prise lorsque C se resserre indéfiniment autour d'un point M du plan.

Cette notion avait d'ailleurs été considérée par plusieurs auteurs avant nous, mais, ils avaient envisagé uniquement *le*

* N. Théodoresco, *La dérivée aréolaire et ses applications à la physique mathématique*, Thèse, Paris, 1931.

† E. R. Hedrick, *Non-analytic functions of a complex variable*, this Bulletin, vol. 39 (1933).

cas où $f(z)$ admet des dérivées partielles du premier ordre continues.

Dans ce cas, la dérivée acquiert l'expression simple suivante

$$\frac{Df}{Dw} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right], \tag{2}$$

et l'on constate que les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ satisfont au système suivant

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 2A(x, y), \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 2B(x, y), \tag{3}$$

où

$$A + iB = \phi(z) = \frac{Df}{Dw}\cdot$$

Or, cette restriction a l'inconvénient de limiter la portée de la notion de dérivée et de la rattacher d'une manière un peu artificielle à celle de dérivée partielle.

C'est pourquoi nous avons pris en considération la classe des fonctions continues pour lesquelles la dérivée (1) existe sur un ensemble de points. Nous avons appelé ces fonctions *monogènes* (α) sur l'ensemble en question et avons montré le résultat suivant.

La fonction $f(z)$ étant continue dans un domaine Δ, si l'intégrale

$$F(C) = \int_C f(z)dz \tag{4}$$

est une fonction additive et absolument continue du domaine D, limité par la courbe C supposée simple, fermée, et rectifiable, la dérivée aréolaire (1) de la fonction $f(z)$ existe presque partout dans Δ et est une fonction intégrable (L) sur tout $D<\Delta$.

On a en plus,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)dz - \frac{1}{\pi}\int\int_D \phi(v)dw = 0 \tag{5}$$

pour tout couple C, D, la première intégrale étant prise au sens ordinaire, la seconde au sens de Lebesgue.

Ce résultat est complété par un théorème réciproque.

Si deux fonctions: $f(z)$ finie et continue dans une région bornée Δ et $\phi(z)$ intégrable (L) sur tout ensemble mesurable $E<\Delta$, satisfont à la relation (5) *pour tout contour rectifiable, simple et fermé, limitant un domaine $D<\Delta$, $f(z)$ est presque partout monogène (α) dans Δ, sa dérivée aréolaire ne diffèrent de $\phi(z)$ que sur un ensemble de mesure nulle.*

Ce résultat généralise le théorème classique de Morera et peut servir comme critérium de reconnaissance des fonctions monogènes (α) presque partout dans un domaine.

Les fonctions monogènes (α), dont la dérivée aréolaire est *bornée et intégrable* (L), peuvent être représentées par la formule

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\phi(v)}{v-\zeta}\,dw, \tag{6}$$

où le premier terme est holomorphe et le second, que nous allons désigner par $g(\zeta)$, est monogène (α) dans D et holomorphe au sens classique à l'extérieur de D.

Ces résultats ont été ensuite étendus par M. Gr. C. Moisil au cas où $F(c)$ n'est pas absolument continue dans D, mais seulement à variation bornée, et n'a que des discontinuités de première espèce, en généralisant de cette manière des résultats de M. Evans en théorie du potentiel.*

Il montre qu'*il existe une fonction additive d'ensembles mesurables (B), soit $\Phi(e)$, telle que pour toute courbe C pour laquelle $F(C)$ est continue, on ait*

$$F(C) = \Phi(D). \tag{7}$$

L'intégrale

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{d\Phi(e)}{v-\zeta} \tag{8}$$

est dans ce cas la solution de l'équation fonctionnelle (5).

M. Moisil a même étendu ces résultats à une classe de systèmes d'équations fonctionnelles dans un espace à n dimensions.

En 1932, indépendamment de nos travaux, en poursuivant

---

* Gr. C. Moisil, *Sur un système d'équations fonctionnelles*, Comptes Rendus, vol. 192 (1931), p. 1344.

ses recherches sur le potentiel, M. Evans* a abordé l'étude du système (3), dans la supposition générale que les fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ sont seulement bornées et intégrables (L), système que nous avons, à notre tour, examiné dans des hypothèses plus restrictives et remplacé ensuite par l'équation fonctionnelle (5), qui nous permettait de faire des applications physiques de la notion de dérivée aréolaire.

M. Evans établit les conditions dans lesquelles le système (3) admet une solution représentable par des potentiels.

Plus tard, en 1935, M. J. H. Binney,† entreprend, sans connaître nos résultats, une recherche sur un système de relations intégrales qui se ramène, de même, à l'équation fonctionnelle (5).

Par l'emploi des méthodes de M. Evans, il trouve un théorème qui étend notre théorème de Morera (et aussi celui de Moisil) au cas général où l'intégrale de Cauchy (4) est une fonction $\phi(D)=A(D)+iB(D)$ complètement additive d'ensembles mesurables (B) dans un domaine simplement connexe Δ, D désignant le domaine limité par une courbe simple rectifiable et fermée C, la fonction $f(z)=P+iQ$ étant seulement intégrable (L) dans Δ. Moyennant quelques restrictions relatives à l'existence de certaines intégrales, M. Binney établit aussi l'extension de notre formule (6) et la formule donnée par Moisil, où la fonction $g(\zeta)$ prend la forme d'intégrale de Stieltjes (8).

Ce bref aperçu historique de la question complète sur quelques points celui donné par M. Hedrick dans le mémoire précité, qui s'arrêtait à l'année 1930.

3. *Les Applications à la Mécanique des Milieux Continus.* La notion de dérivée aréolaire, prise au sens général, s'est montrée utile même dans les applications physiques. Elle nous a permis, dans quelques problèmes de la mécanique des milieux continus, de substituer aux équations aux dérivées partielles du second ordre des équations fonctionnelles du type (5), et aux phénomènes ponctuels exprimables par des relations entre les dérivées partielles, des phénomènes globaux, c'est-à-dire intéressant

* G. C. Evans, *An elliptic system corresponding to Poisson's equation*, Szeged Acta Litterarum ac Scientiarum, vol. 6 (1932).

† J. H. Binney, *An elliptic system of integral equations on summable functions*, Transactions of this Society, vol. 37 (1935).

toute portion finie détachée par la pensée dans le milieu considéré.

Cette interprétation des faits est bien dans l'esprit des idées de M. Evans, qui remplace l'équation de Laplace par des relations globales dans le problème de Dirichlet, comme l'ont fait ensuite M. Bouligand pour le problème de Neumann et M. Oseen pour les équations des fluides visqueux.

Dans ce qui suit, nous donnerons *un exemple d'application de la théorie de la dérivée aréolaire à la recherche de la distribution des efforts intérieurs dans un milieu continu.*

Nous nous bornerons à étudier un milieu plan et nous supposerons qu'il s'agit d'*un milieu pour lequel l'ellipse de Lamé se réduit à un cercle.*

En désignant par T_x, T_y les composantes des efforts intérieurs sur les axes Ox, Oy, on aura,

$$T_x = \alpha X_1 + \beta X_2, \qquad T_y = \alpha Y_1 + \beta Y_2,$$

où $\alpha = \cos\phi$, $\beta = \sin\phi$, ϕ étant l'angle de la normale à un élément détaché du milieu, avec l'axe Ox.

Nous supposerons qu'en chaque point M du milieu s'exercent des forces extérieures X, Y bornées et intégrables (L). Il ne sera donc point possible de chercher les équations d'équilibre par la méthode classique.

Mais cela ne constitue pas un inconvénient, car les équations de l'équilibre intérieur peuvent être conservées sous leur forme globale, ne faisant pas intervenir la dérivée partielle:

$$\int_\gamma (\alpha X_1 + \beta X_2) ds = \iint_\delta \rho X d\sigma,$$

$$\int_\gamma (\alpha Y_1 + \beta Y_2) ds = \iint_\delta \rho Y d\sigma,$$

$$\int_\gamma [\alpha(xY_1 - yX_1) + \beta(xY_2 - yX_2)] ds = \iint_\delta \rho(xY - yX) d\sigma,$$

ρ étant la densité du milieu au point M, les fonctions X_1, Y_1, X_2, Y_2 étant supposées continues dans le milieu; γ est un contour simple rectifiable et intérieur au milieu, que, pour plus de simplicité, nous supposerons doué d'une tangente unique variant d'une manière continue; δ est le domaine limité par γ. La troisième équation, dont on déduit, par l'application de la formule de Green, $X_2 = Y_1$, peut conduire au même résultat, même dans ce cas général où l'emploi de la formule de Green n'est plus possible, si l'on fait appel à *la dérivée extérieure* de M. Cartan* qui est d'ailleurs en étroite relation avec la dérivée aréolaire.

On sait que si l'on a

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int\int_\delta Rdxdy,$$

avec $R(x, y)$ bornée et intégrable (L), on appelle R la dérivée extérieure de la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$, et que

$$\int_\gamma \lambda(Pdx + Qdy) = \int\int_\delta \left[\lambda R + Q\frac{\partial y}{\partial x} - P\frac{\partial y}{\partial y}\right] dxdy \tag{9}$$

pour toute fonction $\lambda(x, y)$ continue et à dérivées partielles du premier ordre continues.

En écrivant la troisième équation d'équilibre sous la forme

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2)ds - \int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2)ds = \int\int_\delta \rho(xY - yX)d\sigma,$$

et appliquant à chacun des termes du premier membre l'opération (9), tout en tenant compte des autres équations d'équilibre, on obtient

$$\int_\gamma x(\alpha Y_1 + \beta Y_2)ds = \int\int_\delta (\rho x Y + Y_1)d\sigma,$$

$$\int_\gamma y(\alpha X_1 + \beta X_2)ds = \int\int_\delta (\rho y X + X_2)d\sigma,$$

d'où

$$\int\int_\delta (X_2 - Y_1)d\sigma = 0,$$

et, puisque les fonctions X_1, Y_1, X_2, Y_2, sont supposées continues,

$$X_2 = Y_1,$$

* Voir N. Théodoresco, *Sur l'emploi de conditions globales dans quelques problèmes physiques*, Annali di Matematica, (4), vol. 11 (1932).

conclusion identique à celle qu'on eût obtenue par l'emploi de la formule de Green, si cela avait été possible.

Posons $X_1 = N_1$, $Y_2 = N_2$, $X_2 = Y_1 = T$, et imposons à l'ellipse des efforts (de Lamé) la condition de se réduire à un cercle:

$$\mathfrak{T}^2 = T_x^2 + T_y^2 = N_1^2 + T^2 + (N_1^2 - N_2^2) \cos 2\phi + T(N_1 + N_2) \sin 2\phi$$

doit être indépendant de ϕ, c'est-à-dire qu'on doit avoir $N_1 + N_2 = 0$; soit, $N_1 = -N_2 = N$.

Les équations d'équilibre deviennent dans ce cas

$$\int_\gamma N dy - T dx = \iint_\delta \rho X,$$

$$\int_\gamma T dy + N dx = \iint_\delta \rho Y,$$

où

$$dx = -\beta ds, \qquad dy = \alpha ds.$$

Posons

$$T + iN = f(z), \qquad \rho(Y + iX) = 2\phi(z).$$

Le système d'équations fonctionnelles (10) devient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz - \frac{1}{\pi} \iint_\delta \phi(v) d\sigma$$

pour tout couple γ, δ de D, équation qui exprime, d'après le théorème que nous avons donné au §2, le fait que $\phi(z)$ est presque partout la dérivée aréolaire de $f(z)$.

En introduisant la fonction

$$g(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\phi(v)}{v - \zeta} d\sigma,$$

on a une intégrale particulière de cette équation. L'intégrale générale sera $f(z) = h(z) + g(z)$, où $h(z) = h_0(x, y) + ih_1(x, y)$ est un fonction holomorphe dans D. Posons

$$g(z) = g_0(x, y) + ig_1(x, y).$$

Supposons que sur le contour C du milieu D l'on connaisse une relation linéaire entre T et N, soit

$$a(s)T(s) + b(s)N(s) = c(s),$$

avec $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ fonctions continues connues.

La détermination des efforts revient à la résolution d'un problème d'Hilbert pour la fonction holomorphe $h(z)$, car la condition aux limites imposée peut s'écrire

$$a(s)h_0(s) + b(s)h_1(s) = c(s) - [a(s)g_0(s) + b(s)g_1(s)],$$

le second membre étant parfaitement connu et continu (car $g(z)$ est continue dans tout le plan).

Par exemple, supposons connu en chaque point de C l'effort normal T_N

$$T_N = \alpha T_x + \beta T_y = N \cos 2\phi + T \sin 2\phi = c(s).$$

Mais cos 2ϕ et sin 2ϕ sont connus le long de C et si l'on suppose que C est doué d'une tangente unique variant d'une manière continue, le problème revient à celui d'Hilbert.

En conclusion, la méthode de la dérivée aréolaire permet de résoudre ce problème de la mécanique des milieux continus sans passer par les dérivées partielles, donc sans imposer à la distribution des efforts la condition d'être représentable *à priori* par des fonctions dérivables, ni à celle des forces extérieures d'être au moins continue à la Lipschitz, afin d'assurer aux équations aux dérivées partielles introduites des intégrales représentables par des potentiels.

Nous croyons même, qu'en procédant de la sorte, on suit une voie naturelle, qui fait remonter directement des conditions d'équilibre écrites sous forme globale, c'est-à-dire sous la forme qui est la plus conforme à la qualité de continuité attribuée au milieu, à la solution du problème proposé.

La formule, qui exprime l'intégrale, est simple et naturelle. Elle est bien en accord avec les idées de M. Evans sur le problème de Dirichlet, et nos résultats concernant l'équation fonctionnelle (5), que M. Binney a étendus à des cas très généraux, permettent d'envisager, le cas échéant, des problèmes très amples.

BUCAREST, ROUMANIE