$$\gamma_{hij} = \gamma_{jih} \tag{12}$$

where i takes on a definite set of $n-m$ values of the integers $1, 2, \cdots, n$ including the value k, and h and j take on those m values that i cannot assume. If each of $n-m$ congruences forms a system of parallels with respect to every one of the remaining m congruences equations (11) are satisfied for $h = 1, 2, 3, \cdots, n$; $i = i_1, i_2, \cdots, i_{n-m}$; $j = j_1, \cdots, j_m$; $i \neq j$, (12) is surely satisfied, and we have the following theorem.

THEOREM. *If each of $n-m$ congruences forms a system of parallels with respect to every one of the remaining m congruences, then the former have a family of m-dimensional hypersurfaces as orthogonal trajectories.* When $m = n-1$ this reduces to one of Lipka's theorems.

PRINCETON UNIVERSITY

SUR LES VALEURS ASYMPTOTIQUES DES COEFFICIENTS DE COTES

PAR J. OUSPENSKY

1. Parmi les formules de quadratures pour le calcul approché des intégrales définies la plus simple est, sans contredit, celle de Cotes, qui correspond à la division de l'intervalle d'intégration en parties égales. Supposons l'intervalle d'intégration $(0, 1)$ subdivisé en n parties égales; alors on peut déterminer $n+1$ constantes $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$, nommées "coefficients de Cotes", de manière que la formule

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + A_2 f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + A_n f(1)$$

soit exacte pour toute fonction $f(x)$ se réduisant à un polynôme d'un degré n'excédant pas $n-1$. Dans d'autres cas cette "formule de Cotes" n'est qu'approchée. Comme le degré d'approximation fourni par elle depend des valeurs numériques des coefficients $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$, la question sur les valeurs asymptotiques de ces coefficients pour n très grand n'est pas, ce me semble, dénuée de quelque interêt.

2. En posant

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{n}, \qquad x_2 = \frac{2}{n}, \qquad \cdots, \qquad x_n = 1,$$

et

$$\varphi(x) = x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{n}{n}\right),$$

on a l'expression suivante pour le coefficient A_k, k étant un des nombres $0, 1, 2, \cdots, n$:

$$A_k = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}.$$

Mais comme l'on sait que

$$\varphi'(x_k) = \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{n}\cdot\frac{-2}{n}\cdots\frac{-(n-k)}{n}$$
$$= (-1)^{n-k}\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)}{n^n},$$

on trouve après quelques réductions faciles:

$$A_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)}\int_0^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{x-k}\,dx.$$

Ainsi la question se réduit à trouver l'expression asymptotique pour n très grand de l'intégrale:

$$(1) \qquad J_n = \int_0^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{x-k}\,dx,$$

k étant un nombre quelconque de la suite $0, 1, 2, \cdots, n$. En faisant usage des formules bien connues

$$x(x-1)\cdots(x-n) = (-1)^n \frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n+1-x)\sin \pi x}{\pi},$$

$$\frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n+1-x)}{\Gamma(n+2)} = \int_0^1 \xi^x(1-\xi)^{n-x}\,d\xi,$$

nous allons présenter d'abord J_n sous la forme d'une intégrale double:

$$J_n = \frac{(-1)^n \Gamma(n+2)}{\pi} \int_0^1 (1-\xi)^n d\xi \int_0^n e^{x \log \frac{\xi}{1-\xi}} \frac{\sin \pi x}{x-k} dx.$$

Ensuite, en utilisant la formule évidente

$$\int_0^n e^{x \log \frac{\xi}{1-\xi}} \frac{\sin \pi x}{x-k} dx = (-1)^k \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^k \times \left[\int_0^{n-k} e^{x \log \frac{\xi}{1-\xi}} \frac{\sin \pi x}{x} dx + \int_0^k e^{x \log \frac{\xi}{1-\xi}} \frac{\sin \pi x}{x} dx\right],$$

et en transformant les intégrales du second membre à l'aide de la formule

$$\int_0^h e^{\alpha x} \frac{\sin \pi x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tan} \frac{\alpha}{\pi} + \pi(-1)^{h-1} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{hx} dx}{\pi^2 + x^2},$$

que l'on établit aisément en supposant h un entier quelconque, on parvient à cette expression définitive de J_n:

$$J_n = (-1)^{n-k} \Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1) + \Gamma(n+2) \times \left[(-1)^{n-1} \int_0^1 \xi^k (1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log \frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx} dx}{\pi^2 + x^2} - \int_0^1 \xi^k (1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log \frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{(n-k)x} dx}{\pi^2 + x^2}\right].$$

Nous allons faire usage de cette formule en supposant d'abord k différent de 0 et n. On voit de suite qu'en posant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} P_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \xi^k (1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log \frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx} dx}{\pi^2 + x^2}; \\ P_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \xi^k (1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log \frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{(n-k)x}}{\pi^2 + x^2} dx; \\ P_3 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \xi^k (1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log \frac{\xi}{1-\xi}} \frac{e^{kx} dx}{\pi^2 + x^2}; \\ P_4 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \xi^k (1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log \frac{\xi}{1-\xi}} \frac{e^{(n-k)x} dx}{\pi^2 + x^2} \end{aligned} \right.$$

on a

$$(3) \qquad J_n = (-1)^{n-k}\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)+\Gamma(n+2)$$
$$\times[(-1)^{n-1}P_1-P_2+(-1)^{n-1}P_3-P_4].$$

Mais comme

$$\int_{-\infty}^{\log\frac{\xi}{1-\xi}}\frac{e^{kx}\,dx}{\pi^2+x^2}<\int_{-\infty}^{\log\frac{\xi}{1-\xi}}e^{kx}\,dx=\frac{\xi^k}{k(1-\xi)^k},$$

$$\int_{-\infty}^{\log\frac{\xi}{1-\xi}}\frac{e^{(n-k)x}\,dx}{\pi^2+x^2}<\frac{\xi^{n-k}}{(n-k)(1-\xi)^{n-k}},$$

on voit immédiatement que

$$0<P_3<\frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{2}}\xi^n\,d\xi=\frac{1}{k(n+1)2^{n+1}};$$

$$0<P_4<\frac{1}{n-k}\int_0^{\frac{1}{2}}\xi^n\,d\xi=\frac{1}{(n-k)(n+1)2^{n+1}},$$

ce qui permet de présenter la formule (3) de cette manière:

$$(4) \qquad J_n = (-1)^{n-k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)+\Gamma(n+2)$$
$$\times\left[(-1)^{n-1}P_1-P_2+\frac{\Theta}{k(n-k)2^{n+1}}\right],\quad -1<\Theta<1.$$

Toute la question se réduit ainsi à trouver les expressions asymptotiques de P_1 et P_2, ce qui présente un peu plus de difficulté.

3. La solution de cette question dépend en grande partie de la recherche de la valeur asymptotique de l'intégrale

$$K_n=\int_0^h\frac{(1-x)^n\,dx}{\left(\log\frac{1-x}{x}\right)^s}$$

pour n indéfiniment croissant, tandis que h est un nombre fixe, satisfaisant aux inégalités

$$0<h<\frac{1}{2},$$

et s un nombre entier positif donné. Considérons l'intégrale un peu plus générale

$$K_n(\alpha) = \int_0^h \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha (1-x)^n}{\left(\log \frac{1-x}{x}\right)^s} dx, \tag{5}$$

qui dépend d'un paramètre α et se réduit à K_n pour $\alpha = 0$. Nous allons supposer dans la suite que

$$-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 0.$$

L'inégalité presque évidente

$$0 < \int_0^h \frac{(1-x)^{n-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx}{\left(\log \frac{1-x}{x}\right)^k} < \frac{1}{\left(\log \frac{1-h}{h}\right)^k} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)},$$

et la formule asymptotique bien connue

$$\lim \frac{\Gamma(n+\beta)}{n^\beta \Gamma(n)} = 1, \text{ pour } n = \infty,$$

font voir que pour chaque valeur fixe de k, l'intégrale

$$\int_0^h \frac{(1-x)^{n-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx}{\left(\log \frac{1-x}{x}\right)^k}$$

est de l'ordre $1/n^{3/2}$, c'est à dire qu'il existe une constante L telle que l'intégrale précédente soit $< L/n^{3/2}$.

Il suit immédiatement de cette remarque que les valeurs que prennent $K_n(\alpha)$ et ses dérivées pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ se réduisent aux quantités d'ordre $O(1/n)^{3/2}$. Ensuite la dérivée d'ordre s de $K_n(\alpha)$ se present sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d^s K_n(\alpha)}{d\alpha^s} &= \int_0^h (1-x)^{n+\alpha} x^{-\alpha} dx \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2)} - \int_h^1 (1-x)^{n+\alpha} x^{-\alpha} dx. \end{aligned} \tag{6}$$

L'intégrale qui figure dans le second membre de cette formule est positive et plus petite que $(1-h)^{n-1/2}$; de l'autre côté les formules asymptotiques bien connues font voir que la quantité

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2)}$$

peut être présentée ainsi

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}}+\frac{\varphi(n,\alpha)}{n^{2-\alpha}},$$

$\varphi(n,\alpha)$ étant une fonction bornée de n et de α pour toutes les valeurs de n et pour toutes les valeurs de α comprises dans l'intervalle $(-\frac{1}{2}, 0)$. Il suit de ces remarques qu'on peut poser

$$\frac{d^sK_n(\alpha)}{d\alpha^s}=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}}+\frac{\psi(n,\alpha)}{n^{2-\alpha}},$$

où la fonction $\psi(n,\alpha)$ est de la même nature que la fonction $\varphi(n,\alpha)$ tout à l'heure mentionnée. On a d'après la formule de Taylor

$$K_n(\alpha)=K_n(-\tfrac{1}{2})+(\alpha+\tfrac{1}{2})K_n'(-\tfrac{1}{2})+\cdots$$
$$+(\alpha+\tfrac{1}{2})^{s-1}\frac{K_n^{(s-1)}(-\frac{1}{2})}{(s-1)!}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\alpha}\frac{(\alpha-x)^{s-1}}{(s-1)!}K_n^{(s)}(x)\,dx.$$

Par ce qui précède on a uniformément en α

$$K_n(-\tfrac{1}{2})+(\alpha+\tfrac{1}{2})K_n'(-\tfrac{1}{2})+\cdots$$
$$+(\alpha+\tfrac{1}{2})^{s-1}\frac{K_n^{(s-1)}(-\frac{1}{2})}{(s-1)!}=O(1/n^{3/2}).$$

D'autre part en substituant au lieu de $K_n^{(s)}(\alpha)$ son expression (6) on obtient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\alpha}\frac{(\alpha-x)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{d^sK_n(x)}{dx^s}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\alpha}\frac{(\alpha-x)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{\Gamma(1-x)}{n^{1-x}}dx$$
$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{\alpha}\frac{(\alpha-x)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{\psi(n,x)}{n^{2-x}}dx.$$

La dernière intégrale est manifestement une quantité d'ordre $O(1/n^2)$ indépendamment de α. Quant à la première, l'application répétée de l'intégration par parties conduit à ce résultat

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\alpha} \frac{(\alpha - x)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\Gamma(1-x)}{n^{1-x}} dx$$
$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}(\log n)^s}\left[1 + \frac{\lambda(n, \alpha)}{\log n}\right] + O(1/n^{3/2}),$$

$\lambda(n, \alpha)$ désignant une fonction bornée de n et de α. Enfin nous arrivons à cette expression asymptotique de $K_n(\alpha)$:

$$K_n(\alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}(\log n)^s}\left[1 + \frac{\Lambda(n, \alpha)}{\log n}\right],$$

la fonction $\Lambda(n, \alpha)$ étant de même nature que $\lambda(n, \alpha)$. En posant $\alpha = 0$ nous voyons que

$$\int_0^h \frac{(1-x)^n dx}{\left(\log \frac{1-x}{x}\right)^s} \sim \frac{1}{n(\log n)^s},$$

ou d'une manière plus précise

$$(7) \qquad \int_0^h \frac{(1-x)^n dx}{\left(\log \frac{1-x}{x}\right)^s} = \frac{1}{n(\log n)^s}\left[1 + \frac{\mu_n}{\log n}\right],$$

μ_n désignant une fonction bornée de n.

4. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\omega} \frac{e^{hx} dx}{\pi^2 + x^2},$$

où h est un nombre entier positif et ω un nombre positif quelconque. L'intégration par parties donne

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{\omega} \frac{e^{hx} dx}{\pi^2 + x^2} = \frac{e^{h\omega}}{h(\pi^2 + \omega^2)} + \frac{2}{h}\int_{-\infty}^{\omega} \frac{e^{hx} x dx}{(\pi^2 + x^2)^2}.$$

En intégrant par parties de nouveau, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\omega} \frac{e^{hx} x dx}{(\pi^2 + x^2)^2} = \frac{e^{h\omega}\omega}{h(\pi^2 + \omega^2)^2} + \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\omega} \frac{e^{hx}(3x^2 - \pi^2)}{(\pi^2 + x^2)^3} dx,$$

mais comme

$$\text{val. abs.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hx}(3x^2-\pi^2)}{(\pi^2+x^2)^3}\,dx < 3\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hx}dx}{(\pi^2+x^2)^2}$$

$$< \frac{3e^{h\omega}\omega}{(\pi^2+\omega^2)^2} + \frac{3}{h\pi^4} < \frac{3e^{h\omega}}{\omega^3} + \frac{3}{h\pi^4} < \frac{6e^{h\omega}}{\omega^3},$$

nous voyons que

$$\text{val. abs.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hx}x\,dx}{(\pi^2+x^2)^2} < \frac{7e^{h\omega}}{h\omega^3}.$$

Cette inégalité combinée avec la formule (8) nous conduit à cette formule utile

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hx}dx}{\pi^2+x^2} = \frac{e^{h\omega}}{h(\pi^2+\omega^2)} + \frac{\mu e^{h\omega}}{h^2\omega^3}, \tag{9}$$

μ désignant une quantité dont la valeur absolue est toujours < 14.

5. Ces préliminaires établis, désignons par ξ_0 une racine de l'équation

$$\log\frac{1-\xi_0}{\xi_0} = 1,$$

qui est naturellement > 0 et $< {}^1/_2$, et considérons l'intégrale

$$\int_0^{\xi_0} \xi^k(1-\xi)^{n-k}d\xi \int_{-\infty}^{\log\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx}dx}{\pi^2+x^2}.$$

En utilisant la formule (9) nous aurons

$$\int_0^{\xi_0} \xi^k(1-\xi)^{n-k}d\xi \int_{-\infty}^{\log\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx}dx}{\pi^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2} + \frac{M'}{k^2}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n}{\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3}d\xi.$$

Mais

$$\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}$$

$$= \int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2} - \pi^2\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\left(\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right)\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2},$$

et

$$\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\left(\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right)\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2} < \int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4},$$

donc, en tenant compte de la formule asymptotique (7), nous avons d'abord

$$\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2} \sim \frac{1}{n(\log n)^2},$$

et ensuite nous voyons que le rapport de l'intégrale

$$\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3} \quad \text{à} \quad \int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}$$

est asymptotique à

$$\frac{1}{\log n},$$

ce qui nous conduit à la formule

$$\int_0^{\xi_0} \xi^k(1-\xi)^{n-k} d\xi \int_{-\infty}^{\log\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx}dx}{\pi^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}\left[1+\frac{N}{k\log n}\right],$$

où N pour des valeurs suffisamment grandes de n et quelque soit k reste au dessous d'une limite assignable, p. e., 14. D'un autre côté, on trouve immédiatement

$$\int_{\xi_0}^{\frac{1}{2}} \xi^k(1-\xi)^{n-k}d\xi \int_{-\infty}^{\log\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx}dx}{\pi^2+x^2}$$
$$< \frac{1}{k}\int_{\xi_0}^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^n d\xi < \frac{(1-\xi_0)^{n+1}}{k(n+1)},$$

et le rapport de cette quantité

$$\frac{(1-\xi_0)^{n+1}}{k(n+1)} \quad \text{à} \quad \frac{1}{k}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}$$

étant pour n suffisamment grand plus petit que, p. e.,

$$2(1-\xi_0)^{n+1}(\log n)^2,$$

peut être mis sous la forme

$$N'/(k\log n) \quad \text{où} \quad N'<2n(1-\xi_0)^{n+1}(\log n)^2$$

tend vers zéro n grandissant indéfiniment. Ainsi nous avons enfin

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \xi^k(1-\xi)^{n-k}d\xi \int_{-\infty}^{\log\frac{1-\xi}{\xi}} \frac{e^{kx}dx}{\pi^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}\left[1+\frac{G}{k\log n}\right],$$

ou bien

$$P_1 = \frac{1}{k}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}\left[1+\frac{G}{k\log n}\right],$$

G désignant une quantité qui reste au dessous de 15 pour n suffisamment grand quelque soit k. De même

$$P_2 = \frac{1}{n-k}\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}\left[1+\frac{G'}{(n-k)\log n}\right],$$

où G' est aussi <15 pour n assez grand quelque soit k. Il suffit maintenant d'introduire ces expressions dans la formule (4) pour avoir

$$\begin{aligned} J_n = {} & (-1)^{n-k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)+\Gamma(n+2) \\ & \times\left\{\int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2+\left(\log\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{k}-\frac{1}{n-k}\right.\right. \\ & \qquad \left.\left.+\frac{(-1)^{n-1}G}{k^2\log n}-\frac{G'}{(n-k)^2\log n}\right]+\frac{\Theta}{k(n-k)2^{n+1}}\right\}\end{aligned}$$

et aussi

$$A_k = \frac{1}{n} + \frac{\Gamma(n+2)}{n\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$$

$$\times \left\{ \int_0^{\xi_0} \frac{(1-\xi)^n d\xi}{\pi^2 + \left(\log \frac{1-\xi}{\xi}\right)^2} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(-1)^{k-1}G}{k^2 \log n} + \frac{(-1)^{n-k-1}G'}{(n-k)^2 \log n} \right] + \frac{\Theta}{k(n-k)2^{n+1}} \right\}.$$

Le rapport de

$$\frac{\Theta}{k(n-k)2^{n+1}} \quad \text{à} \quad \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}$$

est plus petit que

$$\frac{1}{2^{n+1}\,|\,n-k+(-1)^n k\,|} < \frac{1}{2^{n+1}},$$

car le nombre entier $n-k+(-1)^n k$ ne devient jamais égal à zéro. De même la valeur absolue du rapport de

$$\frac{(-1)^{k-1}G}{k^2 \log n} + \frac{(-1)^{n-k-1}G'}{(n-k)^2 \log n} \quad \text{à} \quad \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}$$

pour n suffisamment grand, est plus petite que

$$\frac{15}{\log n} \cdot \frac{k^2 + (n-k)^2}{k(n-k)\,|\,n-k+(-1)^n k\,|},$$

c'est à dire pour n pair

$$\frac{15}{\log n} \cdot \frac{k^2 + (n-k)^2}{k(n-k)n},$$

et pour n impair

$$\frac{15}{\log n} \cdot \frac{k^2 + (n-k)^2}{k(n-k)\,|\,n-2k\,|}.$$

Or quel que soit $k = 1, 2, 3, \cdots, n-1$,

$$\frac{k^2 + (n-k)^2}{k(n-k)n} < 1, \quad n \text{ pair}$$

et

$$\frac{k^2 + (n-k)^2}{k(n-k)\,|\,n-2k\,|} < 3, \quad n \text{ impair}$$

de sorte que le rapport précédent est toujours plus petit que

$$\frac{45}{\log n}$$

et tend vers zéro quand n grandit indéfiniment. De tout ce qui précède il est maintenant facile de déduire cette expression asymptotique de A_k:

$$A_k \sim \frac{\Gamma(n+1)}{n(\log n)^2 \Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\right],$$

valable en ce sens que le rapport des deux membres de cette égalité tend uniformément vers 1, quand n croît au delà de toute limite, k ayant une valeur quelconque $1, 2, 3, \cdots, n-1$. Quant aux coefficients A_0 et A_n, l'analyse toute semblable et même un peu plus simple donne

$$A_0 = A_n \sim \frac{1}{n \log n}.$$

Ainsi nous avons

$$A_0 \sim \frac{1}{n \log n}, \quad A_1 \sim \frac{1}{(\log n)^2}, \quad A_2 \sim \frac{-n}{4(\log n)^2} \text{ etc.}$$

et pour $n = 2l$, p. e.,

$$A_l \sim \frac{(-1)^{l-1} 4^l}{\sqrt{\pi}\, l^{5/2} (\log 2l)^2}.$$

On voit que les coefficients $A_2, A_3, \cdots, A_{n-2}$ tendent vers l'infini, ce qui fait voir que la formule de Cotes perd, toute valeur pratique tant que le nombre des ordonnées devient considérable.

TORONTO, 25 Août, 1924.