

FEUILLETAGES SANS FEUILLE COMPACTE SUR LES FIBRÉS EN SURFACES SUR LE CERCLE

HAMIDOU DATHE*

Département de Mathématiques et Informatique
Université Cheikh Anta Diop
Dakar, Sénégal

ADAMOU SAIDOU†

Département de Mathématiques et Informatique
Université Abdou Moumouni
Niamey, Niger

Abstract

We prove that in general surface bundle over the circle with pseudo-Anosov monodromy can have taut foliation which cannot be conjugated to the fibration or the models foliations. We also build smooth minimal foliations on surfaces bundles over the circle whose fibers are not compact.

AMS Subject Classification:54C40, 14E20,46E25, 20C20

Keywords: feuilletages, fibrés, surfaces

1 Introduction

Dans cet article on s'intéresse aux feuilletages sans feuille compacte des variétés différentiables V qui sont des fibrés en surfaces sur le cercle. Dans le cas où la fibre est de genre 1, le difféomorphisme de monodromie du fibré sera supposé être un difféomorphisme d'Anosov et on dit que V est un *fibré d'Anosov*. Si la fibre est de genre > 1 , le difféomorphisme de monodromie est supposé être un difféomorphisme pseudo-Anosov et on dit que V est un *fibré pseudo-Anosov*. Dans les deux cas on peut construire ce qu'on peut appeler des *feuilletages modèles*: Ce sont en gros les feuilletages différentiables de codimension 1 minimaux et non singuliers obtenus sur V par suspension des *feuilletages caractéristiques* du difféomorphisme de monodromie. Les feuilletages sans feuille compacte non singuliers, de codimension 1 qui ne sont pas conjugués aux modèles seront dits *exotiques*. Dans [5] E. Ghys et V. Sergiescu ont montré un important résultat de classification qui stipule que les modèles sont, à conjugaison près, les seuls feuilletages de codimension 1 de classe C^2

*E-mail address: hamidou.dathe@yahoo.fr

†E-mail address: adamou_aka@yahoo.fr

sans feuille compacte sur un fibré d'Anosov fermé. Un tel théorème n'a aucune chance de se généraliser aux fibrés pseudo-Anosov pour plusieurs raisons dont celles-ci: contrairement aux fibrés d'Anosov, le premier nombre de Betti des fibrés pseudo-Anosov n'est pas nécessairement égal à 1, d'autre part la restriction du feuilletage à chaque fibre admet des singularités. Mais même en faisant certaines hypothèses restrictives sur le fibré pseudo-Anosov et sur le comportement du feuilletage par rapport à la fibration, on montre que le théorème de Ghys et Sergiescu ne s'étend pas.

Pour les feuillets différentiables sur des surfaces ouvertes (i.e non compactes), on sait que des phénomènes très complexes peuvent apparaître, en particulier si la surface est de genre infini. On pense par exemple aux flots sans ensemble minimal construits par Bénére et Meigniez (voir [2]). La situation opposée constituée par les flots dont toute orbite est dense a été étudiée par J.C. Bénére dans [1]. Il montre un important résultat d'existence selon lequel, sur toute surface ouverte orientable non planeire S il existe des feuillets minimaux orientables et différentiables. Nous étendons ce théorème à tous les fibrés d'Anosov ouverts et à certains fibrés pseudo-Anosov ouverts.

Nous remercions le referee anonyme pour ses remarques et suggestions qui ont considérablement amélioré la qualité de cet article.

2 Fibrés en surfaces fermées sur le cercle

Soit $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ un automorphisme hyperbolique (i.e $tr(A) > 2$) de \mathbb{R}^2 . Comme la matrice A laisse invariant \mathbb{Z}^2 , elle induit sur le tore T^2 un difféomorphisme φ dit *d'Anosov*. On pose $I = [0, 1]$ et on désigne par V le fibré obtenu en identifiant les deux composantes du bord de $T^2 \times I$ au moyen de φ .

$$V = T^2 \times I / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$$

V est appelé un *fibré d'Anosov* fermé de genre 1.

Les directions propres de A définissent deux feuillets transverses de \mathbb{R}^2 qui induisent deux feuillets minimaux de T^2 dont l'un noté \mathcal{F}_s est transversalement contracté par φ et l'autre noté \mathcal{F}_u est transversalement dilaté par φ . Ce sont les *feuillets caractéristiques* de φ . Les feuillets produits $\mathcal{F}_s \times I$ et $\mathcal{F}_u \times I$ passent sur V en deux feuillets que nous appellerons les *feuillets modèles* de V .

E. Ghys et V. Sergiescu ont montré le résultat de classification suivant:

Theorem 2.1. [5]. *Soit V un fibré d'Anosov fermé de genre 1. Tout feuilletage de codimension 1 transversalement orientable de classe C^r ($r \geq 2$) et sans feuille compacte sur V est C^{r-2} -conjugué à l'un des feuillets modèles de V .*

Dans toute la suite Σ désigne une surface fermée de genre $g \geq 2$.

Definition 2.2. Soit V un Σ -fibré sur S^1 , on dit que V est cyclique si la monodromie $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ induit un isomorphisme sans point fixe non nul sur $H_1(\Sigma)$.

Definition 2.3. Un difféomorphisme $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est dit pseudo-Anosov à 4 branches s'il existe deux feuillets \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sur Σ vérifiant les propriétés suivantes:

i) \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont transversalement orientés et mesurés. \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont singuliers avec des singularités qui sont des selles à quatre séparatrices, ils ont le même ensemble singulier K et sont transverses sur $\Sigma \setminus K$.

ii) Il existe une constante $\lambda > 1$ telle que :

$$\begin{aligned}\Psi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) &= (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1} \mu^s) \\ \Psi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u)\end{aligned}$$

La variété

$$M = \Sigma \times I / (x, 0) \sim (\psi(x), 1)$$

est dit un *fibré pseudo-Anosov*.

Les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont appelés respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de ψ et λ son coefficient de dilatation .

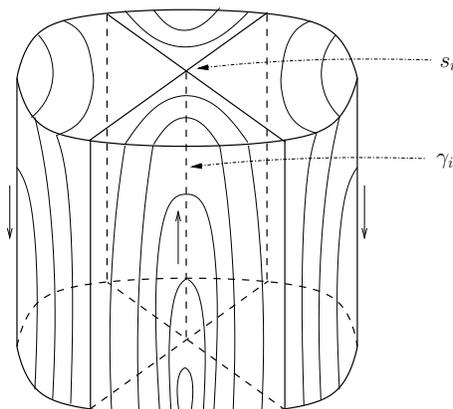
Example 2.4. Toute surface orientable fermée Σ de genre $g > 1$ est l'espace total d'un revêtement ramifié à deux feuillets sur le tore T^2 avec un lieu de ramification K tel que $\text{card}K = 2g - 2$. En effet perçons le tore T^2 en $n = \text{card}K$ points; cette variété ouverte se retracte sur un bouquet de $n + 1$ cercles ξ_1, \dots, ξ_{n+1} , où les ξ_1, \dots, ξ_{n-1} entourent chacun un trou et que ξ_n et ξ_{n+1} engendrent $\pi_1(T^2)$. Le dernier trou noté ∞ est homologiquement entouré par $[\xi_1] + \dots + [\xi_{n-1}]$. On construit le revêtement associé à l'homomorphisme $\pi_1(T^2 \setminus K) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui envoie ξ_1, \dots, ξ_{n-1} sur 1 et qui prend n'importe quelle valeur sur ξ_n et ξ_{n+1} . Ainsi la compactification donne un revêtement $p : \Sigma \longrightarrow T^2$ ramifié en chaque point de K .

Soit φ un Anosov linéaire de T^2 qui est l'identité sur K et qui se relève en ψ sur Σ . Le feuilletage stable est transversalement orientable et ses singularités ont 4 branches. Donc ψ est pseudo-Anosov et le feuilletage stable est défini comme un feuilletage mesuré par une 1-forme ω^s telle que $\psi^* \omega^s = \lambda^{-1} \omega^s$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$). De même on a $\psi^* \omega^u = \lambda \omega^u$ où ω^u définit le feuilletage instable de ψ .

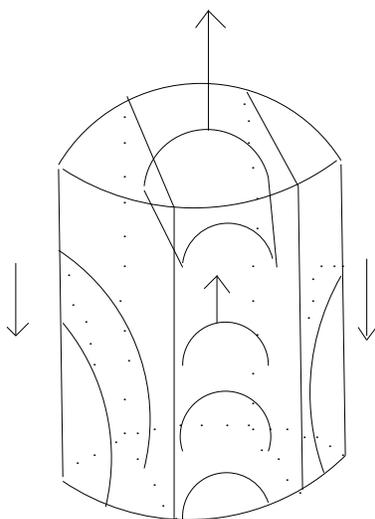
Remark 2.5. Comme $\psi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ est le relevé de $\varphi : T^2 \longrightarrow T^2$ alors le feuilletage stable de ψ est le relevé par p du feuilletage stable de φ . De même le feuilletage instable de ψ est le relevé par p du feuilletage instable de φ .

Nous pouvons construire sur M des feuilletages modèles en procédant de même que sur V .

Sur M notons ω^s et ω^u les 1-formes fermées définissant respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de ψ et λ le coefficient de dilatation de ψ . On suspend le feuilletage stable et le feuilletage instable de ψ . Sur $\Sigma \times I$, on considère la 1-forme $\Omega_\sigma = \lambda^{\varepsilon(\sigma)t} \omega^\sigma + dt$, avec $\sigma = s$ ou $\sigma = u$ et $\varepsilon(\sigma) = 1$ si $\sigma = s$ et -1 si $\sigma = u$. La 1-forme Ω_σ définit un feuilletage H^σ sur M ayant un nombre fini de cercles de contact $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ avec la fibration de M sur S^1 . Chaque cercle γ_i possède un voisinage tubulaire V_i feuilleté comme dans la figure ci-dessous:


 Figure 3. Voisinage tubulaire V_i .

Découpons les V_i , on obtient une 3-variété compacte W et H^σ induit sur le bord de W quatre composantes de Reeb planes R_i^j , $j = 1, \dots, 4$ qui sont deux à deux parallèles. On remplace V_i par un voisinage U_i muni d'un feuilletage obtenu en ouvrant V_i suivant γ_i et recollant chaque feuille de R_i^j avec une feuille de la face opposée. Ce procédé est la désingularisation. Plus précisément soit S l'ensemble singulier (fini) commun à ω^s et ω^u , sur $(\Sigma - S) \times \mathbb{R}$, les 1-formes $\lambda^s \omega^s + dt$ et $\lambda^u \omega^u + dt$ définissent deux feuilletages non singuliers H^s et H^u sur $M - S'$ avec $S' = \bigcup \gamma_i$ qui ont même classe d'Euler que la fibration. Le voisinage V_i de chaque cercle γ_i de S' est remplacé par un voisinage W_i muni du feuilletage \mathcal{V}^σ ($\sigma = s, u$) comme dans la figure ci-dessous.


 Figure 4. Voisinage tubulaire $(W_i, \mathcal{V}^\sigma)$.

Le feuilletage H^σ s'étend ainsi en un feuilletage transversalement affine \mathcal{F}^σ sur M de même classe d'Euler que la fibration. Nous appelons ces feuilletages les feuilletages modèles (positifs) de M . Il est aussi possible de construire des modèles (négatifs) de classe

d'Euler opposée à celle de la fibration. De même nous dirons qu'un feuilletage non singulier sur M est exotique s'il n'est conjugué à aucun modèle.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 transversalement orienté sur une variété M . On dit que \mathcal{F} est *transversalement affine* s'il est défini par une 1-forme α tel que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$, où β est une 1-forme vérifiant $d\beta = 0$. Si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 transversalement affine sur M , il existe une submersion $D : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ et une représentation $\rho : \pi_1(M) \rightarrow GA$ (GA est le groupe affine de \mathbb{R}) tels que:

- i) Si $p : \tilde{M} \rightarrow M$ est le revêtement universel de M , $p^*\mathcal{F}$ est défini par D
- ii) Pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$ et $x \in \tilde{M}$, $D(\gamma.x) = \rho(\gamma).D(x)$.

Le morphisme ρ est appelé le morphisme d'holonomie de \mathcal{F} et D sa développante. La partie de l'image de ρ qui est contenue dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}_+^*) est appelée l'holonomie abélienne (resp. linéaire) de \mathcal{F} . Le lemme suivant est un cas particulier du lemme de déformation des structures homogènes dû à Thurston.

Lemma 2.6. *Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages transversalement affines de codimension 1 sur une variété compacte. Si les morphismes d'holonomie de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont conjugués dans le groupe affine et que les feuilletages \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont proches, alors \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont isotopes.*

D'après [3] (prop.2.4), le morphisme d'holonomie d'un modèle d'un fibré pseudo-Anosov cyclique vérifie: Si i est l'injection canonique d'une fibre Σ dans M , on a $\rho \circ i_*(\pi_1\Sigma) \subset \mathbb{R}$ et si t est un générateur de $\pi_1 S^1$, on a $\rho(t) \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi l'holonomie linéaire des modèles d'un fibré pseudo-Anosov cyclique est triviale sur les fibres. Le lemme ci-dessus et la description de l'holonomie donnent la

Remark 2.7. les feuilletages modèles sur un fibré d'Anosov fermé ou pseudo-Anosov fermé cyclique sont des perturbations de la fibration.

On a le théorème suivant qui prouve que le théorème de classification en genre 1 de Ghys et Sergiescu ne s'étend pas au cas de genre > 1 .

Theorem 2.8. *Il existe un fibré pseudo-Anosov cyclique V qui porte un feuilletage tendu transversalement affine de même classe d'Euler que la fibration mais qui n'est conjugué ni à la fibration ni à un modèle de V .*

Pour la preuve on utilise les résultats suivants:

Theorem 2.9. ([3]) *Soit V une 3-variété fermée et $\pi : V \rightarrow S^1$ une fibration de V de monodromie ψ . On suppose que V est cyclique (i.e le premier nombre de Betti est 1). Soit ψ_* l'action de ψ en homologie. Soit ω une 1-forme dont la classe de cohomologie est un vecteur propre non nul de ψ_* , alors il existe un feuilletage tendu \mathcal{F}_ω sur V ayant les propriétés suivantes:*

- i) \mathcal{F}_ω est transversalement affine et a même classe d'Euler que π . La restriction de \mathcal{F}_ω à une fibre de V est ω . Et \mathcal{F}_ω est une perturbation de π .
- ii) \mathcal{F}_ω est isotope à $\mathcal{F}_{\omega'}$ si et seulement si les classes de cohomologies de de Rham de ω et ω' sont positivement colinéaires. Les \mathcal{F}_ω sont, à isotopie près, les seules feuilletages transversalement affines qui sont des perturbations de π .

Corollary 2.10. ([3]) *Soit V un fibré pseudo-Anosov cyclique. Soit λ le coefficient de dilatation de la monodromie ψ de V . Si la matrice induite par ψ en homologie possède une*

valeur propre réelle distincte de λ et $1/\lambda$, il existe sur V un feuilletage tendu transversalement affine dans la classe d'Euler de la fibration et qui n'est conjugué ni à un modèle ni à la fibration.

Preuve du théorème 2.8 Soit dans Σ , la surface fermée orientée de genre 2, les courbes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 comme indiqué dans la figure ci-dessous:

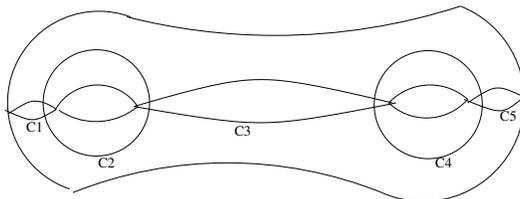


Figure 3.

Soit T_i les Twists de Dehn associés respectivement aux courbes C_i . Le difféomorphisme $\Psi = T_1 T_3 (T_5)^2 (T_2)^{-1} (T_4)^{-1}$ est hyperbolique (i.e induit en homologie une matrice dont les puissances non nulles sont sans point fixe non nul) et Ψ est un difféomorphisme pseudo-Anosov. En effet, considérons le système générateur de $H_1(\Sigma)$ donné par les courbes dessinées ci-dessous:

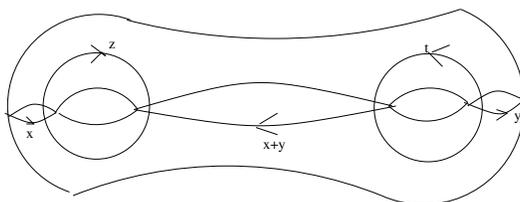


Figure 4.

Dans la base $\{x, y, z, t\}$ la matrice de l'isomorphisme Ψ_* induit par Ψ sur $H_1(\Sigma)$ est:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de M est $P(t) = t^4 - 9t^3 + 21t^2 - 9t + 1$. Puisque $P(t)$ n'a pas 0 comme racine, on divise par t^2 et on pose $Z = t + \frac{1}{t}$, $P(t)$ devient un polynôme du second degré $Q(Z) = Z^2 - 9Z + 19$ admettant comme racine $Z_1 = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit que $P(t)$ a quatre racines réelles distinctes:

$$\lambda_1 = \frac{9-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{2}(35-9\sqrt{5})^{1/2}}{4}, \lambda_2 = \frac{9-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}(35-9\sqrt{5})^{1/2}}{4}$$

$$\lambda_3 = \frac{9+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{2}(9\sqrt{5}+35)^{1/2}}{4}, \lambda_4 = \frac{9+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}(9\sqrt{5}+35)^{1/2}}{4}.$$

Ψ est hyperbolique et est un difféomorphisme pseudo-Anosov de coefficient de dilatation $\lambda_4 = 1/\lambda_3$.

Soit M la suspension de ψ , M est un fibré pseudo-Anosov cyclique. Prenons ω une 1-forme fermée de type-selle dont la classe de cohomologie est un vecteur propre de Ψ_* de valeur propre μ distincte de λ_4 et $1/\lambda_4$, il existe (voir théorème 2.9, corollaire 2.10) sur M un feuilletage tendu transversalement affine \mathcal{F}_ω dans la classe d'Euler de la fibration et qui n'est conjugué ni à un modèle ni à la fibration. \square

3 Fibrés en surfaces ouvertes sur le cercle

3.1 Feuilletages sur les surfaces ouvertes

Dans ce paragraphe Σ désigne une surface non compacte de genre g .

Definition 3.1. Une partie A de Σ est appelée sous-surface de Σ si A munie de la topologie induite est une surface à bord. On appelle pré-composante de l'infini de Σ toute composante connexe de $\Sigma \setminus A$ où A est une sous-surface compacte à bord de Σ .

On considère alors la famille \mathcal{B} des suites $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'adhérences de pré-composantes de l'infini de Σ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subsetneq F_n \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{F}_n = \emptyset$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, \bar{F}_n est une surface non compacte à bord qui peut être de genre infini.

Definition 3.2. Une suite $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite comparable à une suite $(\bar{G}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ il existe } p(n) \in \mathbb{N} \text{ tel que } G_{p(n)} \subset F_n.$$

Remark 3.3. Si une suite $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est comparable à une suite $(\bar{G}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ alors $(\bar{G}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est comparable à $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La comparaison définit une relation d'équivalence \sim sur \mathcal{B} .

Definition 3.4. Un bout η de Σ est une classe d'équivalence de pré-composantes de l'infini et on appelle ensemble de bouts de Σ , l'ensemble quotient $\mathcal{B}_t(\Sigma) = \mathcal{B} / \sim$.

Un bout η de $\mathcal{B}_t(\Sigma)$ est donné par un représentant $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{B} .
On a alors les possibilités suivantes :

- 1) Il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, F_n est une surface non compacte de genre nul; on dit alors que η est un bout planaire;
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est une surface de genre infini; dans ce cas η est un bout non planaire.

Tout bout η admet des représentants $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le bord de \bar{F}_n soit homéomorphe à S^1 . On note par $\mathcal{B}'_t(\Sigma) \subset \mathcal{B}_t(\Sigma)$ le sous ensemble de bouts non planaires.

Definition 3.5. Le couple $(\mathcal{B}_t(\Sigma), \mathcal{B}'_t(\Sigma))$ est appelé l'idéal des bouts de Σ .

Remark 3.6. La surface Σ est de genre fini si et seulement si $\mathcal{B}'_t(\Sigma) = \emptyset$.

Soit $\eta = (\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un bout de Σ . La suite

$$\mathcal{W}_k(\eta) = \{\xi = (\bar{G}_p)_{p \in \mathbb{N}} \mid \text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } G_p \subset F_k\}$$

où k parcourt \mathbb{N} vérifie les axiomes de base de voisinages, donc définit une topologie sur $\mathcal{B}_l(\Sigma)$. Muni de cette topologie $\mathcal{B}_l(\Sigma)$ est un espace topologique compact, totalement discontinu.

Exemple 3.7. Une représentation concrète d'une surface non compacte de genre g et d'idéal de bouts $(\mathcal{B}_l(\Sigma), \mathcal{B}'_l(\Sigma))$ est donnée par la sphère S^2 à laquelle on ôte un ensemble de points homéomorphe à $\mathcal{B}_l(\Sigma)$ et on rajoute g anses en prenant soin si g est infini de les faire s'accumuler sur les points de $\mathcal{B}'_l(\Sigma)$.

On a donc deux familles bien distinctes de surfaces non compactes:

- les surfaces de genre fini: une telle surface est entièrement déterminée par son genre et son ensemble de bouts $\mathcal{B}_l(\Sigma)$.
- les surfaces de genre infini: une telle surface est entièrement déterminée par son idéal de bouts $(\mathcal{B}_l(\Sigma), \mathcal{B}'_l(\Sigma))$.

Dans la suite on ne s'intéressera qu'à des surfaces non compactes de genre fini.

Soit $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \mathcal{B}_l(\Sigma)$. On munit cet ensemble de la topologie dont une base de voisinages est donnée par une base de voisinages de Σ et par les pré-composantes de l'infini associées aux sous surfaces Σ_n de Σ telles que $\bar{\Sigma} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

Si g est fini $\bar{\Sigma} = \Sigma_g$ est la surface compacte de genre g .

Un difféomorphisme d'Anosov (resp. pseudo-Anosov) de Σ est la restriction d'un difféomorphisme d'Anosov (resp. pseudo-Anosov) de $\bar{\Sigma}$. On définit par les mêmes procédés les fibrés d'Anosov ouverts de genre 1, les fibrés pseudo-Anosov ouverts ainsi que leurs feuillets modèles par restriction des modèles sur les fibrés compactifiés. La suite de cet article est consacrée à la construction de feuillets minimaux sur des fibrés en surfaces non compactes de genre non nul sur le cercle dont la monodromie est un difféomorphisme d'Anosov ou pseudo-Anosov. L'idée naturelle est d'y restreindre les modèles d'un fibré d'Anosov ou pseudo-Anosov fermé mais on sait qu'en général la restriction d'un feuilletage minimal n'est pas minimal. Par exemple la restriction d'un flot irrationnel du tore T^2 à T^2 percé en deux trous x_1 et x_2 n'est pas minimal si x_1 et x_2 appartiennent à la même feuille.

3.1.1 Feuillets sur les surfaces ouvertes de genre 1

Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homéomorphisme du cercle S^1 . On désigne par $O(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ l'orbite d'un point de S^1 . Soit sur $S^1 \times [0, 1]$ le feuilletage dont les feuilles sont les $\{x\} \times [0, 1]$ et recollons les composantes du bord au moyen de f . On obtient un feuilletage sur le tore T^2 dont les feuilles sont $(O(x) \times [0, 1]) / (x, 0) \sim (f(x), 1)$

Cette construction est la suspension de l'homéomorphisme f . Le feuilletage obtenu est appelé feuilletage suspension de l'homéomorphisme f . Soit $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ la rotation d'angle $2\pi\alpha$. On note \mathcal{F}_α le feuilletage obtenu par suspension de R_α . Les feuillets suspensions des rotations sont dits linéaires.

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ la rotation est dite irrationnelle et le feuilletage \mathcal{F}_α a toutes ses feuilles denses. C'est donc un feuilletage minimal de T^2 .

Definition 3.8. Un ensemble de Cantor $K \subset \mathbb{R}$ ou S^1 est dit linéairement indépendant si aucune combinaison linéaire finie à coefficients entiers d'éléments de K n'appartient à \mathbb{N} .

On a la

Proposition 3.9. ([1] p. 15. remarque 2.) Pour tout ensemble fini de points x_1, x_2, \dots, x_n linéairement indépendants il existe un ensemble de Cantor linéairement indépendant K tel que tous les x_i appartiennent à K .

D'après ([1], proposition 1.1.2), tous les ensembles de Cantor sont homéomorphes et l'ensemble des bouts A d'une surface non compacte est un compact totalement discontinu ([1] lemme 1.2.8), A se plonge donc dans un ensemble de Cantor, on obtient alors la

Remark 3.10. Soit K un ensemble de Cantor tel que $K \subset S^1$ où S^1 est le méridien au point de base de T^2 . Toute surface non compacte Σ de genre 1 est homéomorphe à $T^2 \setminus K_\Sigma$ où K_Σ est un fermé de K .

Pour construire le feuilletage minimal sur Σ , on y restreint un flot irrationnel si K_Σ est réduit à un point, dans le cas général aussi on a le

Theorem 3.11. ([1] p. 50. théorème 3.2.) Soit Σ une surface non compacte de genre 1 alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe un feuilletage minimal sur Σ qui est défini par une forme fermée ω_α dont le groupe de périodes est engendré par 1 et α .

3.1.2 Feuilletages sur les surfaces ouvertes de genre > 1

La même méthode s'applique si Σ est une surface ouverte de genre fini non nul g quelconque. En effet son compactifié qui est la surface fermée Σ_g de genre g possède un feuilletage minimal \mathcal{F} singulier dont les singularités sont des selles à nombre pair quelconque de séparatrices. Ces feuilletages sont ceux associés aux échanges d'intervalles de Keane (voir [6]). En suspendant un échange d'intervalles bien choisi, on montre que la restriction de ce feuilletage à Σ reste minimal.

3.2 Feuilletages sur les fibrés ouverts de genre 1

Plus généralement on prouve le

Theorem 3.12. Sur tout fibré d'Anosov ouvert de genre 1 il existe des feuilletages minimaux différentiables.

La preuve se fera en fonction du nombre de bouts des fibres. Nous considérons le cas d'un bout, d'un Cantor de bouts et d'un nombre fini de bouts.

1^{er} Cas: Chaque fibre possède un seul bout. Notons par $T = T^2 - \{x_0\}$ le tore épointé où x_0 est un point de T^2 . Soit $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ un automorphisme hyperbolique de \mathbb{R}^2 ; il induit sur T^2 un difféomorphisme φ et on suppose que x_0 est le point fixe de φ . On considère sur T^2 les feuilletages linéaires par droites parallèles aux directions propres de A . Ils induisent par restriction sur T deux feuilletages dont toutes les feuilles sont denses car les deux demi-feuilles obtenues en ôtant x_0 sont toutes denses. On définit le fibré en tore épointé comme:

$$M_\varphi = T \times I / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$$

On considère le feuilletage produit sur $T \times I$ il passe au quotient sur M_φ en un feuilletage dont toutes les feuilles sont denses. On obtient donc deux feuilletages minimaux de classe C^∞ sur M_φ .

2^{ème} Cas: Chaque fibre possède un Cantor de bouts. On utilise le

Lemma 3.13. *Soit $\varphi : T^2 \rightarrow T^2$ un difféomorphisme d'Anosov du tore induit par un automorphisme hyperbolique A de \mathbb{R}^2 . Alors le feuilletage stable de φ est conjugué à la suspension d'une rotation irrationnelle du cercle.*

Preuve du lemme. *Soit λ la valeur propre < 1 de φ_* et $R_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$ la rotation irrationnelle d'angle $2\pi\lambda$ du cercle. Pour chaque point $x \in S^1$ on désigne par $O(x) = \{R_\lambda^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$ l'orbite du point x . On sait que toutes les orbites sont denses. On considère sur $S^1 \times [0, 1]$ le feuilletage dont les feuilles sont les $\{x\} \times [0, 1]$. En recollant $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ au moyen de la rotation R_λ on obtient un feuilletage linéaire du tore T^2 noté \mathcal{F}_λ appelé suspension de R_λ dont les feuilles sont les $(O(x) \times [0, 1]) / (x, 0) \sim (R_\lambda(x), 1)$. Ces feuilles sont denses car les orbites de la rotation sont denses, le feuilletage est donc minimal. En recollant par R_λ on fait tourner les feuilles sur $S^1 \times \mathbb{R}$ d'un angle λ irrationnel. Cela montre que le feuilletage \mathcal{F}_λ est conjugué au feuilletage du tore T^2 induit par le feuilletage du plan par les droites parallèles de pente λ . On remarque que ce feuilletage est transverse aux cercles $S^1 \times \{t\}$ où $t \in [0, 1]$. De plus il est préservé par φ .*

Suite de la preuve du théorème 3.12. *Soit $\varphi : T^2 \rightarrow T^2$ un difféomorphisme d'Anosov de T^2 induit par un automorphisme linéaire hyperbolique de \mathbb{R}^2 de valeurs propres $0 < \lambda < 1 < 1/\lambda$. Soit $R_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$ la rotation irrationnelle d'angle $2\pi\lambda$ et \mathcal{F}_λ le feuilletage sur le tore T^2 obtenu par suspension de R_λ . Ce feuilletage est préservé par φ et s'identifie par conjugaison au feuilletage stable de φ . On désigne par K un ensemble de Cantor tel que le couple (K, λ) soit linéairement indépendant, alors $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ on a $R_\lambda^n(K) \cap K = \emptyset$. Soit K_* le plongement canonique de K dans le cercle méridien au point base de T^2 . On a que la restriction de chaque feuille de \mathcal{F}_λ sur la surface non compacte de genre 1 rencontre K_* au plus une fois. D'après le théorème 3.11 et le lemme 3.13 précédents le feuilletage \mathcal{F}_λ induit sur la surface non compacte $\Sigma_K = T^2 \setminus K_*$ un feuilletage minimal \mathcal{F} qui est préservé par φ car étant restriction de \mathcal{F}_λ . Soit $M_\varphi = \Sigma_K \times I / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$ le fibré hyperbolique ouvert de genre 1 dont la fibre est une surface non compacte qui a un ensemble de Cantor de bouts. La suspension du feuilletage \mathcal{F} donne un feuilletage minimal de classe C^∞ sur M_φ .*

3^{ème} Cas: Chaque fibre possède un nombre fini de bouts.

Soit $\varphi : T^2 \rightarrow T^2$ un difféomorphisme d'Anosov du tore T^2 . Soit λ la valeur propre strictement inférieure à 1 de la matrice induite par φ en homologie et \mathcal{F}_λ le feuilletage stable de φ . Considérons S^1 un cercle transverse à \mathcal{F}_λ et $Q = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^1$ un ensemble fini de points linéairement indépendants et $K \subset S^1$ un ensemble de Cantor linéairement indépendant contenant $Q \cup \{\lambda\}$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{Z}^* R_\lambda^n(K) \cap K = \emptyset$. On sait d'après ce qui précède que K se plonge canoniquement en K_* dans le cercle méridien au point de base de T^2 . La partie Q se plonge canoniquement en Q_* dans K_* . D'après la remarque 3.10, la surface non compacte $T^2 \setminus Q$ est homéomorphe à la surface non compacte $T^2 \setminus Q_*$.

On obtient un feuilletage minimal sur la surface non compacte $T = T^2 \setminus Q_*$ en faisant la restriction du feuilletage construit sur $T^2 \setminus K_*$.

Soit

$$M_\varphi = T \times I / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$$

le fibré hyperbolique ouvert de genre 1 dont la fibre est une surface non compacte à un nombre fini de bouts. En faisant la suspension du feuilletage minimal sur T on obtient un feuilletage minimal de classe C^∞ sur le fibré hyperbolique ouvert M_φ .

4^{eme} Cas: Le bout de chaque fibre est un ensemble quelconque et infini B_t . On choisit un Cantor K tel que le couple (λ, K) soit linéairement indépendant et on identifie B_t à un fermé de K_* comme dans le deuxième cas et la restriction de \mathcal{F} obtenu dans ce deuxième cas à $T^2 \setminus B_t$ est un feuilletage minimal invariant par φ qui donne par suspension un feuilletage minimal sur $M_\varphi = T \times I / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$. \square

3.3 Feuilletages sur les fibrés ouverts de genre > 1

Soit Σ une surface de genre $g > 1$ et $p : \Sigma \rightarrow T^2$ le revêtement ramifié dont l'ensemble de points de ramification est Q tel que $\text{card}Q = 2g - 2$. Soit $\varphi : T^2 \rightarrow T^2$ un Anosov linéaire du tore qui est l'identité sur Q . On désigne par $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ le difféomorphisme pseudo-Anosov qui relève φ . Soit K un ensemble de Cantor tel que $K \subset S^1$ où S^1 est le méridien au point de base de T^2 . On sait que toute surface non compacte de genre 1 est homéomorphe à une surface non compacte d'ensemble de bouts un fermé non vide de K . On a le

Theorem 3.14. *Sur tout fibré pseudo-Anosov ouvert de genre $g > 1$ obtenu par revêtement il existe des feuilletages minimaux différentiables.*

Preuve. Soit S une surface non compacte d'ensemble de bouts $\mathcal{B}_t(S)$ et V un S -fibré pseudo-Anosov dont le difféomorphisme de monodromie est obtenu par revêtement d'un difféomorphisme d'Anosov du tore (voir exemple 2.4). Soit Σ la surface de genre g obtenue par compactification de S par les bouts. On désigne par $K = p(\mathcal{B}_t(S))$ l'image de l'ensemble de bouts par le revêtement à deux feuillets $p : \Sigma \rightarrow T^2$. On obtient une surface non compacte de genre 1 d'ensemble de bouts K . Ainsi donc on peut relever par p tous les feuilletages minimaux construits sur la surface non compacte de genre 1 en des feuilletages singuliers avec des singularités selles à quatre branches sur S . Ces feuilletages seront préservés par ψ car ce sont les relevés des feuilletages préservés par φ . En passant au fibré $V = S \times I / (x, 0) \sim (\psi(x), 1)$ on obtient par suspension des feuilletages sur S des feuilletages singuliers minimaux. En effectuant la désingularisation (voir section 2) on obtient des feuilletages minimaux sur V . \square

Remark 3.15. Pour un fibré pseudo-Anosov ouvert quelconque, les feuilletages caractéristiques de la monodromie ne sont pas a priori minimaux si bien que nous ne savons pas s'il existe sur un tel fibré ouvert des feuilletages minimaux.

References

- [1] J. C. Bénéière, *Feuilletages minimaux sur les surfaces non compactes*. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1 (1998).
- [2] J. C. Bénéière, G. Meigniez, Flows without minimal set. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), no. 1, 21–30.

- [3] H. Dathe, Sur les feuilletages tendus transversalement affines des 3- variétés fibrées sur \mathbb{S}^1 . *Afr Diaspora J. Math.* **9** (2010), no.2, 17–33.
- [4] A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque, 66-67. Société Mathématique de France, Paris, 1979. 284 pp.
- [5] E. Ghys et V. Sergiescu, Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology* **19** (1980), 179–197.
- [6] G. Levitt, Pantalons et feuilletages des surfaces. *Topology* **21** (1982), 9–33.