

# ÉQUATIONS COUPLÉES NON-LINÉAIRES DE SCHRÖDINGER

A. LESFARI\*

Department of Mathematics, Faculty of Sciences,  
University of Chouaïb Doukkali,  
B.P. 20, El Jadida, Morocco

## Abstract

In this paper, we give a complete description of the invariant surfaces of the system governing the motion of the coupled nonlinear Schrödinger equations and their completion into abelian surfaces. We derive the associated Riemann surface on the basis of Painlevé-type analysis in the form of a genus 3 Riemann surface  $\Gamma$ , which is a double ramified covering of an elliptic curve  $\Gamma_0$  and a two sheeted genus two hyperelliptic Riemann surface  $C$ . We show that the affine surface  $V_C$  obtained by setting the two quartics invariants of the problem equal to generic constants, is the affine part of an abelian surface  $\tilde{V}_C$ . The latter can be identified as the dual of the Prym variety  $\text{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$  on which the problem linearizes, that is to say their solutions can be expressed in terms of abelian integrals. Also, we discuss a connection between  $\tilde{V}_C$  and the jacobian variety  $\text{Jac}(C)$  of the genus 2 hyperelliptic Riemann surface  $C$ .

**AMS Subject Classification :** 14K35, 14M10, 37J35.

**Keywords :** abelian varieties, Riemann surfaces, integrable systems.

## 1 Introduction

Considérons un système hamiltonien complètement intégrable

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

où  $H$  est l'hamiltonien et  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  sont des coordonnées de l'espace de phases  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Ce système s'écrit sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien  $X_H$ , c'est-à-dire

$$X_H : \quad \dot{x} = J \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{1.1}$$

où

$$x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^\top, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

---

\*E-mail address: lesfariahmed@yahoo.fr

et  $O$  (resp.  $I$ ) est la matrice nulle (resp. unité).

Le système (1.1) possède  $n$  invariants (intégrales premières)  $H_1 = H, H_2, \dots, H_n$  fonctionnellement indépendants en involution. Pour presque tous les  $c_i \in \mathbb{R}$ , les variétés invariantes

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H_i(x) = c_i\},$$

sont compactes, connexes et par le théorème d'Arnold-Liouville (voir [2, 11]), elles sont difféomorphes aux tores réels  $\mathbb{R}^n/\text{réseau}$  sur lesquels les flots définies par les champs de vecteurs  $X_{H_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont des mouvements rectilignes. Autrement dit, les équations différentielles (1.1) sont intégrables par quadratures.

D'après Adler et van Moerbeke [1], le système (1.1) est algébriquement complètement intégrable si tous les invariants  $H_1 = H, H_2, \dots, H_n$  sont polynomiaux et si de plus, la variété complexe

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{C}^{2n} : H_i(x) = c_i\},$$

est la partie affine d'une variété abélienne (tore complexe algébrique) et les flots définis par les champs de vecteurs hamiltoniens engendrés par ces invariants sont des mouvements rectilignes sur cette variété abélienne. En outre, si le flot hamiltonien (1.1) est algébriquement complètement intégrable, alors ce système admet des solutions sous la forme de séries de Laurent en  $t$  telles que chaque  $x_i$  explose pour au moins une valeur finie de  $t$  et les séries de Laurent de  $x_i$  admettent  $n - 1$  paramètres libres.

En utilisant les mêmes notations que dans l'article [5, p.686], les équations couplées non-linéaires de Schrödinger s'écrivent :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \Omega_0 a + \frac{2}{3}(|a|^2 + |b|^2)a + \frac{1}{3}(a^2 + b^2)\bar{a} &= 0, \\ i \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \Omega_0 b + \frac{2}{3}(|a|^2 + |b|^2)b + \frac{1}{3}(a^2 + b^2)\bar{b} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les fonctions  $a(z, t)$  et  $b(z, t)$  dépendent des variables  $z$  et  $t$ , la notation “ $-$ ” désigne l'opérateur de conjugaison complexe, “ $| \quad |$ ” désigne le module et enfin  $\Omega_0$  est une constante. On cherche les solutions de (1.2) sous la forme

$$a(z, t) = q_1(t) \exp(i\Omega z),$$

$$b(z, t) = q_2(t) \exp(i\Omega z),$$

où  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  sont deux fonctions et  $\Omega$  une constante arbitraire. Dès lors, on obtient le système suivant :

$$\ddot{q}_1 + (q_1^2 + q_2^2)q_1 = (\Omega - \Omega_0)q_1,$$

$$\ddot{q}_2 + (q_1^2 + q_2^2)q_2 = (\Omega + \Omega_0)q_2,$$

qui s'écrit encore sous la forme du système hamiltonien (1.1) avec  $n = 2$ . Plus précisément, on a

$$\dot{x} = f(x) \equiv J \frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (q_1, q_2, p_1, p_2)^\top, \quad (1.3)$$

où

$$H = H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}((\Omega_0 - \Omega)q_1^2 - (\Omega_0 + \Omega)q_2^2) + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)^2.$$

Le système (1.3) possède un deuxième invariant quartique ayant la forme suivante :

$$H_2 = \frac{1}{4}(p_2q_1 - p_1q_2)^2 - \frac{1}{2}\Omega_0(p_1^2 - p_2^2) - \frac{1}{2}\Omega(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)((\Omega_0 + \Omega)q_1^2 - (\Omega_0 - \Omega)q_2^2 + 2(\Omega_0 - \Omega)(\Omega_0 + \Omega)). \quad (1.4)$$

Dans [5], les auteurs ont exprimé les solutions de ce problème en termes d'intégrales hyperelliptiques de genre 2, donc le problème se linéarise sur la variété jacobienne d'une surface de Riemann de genre 2. La méthode de résolution utilise la théorie de courbe spectrale (forme de Lax), elle est compliquée et repose sur un choix astucieux de variables. C'est une méthode puissante, mais difficile, permettant d'obtenir des résultats précis sur l'intégrabilité des systèmes dynamiques. Elle donne un moyen de déterminer les intégrales premières du système différentiel et aussi le résoudre (pour de plus amples informations sur cette méthode, on pourra par exemple consulter [13]).

Le but de ce travail est d'étudier géométriquement ce problème. Le tore invariant (vu dans le complexe) n'est pas principalement polarisé, mais est au mieux isogène à une surface principalement polarisée. Nous démontrons que la variété abélienne qui complète la variété invariante, s'obtient par l'adjonction d'une surface de Riemann de genre 3. Plusieurs études récentes [1, 7, 8, 10, 12, ...] ont montré que la linéarisation d'un nombre considérable de systèmes intégrables s'effectue sur des variétés de Prym. Or les équations couplées non-linéaires de Schrödinger, ont échappé à cette analyse jusqu'à présent. Dans la dernière section, nous montrons que la variété abélienne obtenue, peut effectivement s'identifier à la duale d'une variété de Prym sur laquelle le problème en question se linéarise. Dans le cas où  $\Omega_0 = 0$ , la linéarisation du problème s'effectue aisément à l'aide de fonctions elliptiques. Dès lors, dans tout ce qui va suivre, on suppose que  $\Omega_0 \neq 0$ .

## 2 Variété invariante, surfaces de Riemann, variété abélienne et intégrabilité algébrique

Soit

$$V_c = \bigcap_{i=1}^2 \{x \in \mathbb{C}^4 : H_i(x) = c_i\}, \quad (2.1)$$

la variété invariante où  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$  n'est pas une valeur critique. Cette variété est une surface affine lisse mais n'est pas compacte. On montre que  $V_c$  forme la partie affine d'une surface abélienne et en outre les flots définis par les champs de vecteurs hamiltoniens (engendrés par  $H_1$  et  $H_2$ ) sont des mouvements rectilignes sur cette surface abélienne.

Si le système des équations (1.3) est algébriquement complètement intégrable, alors il possède une famille de solutions en séries de Laurent dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres. Ces solutions évoluent selon des mouvements rectilignes en temps complexe sur des variétés abéliennes (tores complexes algébriques). Afin de faciliter la compréhension de ce qui va suivre, notons que :

(i) Les champs de vecteurs  $X_{H_1}$  et  $X_{H_2}$  définissent sur le tore réel  $\mathbb{R}^2/\text{réseau}$  une loi d'addition

$$\oplus : V_c \times V_c \longrightarrow \mathbb{C}^2/\text{réseau}, (x, y) \longmapsto x \oplus y = \varphi^{t_1+t_2}(p),$$

où  $p \in V_c$ ,  $x = \varphi^{t_1}(p)$ ,  $y = \varphi^{t_2}(p)$ ,  $\varphi^t(p) = \varphi_{X_1}^{t_1} \circ \varphi_{X_2}^{t_2}(p)$  et  $\varphi_{X_1}^{t_1}(p)$ ,  $\varphi_{X_2}^{t_2}(p)$  sont les flots de  $X_{H_1}$ ,  $X_{H_2}$  respectivement. La complète intégrabilité algébrique du système (1.3) signifie que cette loi d'addition est rationnelle. Autrement dit,  $(x \oplus y)_j = R_j(x_i, y_i, c)$  où  $R_j(x_i, y_i, c)$  est une fonction rationnelle des coordonnées  $x_i$ ,  $y_i$  pour tout  $i = 1, 2, 3, 4$ . En posant  $x = p$ ,  $y = \varphi_{X_i}^t(p)$  dans la formule ci-dessus, on remarque que sur le tore réel  $V_c$ , les flots  $\varphi_i^t(p)$  dépendent rationnellement de la condition initiale  $p$ . Par ailleurs, un théorème de Weierstrass sur les fonctions admettant une loi d'addition, affirme que les coordonnées  $x_i$  restreintes au tore réel  $V_c$  :

$$\mathbb{R}^2/\text{réseau} \longrightarrow V_c, (t_1, t_2) \longmapsto x_i(t_1, t_2),$$

sont des fonctions abéliennes. Géométriquement, cela signifie que le tore réel  $V_c$  est la partie affine d'un tore complexe algébrique (variété abélienne)  $\simeq \mathbb{C}^2/\text{réseau}$  et que les fonctions réelles  $x_i(t_1, t_2)$ ,  $(t_i \in \mathbb{R})$ , sont les restrictions sur ce tore réel des fonctions méromorphes  $x_i(t_1, t_2)$ ,  $(t_i \in \mathbb{C})$ , de quatre variables complexes.

(ii) La définition de la complète intégrabilité algébrique signifie en particulier qu'on peut trouver une transformation algébrique  $(x_1(t), x_2(t)) \longmapsto (s_1(t), s_2(t))$  telle que :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{s_i(0)}^{s_i(t)} \omega_k = a_k t, k = 1, 2$$

où  $\omega_1, \omega_2$  sont des différentielles holomorphes sur une courbe algébrique ou surface de Riemann, notée  $\Gamma$ , liée de façon naturelle au problème. Puisque le flot évolue sur le tore complexe  $\simeq \mathbb{C}^2/\text{réseau}$ , les coordonnées  $q_1, q_2, p_1, p_2$  restent finies sur la partie affine (c'est-à-dire non compacte)  $V_c$  de ce tore et en outre ces coordonnées doivent exploser (tendre vers l'infini) le long de  $\Gamma$ . Par la définition de la complète intégrabilité algébrique, le flot (1.3) est une ligne droite (un mouvement rectiligne) sur  $\mathbb{C}^2/\text{réseau}$ , chacune de ces trajectoires doit cependant heurter la surface de Riemann  $\Gamma$  en au moins un endroit. Réciproquement, à travers tout point de  $\Gamma$  il existe un mouvement rectiligne et par conséquent un développement de Laurent autour de ce point d'intersection. D'où les équations différentielles (1.3) doivent admettre des séries de Laurent lesquelles dépendent d'un nombre suffisant de paramètres libres. En l'occurrence les séries autour des points d'intersection, dépendent de  $\dim(\text{espace de phase}) - 1 = 3$  paramètres libres.

**Théorème 2.1.** *Le système d'équations différentielles (1.3) admet des solutions sous forme de séries de Laurent méromorphes (2.4) dépendant de trois paramètres libres. Ces séries sont paramétrées par une surface de Riemann hyperelliptique  $\Gamma(2.5)$  de genre 3. Cette dernière est un revêtement double ramifié le long d'une courbe elliptique  $\Gamma_0(2.8)$ . En outre,  $\Gamma$  peut-être vue comme étant un revêtement double non ramifié d'une surface de Riemann  $C(2.9)$  hyperelliptique de genre 2.*

*Preuve.* D'après ce qui précède, les solutions  $x = (q_1, q_2, p_1, p_2)$  du système (1.3) sous la forme de séries de Laurent

$$q_1 = \frac{q_1^{(0)}}{t} + q_1^{(1)} + q_1^{(2)}t + q_1^{(3)}t^2 + \dots, \quad p_1 = \dot{q}_1$$

$$q_2 = \frac{q_2^{(0)}}{t} + q_2^{(1)} + q_2^{(2)}t + q_2^{(3)}t^2 + \dots, \quad p_2 = \dot{q}_2$$

dépendent de trois paramètres libres :  $\alpha, \beta, \gamma$ . En substituant ces développements dans le système (1.3), on voit que les coefficients  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ , satisfont aux équations :

$$x^{(0)} + f(x^{(0)}) = 0, \quad (2.2)$$

et

$$(\mathcal{M} - kI)x^{(k)} = \text{polynôme en } x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, k \geq 1, \quad (2.3)$$

où  $\mathcal{M}$  est la matrice jacobienne de (2.2). Les trois paramètres libres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  apparaissent respectivement dans l'équation (2.2), l'équation (2.3) pour  $k = 3$  et l'équation (2.3) pour  $k = 4$ . Explicitement, on a

a) pour  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2q_1^{(0)} &= -(q_1^{(0)})^3 - q_1^{(0)}(q_2^{(0)})^2, \\ 2q_2^{(0)} &= -(q_2^{(0)})^3 - (q_1^{(0)})^2 q_2^{(0)}, \\ \Rightarrow \begin{cases} q_1^{(0)} &= \alpha \equiv \text{paramètre libre,} \\ q_2^{(0)} &= \varepsilon \sqrt{2 + \alpha^2}, \quad \varepsilon \equiv \pm i. \end{cases} \end{aligned}$$

b) pour  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= -3(q_1^{(0)})^2 q_1^{(1)} - 2q_1^{(0)} q_2^{(0)} q_2^{(1)} - q_1^{(1)} (q_2^{(0)})^2, \\ 0 &= -3(q_2^{(0)})^2 q_2^{(1)} - (q_1^{(0)})^2 q_2^{(1)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_2^{(0)}, \\ \Rightarrow \begin{cases} q_1^{(1)} &= 0, \\ q_2^{(1)} &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

c) pour  $k = 2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= (\Omega - \Omega_0)q_1^{(0)} - 3(q_1^{(0)})^2 q_1^{(2)} - 3q_1^{(0)}(q_1^{(1)})^2 - q_1^{(0)}(q_2^{(1)})^2 \\ &\quad - 2q_1^{(1)} q_2^{(0)} q_2^{(1)} - q_1^{(2)}(q_2^{(0)})^2 - 2q_1^{(0)} q_2^{(0)} q_2^{(2)}, \\ 0 &= (\Omega + \Omega_0)q_2^{(0)} - 3q_2^{(0)}(q_2^{(1)})^2 - 3(q_2^{(0)})^2 q_2^{(2)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_2^{(0)} \\ &\quad - (q_1^{(0)})^2 q_2^{(2)} - (q_1^{(1)})^2 q_2^{(0)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_2^{(1)}, \\ \Rightarrow \begin{cases} q_1^{(2)} &= \frac{1}{6}(2\alpha^2 \Omega_0 - \Omega + 5\Omega_0)\alpha, \\ q_2^{(2)} &= \frac{1}{6}\varepsilon \sqrt{(2 + \alpha^2)(2\alpha^2 \Omega_0 - \Omega - \Omega_0)}. \end{cases} \end{aligned}$$

d) pour  $k = 3$ ,

$$\begin{aligned} 2q_1^{(3)} &= (\Omega - \Omega_0)q_1^{(1)} - q_1^{(1)}(q_2^{(1)})^2 - (q_1^{(1)})^3 - 3(q_1^{(0)})^2 q_1^{(3)} \\ &\quad - 2q_1^{(0)} q_2^{(0)} q_2^{(3)} - 2q_1^{(0)} q_2^{(1)} q_2^{(2)} - q_1^{(3)}(q_2^{(0)})^2 - 2q_1^{(1)} q_2^{(0)} q_2^{(2)} \\ &\quad - 2q_1^{(2)} q_2^{(0)} q_2^{(1)} - 6q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_1^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2q_2^{(3)} &= (\Omega + \Omega_0)q_2^{(1)} - (q_1^{(1)})^2 q_2^{(1)} - (q_2^{(1)})^3 - 3(q_2^{(0)})^2 q_2^{(3)} - \\
&\quad 2q_1^{(0)} q_2^{(0)} q_1^{(3)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(2)} q_2^{(1)} - (q_1^{(0)})^2 q_2^{(3)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_2^{(2)} \\
&\quad - 2q_1^{(1)} q_1^{(2)} q_2^{(0)} - 6q_2^{(0)} q_2^{(1)} q_2^{(2)}, \\
\Rightarrow \begin{cases} q_1^{(3)} &= \beta \equiv \text{paramètre libre,} \\ q_2^{(3)} &= \varepsilon \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(2+\alpha^2)}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

e) pour  $k = 4$ ,

$$\begin{aligned}
6q_1^{(4)} &= (\Omega - \Omega_0)q_1^{(2)} - 3(q_1^{(0)})^2 q_1^{(4)} - 3q_1^{(0)} (q_1^{(2)})^2 - 3(q_1^{(1)})^2 q_1^{(2)} \\
&\quad - q_1^{(0)} (q_2^{(2)})^2 - 2q_1^{(0)} q_2^{(0)} q_2^{(4)} - q_1^{(2)} (q_2^{(1)})^2 - 6q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_1^{(3)} \\
&\quad - 2q_1^{(0)} q_2^{(1)} q_2^{(3)} - q_1^{(4)} (q_2^{(0)})^2 - 2q_1^{(2)} q_2^{(0)} q_2^{(2)} - 2q_1^{(3)} q_2^{(0)} q_2^{(1)} \\
&\quad - 2q_1^{(1)} q_2^{(0)} q_2^{(3)} - 2q_1^{(1)} q_2^{(1)} q_2^{(2)}, \\
6q_2^{(4)} &= (\Omega + \Omega_0)q_2^{(2)} - 3(q_2^{(0)})^2 q_2^{(4)} - 3q_2^{(0)} (q_2^{(2)})^2 - 3(q_2^{(1)})^2 q_2^{(2)} \\
&\quad - (q_1^{(2)})^2 q_2^{(0)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(4)} q_2^{(0)} - (q_1^{(1)})^2 q_2^{(2)} - 6q_2^{(0)} q_2^{(1)} q_2^{(3)} \\
&\quad - 2q_1^{(0)} q_1^{(1)} q_2^{(3)} - (q_1^{(0)})^2 q_2^{(4)} - 2q_1^{(0)} q_1^{(2)} q_2^{(2)} - 2q_1^{(1)} q_1^{(3)} q_2^{(0)} \\
&\quad - 2q_1^{(0)} q_1^{(3)} q_2^{(1)} - 2q_1^{(1)} q_1^{(2)} q_2^{(1)}, \\
\Rightarrow \begin{cases} q_1^{(4)} &= -\frac{1}{6}\alpha\Omega_0(2\alpha^2\Omega_0 - \Omega + 2\Omega_0) - \alpha \frac{\varepsilon}{\sqrt{(2+\alpha^2)}}\gamma, \\ q_2^{(4)} &= \gamma \equiv \text{paramètre libre.} \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient des solutions sous forme de séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\alpha}{t} + \frac{1}{6}(2\alpha^2\Omega_0 - \Omega + 5\Omega_0)\alpha t + \beta t^2 + q_1^{(4)} t^3 + \dots, \\
q_2 &= \frac{\varepsilon\sqrt{2+\alpha^2}}{t} + \frac{\varepsilon}{6}(2\alpha^2\Omega_0 - \Omega - \Omega_0)\sqrt{2+\alpha^2}t + \frac{\varepsilon\alpha\beta}{\sqrt{2+\alpha^2}}t^2 + \gamma t^3 + \dots, \quad (2.4) \\
p_1 &= -\frac{\alpha}{t^2} + \frac{1}{6}(2\alpha^2\Omega_0 - \Omega + 5\Omega_0)\alpha + 2\beta t + 3q_1^{(4)} t^2 + \dots, \\
p_2 &= -\frac{\varepsilon\sqrt{2+\alpha^2}}{t^2} + \frac{\varepsilon}{6}(2\alpha^2\Omega_0 - \Omega - \Omega_0)\sqrt{2+\alpha^2} + \frac{2\varepsilon\alpha\beta}{\sqrt{2+\alpha^2}}t + 3\gamma t^2 + \dots,
\end{aligned}$$

où  $q_1^{(4)}$  est donnée ci-dessus et  $\varepsilon = \pm i$ . Considérons maintenant l'ensemble  $\Gamma$  des solutions asymptotiques contraintes à rester sur la surface invariante  $V_c$ . Autrement dit,  $\Gamma$  est la fermeture des composantes continues de l'ensemble des séries de Laurent de  $x(t)$  tels que:  $H_1(x) = c_1$  et  $H_2(x) = c_2$ , ceci définit en fait une courbe algébrique ou une surface de Riemann. En substituant les séries de Laurent (2.4) dans les équations  $H_1(x) = c_1$  et  $H_2(x) = c_2$ , celles-ci fournissent deux relations polynomiales entre les variables  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , définissant ainsi une surface de Riemann hyperelliptique  $\Gamma$  dont l'équation affine est

$$\beta^2 = (\alpha^2 + 2)P_6(\alpha), \quad (2.5)$$

où

$$9P_6(\alpha) \equiv -\Omega_0^3\alpha^6 + \Omega_0^2(\Omega - 3\Omega_0)\alpha^4 + \Omega_0(2\Omega_0\Omega - 2\Omega_0^2 + c_1)\alpha^2 - (\Omega - \Omega_0)c_1 + c_2.$$

La signification géométrique de  $\Gamma$  a été discutée au début de cette section (point (ii)). En outre, elle est définie par un polynôme du huitième degré et donc son genre est égal à 3. Donc les séries de Laurent (2.4) sont paramétrées par une surface de Riemann hyperelliptique  $\Gamma(2.5)$  de genre 3. L'application

$$\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma, (\alpha, \beta) \longmapsto (-\alpha, \beta), \quad (2.6)$$

est une involution sur  $\Gamma$  et cette dernière est un revêtement double

$$\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma_0, (\alpha, \beta) \longmapsto (\zeta, \beta), \quad (2.7)$$

ramifié le long d'une courbe elliptique :

$$\beta^2 = (\zeta + 2)P_3(\zeta), \quad (2.8)$$

où

$$9P_3(\zeta) \equiv -\Omega_0^3\zeta^3 + \Omega_0^2(\Omega - 3\Omega_0)\zeta^2 + \Omega_0(2\Omega_0\Omega - 2\Omega_0^2 + c_1)\zeta - (\Omega - \Omega_0)c_1 + c_2.$$

En outre  $\Gamma$  peut-être vue comme étant un revêtement double

$$\Gamma \longrightarrow C, (\alpha, \beta) \longmapsto (\zeta, \eta),$$

non ramifié d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2 :

$$C : \eta^2 = \zeta(\zeta + 2)P_3(\zeta), \quad (2.9)$$

ce qui démontre le théorème.

On va procéder maintenant à la compactification de la variété invariante  $V_c$  (2.1) en une surface abélienne  $\tilde{V}_c$ .

**Théorème 2.2.** *La variété  $V_c(2.1)$  forme la partie affine d'une surface abélienne  $\tilde{V}_c$  et le système (1.3) est algébriquement complètement intégrable.*

*Preuve.* Soit  $\mathbb{L}(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions  $f$  sur  $\tilde{V}_c$  telles que l'on ait  $(f) \geq -\Gamma$ , où  $(f)$  désigne le diviseur de la fonction  $f$ . La méthode consiste à plonger  $V_c$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$  à l'aide des fonctions de  $\mathbb{L}(S)$  où  $S \equiv 2D$  et  $D$  désigne le plongement de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$ . Ce sont des fonctions  $(1, f_1, \dots, f_{15})$  holomorphes en dehors de  $S$  et ayant au plus un pôle double. Ces fonctions forment une base de  $\mathbb{L}(S)$  de telle façon que :

$$\dim \mathbb{L}(S) = \text{genre de}(S) - 1 = 16.$$

Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
f_1 &= q_1 = \frac{\alpha}{t} + \dots, \\
f_2 &= q_2 = \frac{\varepsilon\sqrt{2+\alpha^2}}{t} + \dots, \\
f_3 &= p_1 = -\frac{\alpha}{t^2} + \dots, \\
f_4 &= p_2 = -\frac{\varepsilon\sqrt{2+\alpha^2}}{t^2} + \dots, \\
f_5 &= f_1^2 = \frac{\alpha^2}{t^2} + \dots, \\
f_6 &= f_2^2 = -\frac{2+\alpha^2}{t^2} + \dots, \\
f_7 &= f_1 f_2 = \varepsilon \frac{\alpha\sqrt{(2+\alpha^2)}}{t^2} + \dots, \\
f_8 &= f_1 f_4 - f_2 f_3 = -2\Omega_0 \varepsilon \frac{\alpha\sqrt{(2+\alpha^2)}}{t} + \dots, \\
f_9 &= f_1 f_8 = -2\Omega_0 \varepsilon \frac{\alpha^2\sqrt{(2+\alpha^2)}}{t^2} + \dots, \\
f_{10} &= f_2 f_8 = 2\Omega_0 \frac{\alpha(2+\alpha^2)}{t^2} + \dots, \\
f_{11} &= f_8^2 = -4\Omega_0^2 \frac{\alpha^2(2+\alpha^2)}{t^2} + \dots, \\
f_{12} &= (f_5 + f_6)f_8 + 2(\Omega_0 - \Omega)f_1 f_4 + 2(\Omega_0 + \Omega)f_2 f_3, \\
&= 12\varepsilon \frac{\beta}{t^2\sqrt{(2+\alpha^2)}} + \dots, \\
f_{13} &= (f_5 + f_6)f_1 f_2 + 2f_3 f_4, \\
&= 2\varepsilon \frac{\alpha(\Omega - \Omega_0(\alpha^2 + 1))\sqrt{(2+\alpha^2)}}{t^2} + \dots, \\
f_{14} &= f_3 f_8 - 2\Omega_0 f_1 f_7 = 6\varepsilon \frac{\alpha\beta}{t^2\sqrt{(2+\alpha^2)}} + \dots, \\
f_{15} &= f_4 f_8 - 2\Omega_0 f_2 f_7 = -6\frac{\beta}{t^2} + \dots
\end{aligned}$$

Ensuite, on plonge  $V_c$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$  via l'application

$$p \in \tilde{V}_c \longmapsto [1, f_1(p), \dots, f_{15}(p)] \in \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C}).$$

En particulier  $S$  est très ample. Par ailleurs, on montre qu'il existe sur la surface  $\tilde{V}_c$  deux différentielles holomorphes  $dt_1$  et  $dt_2$  telles que :

$$dt_1|_{\Gamma} = \omega_1, \quad dt_2|_{\Gamma} = \omega_2,$$

où  $\omega_1, \omega_2$  sont des différentielles holomorphes (voir plus loin (3.1) pour une expression explicite) sur la surface de Riemann  $\Gamma$ . En outre, l'espace des différentielles holomorphes



sur  $S$  est

$$\{f_i^{(0)}\omega_2, 1 \leq i \leq 15\} \oplus \{\omega_1, \omega_2\},$$

où les  $f_i^{(0)}$  sont les premiers coefficients des fonctions  $f_i \in \mathbb{L}(S)$  et le plongement dans  $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$  est à deux différentielles holomorphes près le plongement canonique :

$$(\alpha, \beta) \longmapsto [\omega_2, f_1^{(0)}\omega_2, \dots, f_{15}^{(0)}\omega_2] \in P^{15}(\mathbb{C}).$$

Soient  $p \in S$ ,  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,  $g^{t_1}$  et  $g^{t_2}$  les groupes à un paramètre de difféomorphismes ou flots correspondant respectivement aux champs de vecteurs  $X_{H_1}$  et  $X_{H_2}$ . La fibre  $V_c$  étant une surface affine lisse (fibré d'un morphisme de  $\mathbb{C}^4$  dans  $\mathbb{C}^2$ ), alors chaque orbite  $\{g^{t_1}(p) : 0 < |t_1| < \varepsilon\}$  passant à travers le point  $p$  forme une surface lisse  $\Sigma_p$  telle que, dans un voisinage ( $\subseteq \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$ ) de  $p$ , on a

$$\Sigma_p = \tilde{V}_c,$$

$$\Sigma_p \setminus S \subseteq V_c$$

Par ailleurs, les solutions issues des points de  $S$  pénètrent immédiatement dans la partie affine  $V_c$  (plongée dans  $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$  à l'aide des fonctions de  $\mathbb{L}(S)$ ), donc la variété

$$\tilde{V}_c = V_c \cup \left( \bigcup_{p \in S} \Sigma_p \right),$$

est compacte. Montrons maintenant que la variété  $\tilde{V}_c$  est un tore complexe  $\tilde{V}_c \simeq \mathbb{C}^2/L$  où  $L$  est un réseau de  $\mathbb{C}^2$ . Soit  $U(q) \subset V_c$  un voisinage de  $q \equiv g^{t_1}(p) \in V_c$ ,  $\forall t_1, 0 < |t_1| < \varepsilon$  et posons

$$g^{t_2}(r) = g^{-t_1} o g^{t_2} o g^{t_1}(r), \forall r \in U(p) \equiv g^{-t_1}(U(q)).$$

Notons que cette définition a bien un sens car  $g^{t_2}$  est indépendant de  $t_2$  puisque

$$g^{-(t_1+\varepsilon)} o g^{t_2} o g^{t_1+\varepsilon}(r) = g^{-t_1} o g^{t_2} o g^{t_1}(r),$$

en vertu de la commutativité des champs de vecteurs. La fonction  $g^{t_2}(r)$  est holomorphe en  $r$  et  $t_2$ . En outre, les champs de vecteurs  $X_{H_1}$  et  $X_{H_2}$  se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur la variété  $\tilde{V}_c$ . Fixons  $p \in \tilde{V}_c$  et considérons

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \tilde{V}_c, (t_1, t_2) \longmapsto g^{t_1} o g^{t_2}(p), p \in \tilde{V}_c,$$

et

$$L = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 : g^{t_1} o g^{t_2}(p) = p\}.$$

Comme  $\tilde{V}_c$  est compact, on montre aisément que  $L$  est un réseau de  $\mathbb{C}^2$  (considéré comme espace vectoriel réel, de rang 4) et donc engendré par 4 vecteurs (dans  $\mathbb{C}^2$ )  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. En faisant le quotient de  $\mathbb{C}^2$  par  $L$  et en utilisant un raisonnement similaire à celui du théorème d'Arnold-Liouville [2, 11], on obtient un difféomorphisme  $\mathbb{C}^2/L \longrightarrow \tilde{V}_c$ . Donc la variété  $\tilde{V}_c \simeq \mathbb{C}^2/L$ , est un tore complexe et comme celui-ci possède un plongement projectif, alors  $\tilde{V}_c$  est une surface abélienne. En outre, la variété  $\tilde{V}_c$  est munie de deux champs de vecteurs réguliers, indépendants en chaque point et commutants. Ceci achève la démonstration du théorème.

### 3 Variété de Prym et variété jacobienne

**Théorème 3.1.** *La surface abélienne  $\tilde{V}_c$  qui complète la variété invariante  $V_c(2.1)$  peut être identifiée à la duale de la variété de Prym  $\text{Prym}^\vee(\Gamma/\Gamma_0)$  et le problème se linéarise sur cette variété.*

*Preuve.* Soit  $(a_1, b_1, A, B, a_2, b_2)$  une base de cycles de  $\Gamma$  (2.5) de telle façon que les indices d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent :  $AoB = 1$ ,  $a_iob_j = \delta_{ij}$  (symbole de Kroneker),  $a_ioa_j = a_ioA = a_ioB = b_iob_j = b_ioA = b_ioB = AoA = BoB = 0$  et qu'en outre:  $\sigma(a_1) = a_2$ ,  $\sigma(b_1) = b_2$ ,  $\sigma(A) = -A$ ,  $\sigma(B) = -B$  pour l'involution  $\sigma(2.6)$  sur  $\Gamma$ . Les trois différentielles holomorphes sur  $\Gamma$  peuvent être déterminées à l'aide de la formule des résidus de Poincaré [6] :

$$\frac{g(\alpha, \beta)d\alpha}{(\partial F/\partial \beta)(\alpha, \beta)},$$

où  $g$  est un polynôme de degré  $< 3$  et  $F \equiv \beta^2 - (\alpha^2 + 2)P_6(\alpha)$ . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\alpha d\alpha}{2\beta}, \\ &= \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\sqrt{P_6(\alpha)}}}, \\ \omega_1 &= \frac{\alpha^2 d\alpha}{2\beta}, \\ &= \frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\sqrt{P_6(\alpha)}}}, \\ \omega_2 &= \frac{d\alpha}{2\beta}, \\ &= \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\sqrt{P_6(\alpha)}}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

et évidemment

$$\sigma^*(\omega_0) = \omega_0, \quad \sigma^*(\omega_k) = -\omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Nous avons vu que l'involution  $\sigma$  échangeant les feuilletts du revêtement double  $\varphi$  (2.7), identifie  $\Gamma_0$  (2.8) au quotient  $\Gamma/\sigma$ . On note encore  $\sigma$  l'automorphisme induit sur la variété jacobienne  $\text{Jac}(\Gamma)$ ,

$$\sigma : \text{Jac}(\Gamma) \longrightarrow \text{Jac}(\Gamma), \text{ classe de } D \longmapsto \text{classe de } \sigma D.$$

Alors modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne  $\text{Jac}(\Gamma)$  se décompose en une partie paire  $\text{Jac}(\Gamma_0)$ , i.e.  $\Gamma_0$  et une partie impaire  $\text{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$  (variété de Prym) :

$$\text{Jac}(\Gamma) = \text{Prym}(\Gamma/\Gamma_0) \oplus \Gamma_0,$$

avec  $\dim \text{Jac}(C) = 3$  et  $\dim \text{Prym}(\Gamma/\Gamma_0) = 2$ . Rappelons que la variété  $\text{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$  est la composante neutre de  $\text{Ker Nm}$  où

$$\text{Nm} : \text{Jac}(\Gamma) \longrightarrow \text{Jac}(\Gamma_0), \quad \sum m_i p_i \longmapsto \sum m_i \varphi(p_i),$$

est le morphisme norme, celui-ci étant surjective. Soit

$$\begin{pmatrix} \omega_0(A) & \omega_0(B) & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & \omega_0(a_2) & \omega_0(b_2) \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) \end{pmatrix},$$

la matrice des périodes de  $Jac(\Gamma)$  où  $\omega_k(\gamma) = \int_\gamma \omega_k, k = 1, 2, 3$ . Or

$$\omega_0(A) = \omega_0(B) = 0,$$

$$\omega_0(a_2) = \omega_0(a_1), \omega_0(b_2) = \omega_0(b_1),$$

$$\omega_k(a_2) = -\omega_k(a_1), \omega_k(b_2) = -\omega_k(b_1), k = 1, 2,$$

donc la matrice précédente s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & -\omega_1(a_1) & -\omega_1(b_1) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & -\omega_2(a_1) & -\omega_2(b_1) \end{pmatrix}.$$

En effectuant des combinaisons linéaires simples sur les colonnes, on obtient les deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & 2\omega_0(a_1) & 2\omega_0(b_1) \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & 0 & 0 \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) & 0 & 0 \\ \omega_1(A) & \omega_1(B) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & 2\omega_1(a_1) & 2\omega_1(b_1) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & 2\omega_2(a_1) & 2\omega_2(b_1) \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$(2\omega_0(a_1) \quad 2\omega_0(b_1)),$$

est la matrice des périodes de  $\Gamma_0$  puisque

$$\omega_0 = \frac{d\zeta}{4\sqrt{\zeta} + 2\sqrt{P_3(\zeta)}},$$

tandis que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1(A) & \omega_1(B) & 2\omega_1(a_1) & 2\omega_1(b_1) \\ \omega_2(A) & \omega_2(B) & 2\omega_2(a_1) & 2\omega_2(b_1) \end{pmatrix},$$

est celle de  $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ . Considérons l'application (uniformisante)

$$\tilde{V}_c \longrightarrow \mathbb{C}^2/L_\Lambda : p \longmapsto \int_{p_0}^p \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix},$$

où  $(dt_1, dt_2)$  est une base (considérée dans la section 2) de différentielles holomorphes sur  $\tilde{V}_c$  telles que :

$$dt_k|_{\Gamma} = \omega_k, \quad k = 1, 2,$$

$$L_{\Lambda} = \left\{ \sum_{k=1}^4 n_k \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix} (v_k) : n_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

est le réseau associé à la matrice des périodes

$$\Lambda = \begin{pmatrix} dt_1(v_1) & dt_1(v_2) & dt_1(v_3) & dt_1(v_4) \\ dt_2(v_1) & dt_2(v_2) & dt_2(v_3) & dt_2(v_4) \end{pmatrix},$$

et  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  une base de cycles dans le groupe d'homologie  $H_1(\tilde{V}_c, \mathbb{Z})$ . D'après le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes [6], l'application

$$H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\tilde{V}_c, \mathbb{Z}),$$

induite par l'inclusion  $\Gamma \hookrightarrow \tilde{V}_c$  est surjective et par conséquent, on peut trouver quatre cycles  $v_1, v_2, v_3, v_4$  sur la surface de Riemann  $\Gamma$  tels que :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) & \omega_1(v_3) & \omega_1(v_4) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) & \omega_2(v_3) & \omega_2(v_4) \end{pmatrix},$$

et

$$L_{\Lambda} = \left\{ \sum_{k=1}^4 n_k \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} (v_k) : n_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ces cycles sont  $v_1 = a_1, v_2 = b_1, v_3 = A, v_4 = B$  et ils engendrent  $H_1(\tilde{V}_c, \mathbb{Z})$  de telle sorte que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & \omega_1(A) & \omega_1(B) \\ \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) & \omega_2(A) & \omega_2(B) \end{pmatrix},$$

est une matrice de Riemann. On montre que  $\Lambda = \Omega^*$  c'est-à-dire la matrice des périodes de  $\text{Prym}^{\vee}(\Gamma/\Gamma_0)$  duale de  $\text{Prym}(\Gamma/\Gamma_0)$  (voir [6] pour les définitions). Dès lors, les deux variétés abéliennes  $\tilde{V}_c$  et  $\text{Prym}^{\vee}(\Gamma/\Gamma_0)$  sont analytiquement isomorphes au même tore complexe  $\mathbb{C}^2/L_{\Lambda}$  et d'après le théorème de Chow, ces variétés sont algébriquement isomorphes. En utilisant les différentielles (3.1), on ramène le problème à

$$\int_{s_1(0)}^{s_1(t)} \omega_1 + \int_{s_2(0)}^{s_2(t)} \omega_1 = \mu_1 t,$$

$$\int_{s_1(0)}^{s_1(t)} \omega_2 + \int_{s_2(0)}^{s_2(t)} \omega_2 = \mu_2 t,$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des coordonnées appropriées, d'où le théorème.

Rappelons que  $\Gamma$  est un revêtement double non ramifié d'une surface de Riemann hyperelliptique  $\mathcal{C}$  (2.9) de genre 2. En fait, le tore  $\tilde{V}_c$  peut-être vu comme étant un revêtement double non ramifié de la variété jacobienne  $\text{Jac}(\mathcal{C})$  et l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions hyperelliptiques de genre deux. Les deux différentielles  $dt_1, dt_2$  sur  $\tilde{V}_c$ , restreintes à  $\Gamma$  coïncident avec les différentielles holomorphes sur  $\mathcal{C}$  :

$$dt_1|_{\Gamma} = \omega_1 = \frac{\alpha^2 d\alpha}{2\beta} = \frac{\zeta d\zeta}{4\eta}, \quad dt_2|_{\Gamma} = \omega_2 = \frac{d\alpha}{2\beta} = \frac{d\zeta}{4\eta}.$$

## References

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis. *Invent. Math.* **97** (1989), 3-51 .
- [2] V. I. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics*. Springer-Verlag, 1978.
- [3] W. Barth, Abelian surfaces with  $(1,2)$ -polarization. Conf. on alg. geom., Sendai, 1985, *Advanced studies in pure mathematics* **10** (1987), 41-84.
- [4] E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [5] P.L. Christiansen, J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii and N.A. Kostov, Quasi-periodic solutions of the coupled nonlinear Schrödinger equations. *Proc. Roy. Soc. London, Ser.A* **451** (1995), 685-700.
- [6] P.A. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience, 1978.
- [7] L. Haine, Geodesic flow on  $SO(4)$  and Abelian surfaces. *Math. Ann.* **263** (1983), 435-472.
- [8] A. Lesfari, Abelian surfaces and Kowalewski's top. *Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris*, 4<sup>e</sup> srie, t.**21** (1988), 193-223.
- [9] A. Lesfari, Completely integrable systems : Jacobi's heritage. *J. Geom. Phys.* **31** (1999), 265-286.
- [10] A. Lesfari, Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym. *Pacific J. Math.* Vol.**212**, No.1 (2003), 125-132.
- [11] A. Lesfari, Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences. *Elem. Math.* **58**, Issue 1 (2003), 6-20.
- [12] A. Lesfari, Integrable systems and complex geometry. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Vol.**30**, No.4 (2009) 292-326.
- [13] A. Lesfari, Théorie spectrale et problèmes non-linéaires. *Surv. Math. Appl.* **5** (2010), 151-190.
- [14] D. Mumford, *Abelian varieties*. Oxford University press, 1974.
- [15] D. Mumford, *Tata lectures on theta II*. Progress in Math., Birkhäuser-Verlag; 1982.