African Diaspora Journal of Mathematics
Volume 10, Number 2, pp. 87–95 (2010)

ISSN 1539-854X
www.math-res-pub.org/adjm

SUR LES ALGÈBRES DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS POLYNOMIAUX

H. S. G. RAVELONIRINA *
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
Université d'Antananarivo
Antananarivo 101, BP 906, MADAGASCAR

P. RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA†
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
Université d'Antananarivo
Antananarivo 101, BP 906, MADAGASCAR

M. ANONA‡
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
Université d'Antananarivo
Antananarivo 101, BP 906, MADAGASCAR

Résumé

On étudie la dérivation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$ qui contient tous les champs constants et le champ d'Euler. Elle est adjointe de son normalisateur sur les champs de vecteurs polynomiaux de $\mathbb{R}^n$. Si de plus, l'algèbre de Lie contient tous les champs linéaires diagonaux alors toutes ses dérivations sont intérieures. On donne une classification de cette algèbre de Lie.

AMS Subject Classification : 17B66 ; 17B56 ; 17B40 ; 17B70.

Keywords : Algèbre de Lie, Dérivation, Champs de vecteurs polynomiaux, Champ d'Euler.

1 Introduction

Etant donnée une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de Lie $\mathfrak{P}$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$, l'objectif central de notre article est de savoir si toutes les $\mathbb{R}$-dérivations de $\mathfrak{P}$ sont intérieures. Dans l'article [7], l'auteur considère le même problème

*E-mail address : rhsammy@yahoo.fr, hsgravelonirina@univ-antananarivo.mg
†E-mail address : princypcpc@yahoo.fr, randriaprincy@univ-antananarivo.mg
‡E-mail address : mfanona@yahoo.fr

pour l'algèbre de Lie des champs de vecteurs lisses sur une variété différentiable, et montre que toute dérivation est intérieure en utilisant le résultat de [5] sur les operateurs différentiels linéaires. Par un principe analogue, à savoir, une dérivation est une application linéaire et locale, [4] a étudié l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques réels et a montré que toute sa dérivation est intérieure en passant par l'étude des dérivations des champs holomorphes sur l'espace de Stein. Or, un champ de vecteurs polynomial nul sur un ouvert est trivial, donc la condition locale de sa dérivation ne marche pas. [2] a utilisé le " toral method " pour étudier les dérivations de certaines algèbres de Lie (nilpotentes) en tenant compte du calcul de leurs dimensions. Dans ce papier, nous étudions les $\mathbb{R}$-sous-algèbres de Lie $\mathfrak{P}$ des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$ qui contiennent tous les champs constants et le champ d'Euler. On démontre que le normalisateur $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{P}$ est une sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux de $\mathbb{R}^n$. En utilisant une graduation de $\mathfrak{P}$, et le rôle des champs constants et du champ d'Euler par le crochet des champs de vecteurs, on trouve que toute sa dérivation est adjointe par rapport à son normalisateur. On montre de plus que si tous les champs linéaires diagonaux appartiennent à $\mathfrak{P}$ alors toute sa dérivation est intérieure. En particulier, le normalisateur $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{P}$ contient tous les champs linéaires diagonaux. Le centralisateur de $\mathfrak{P}$ est réduit à zéro. Ainsi, on peut calculer le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{P}$ et de $\mathfrak{N}$. On donne des exemples d'illustration de ces résultats, des exemples d'algèbres de Lie de champs de vecteurs polynomiaux qui ne vérifient pas la condition sus-mentionnée, et où il existe une dérivation ne provenant pas des champs de vecteurs de $\chi(\mathbb{R}^n)$. La classification des algèbres de Lie simples complexes (et réels) est bien connue. C'est en partie dûe aux travaux d'Elie Cartan, de Dynkin et de Killing. Ici, en utilisant la divergence de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, on peut classifier les algèbres de Lie $\mathfrak{P}$ contenant tous les champs constants et le champ d'Euler. Le calcul du premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg des sous-algèbres de l'algèbre de Lie des dérivations d'un anneau associatif, commutatif et unitaire ; a été traité dans [6]. Mais en fait, les hypothèses dans [6] p.71 ne permettent pas d'aboutir à tous nos résultats.

2 Etude des algèbres de Lie de $\mathfrak{P}$

On désigne par $\chi(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Dans tout ce paragraphe, on considère une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de Lie $\mathfrak{P}$ (consistant) de champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$ qui contient tous les champs constants et le champ d'Euler E , où $E = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en coordonnées $\left(x^i\right)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{N}$ son normalisateur dans $\chi(\mathbb{R}^n)$; H_i l'espace vectoriel des champs homogènes de degré i avec $i \in \mathbb{N}\cup\{-1\}$. On note H_0^d l'algèbre de Lie engendrée par tous les champs linéaires diagonaux. Les champs constants sont homogènes de degré -1 et les champs linéaires de degré 0. On désigne par L_X la dérivée de Lie par rapport à $X \in \chi(\mathbb{R}^n)$. On adopte la convention d'Einstein sur la sommation d'indices sauf mention expresse.

Le crochet de deux champs de vecteurs $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ de $\chi(\mathbb{R}^n)$ en coordonnées $\left(x^i\right)_{1\leq i\leq n}$ est donné par :

$$[X,Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.1}$$

En utilisant la formule (2.1), $\mathfrak{P}$ est graduée de la façon suivante :
$\mathfrak{P} = \underset{i\geq -1}{\oplus} \mathfrak{P}_i$, où chaque $\mathfrak{P}_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de H_i, tels que

$$[\mathfrak{P}_{-1},\mathfrak{P}_{-1}] = \{0\} \text{ et } \forall i,j \geq -1 \text{ , où } i+j \geq -1,\ [\mathfrak{P}_i,\mathfrak{P}_j] \subset \mathfrak{P}_{i+j} \qquad (2.2)$$

Proposition 2.1. *Un champ X de $\mathfrak{P}$ est homogène de degré p si et seulement si $[E,X] = pX$.*

Démonstration. D'après (2.1) et (2.2), on a le résultat. □

Remarque 2.2. On peut identifier un champ linéaire c'est à dire de degré 0 à un et un seul élément de $gl(n,\mathbb{R})$, cf.[3] p.5.

Lemme 2.3. *Si $F = \sum\limits_{-1\leq i\leq k} F_i \in \mathfrak{P}$ suivant la graduation de $\mathfrak{P}$, alors $\forall i,\ F_i \in \mathfrak{P}$.*

Démonstration. Soit $F = \sum\limits_{-1\leq i\leq k} F_i$, la décomposition d'un champ de vecteurs F de $\mathfrak{P}$ en ses composantes homogènes.
$[F,E] = \sum\limits_{-1\leq i\leq k} (-i)\, F_i \in \mathfrak{P}$, on peut recommencer $(k-1)$ fois ce processus et on a :
$\forall j \in [0,k]$, $\sum\limits_{-1\leq i\leq k} (-i)^j F_i \in \mathfrak{P}$, d'où un système linéaire à la Vandermonde dont on déduit que tous les F_i appartiennent à $\mathfrak{P}$. □

Définition 2.4. Le normalisateur $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{P}$ est défini par $\mathfrak{N} = \{X \in \chi(\mathbb{R}^n) \,/\, [X,\mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}\}$.

Proposition 2.5. *Le normalisateur $\mathfrak{N}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie (consistant) des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. $\mathfrak{N}$ étant une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie cf. [1].
Soit $X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{N}$ dans $\chi(\mathbb{R}^n)$, où $(x^j)_{1\leq j\leq n}$ est un système de coordonnées de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout j, $\left[X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = -\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{P}$ alors chaque $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ est un polynôme.

Donc $\left[X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, x^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = \left(X^k - x^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$ est un champ de vecteurs polynomial.
D'où $\forall k$, X^k sont des polynômes. □

Définition 2.6. Une dérivation D de $\mathfrak{P}$ est une application $\mathbb{R}-$linéaire de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$ telle que $\forall X,Y \in \mathfrak{P}$, $D[X,Y] = [D(X),Y] + [X,D(Y)]$.

Proposition 2.7. *Une dérivation D de $\mathfrak{P}$ est nulle sur tous les champs constants et le champ d'Euler si et seulement si D est nulle.*

Démonstration. Supposons que $D(E) = D(C) = 0$, où $C \in H_{-1}$.
Compte tenu du Lemme 2.3, soit $P \in H_k$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et raisonnons par récurrence.
Pour $P \in H_{-1}$, on a par hypothèse $D(P) = 0$.
On suppose que $D(P) = 0$ soit vrai jusqu'au rang $k > -1$.
Si $P \in H_{k+1}$, d'après (2.1) on a $D[C,P] = (k+1)D(Q)$, où $Q \in H_k$. Donc c'est nul par hypothèse.
Par la définition d'une dérivation, $[D(C),P] + [C,D(P)] = 0$.
C'est à dire pour tout $C \in H_{-1}$, $[C,D(P)] = 0$, ainsi $D(P) \in H_{-1}$.

On pose $D(P) = C'$, d'après la Proposition 2.1 on a $D[E,P] = kD(P)$.
Par définition et par hypothèse sur D, $kC' = [E,C'] = -C'$, ainsi $C' = 0$.
D'où $\forall k \geq 0,\ D(P) = 0$ et $D \equiv 0$.
La réciproque est évidente. □

Proposition 2.8. *Si D est une dérivation homogène de degré 0 sur $\mathfrak{P}$, nulle sur E alors $D = L_X$ avec X un champ de vecteurs polynomial homogène de degré 0.*

Démonstration. Soit D une dérivation homogène de degré 0 de $\mathfrak{P}$, c'est à dire pour tout $i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $D(H_i \cap \mathfrak{P}) \subset H_i \cap \mathfrak{P}$. Alors pour $C \in H_{-1},\ D(C) = C'$, où $C' \in H_{-1}$.
Par (2.1) $\exists ! X \in H_0$ tel que $D(C) = [X,C]$ pour tout $C \in H_{-1}$ et $D(E) = 0 = [X,E]$.
Donc $D_{|H_{-1} \oplus \langle E \rangle} = L_X$ et d'après la Proposition 2.7, $D = L_X$. □

Théorème 2.9. *Toute dérivation de $\mathfrak{P}$ est intérieure par rapport au normalisateur $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{P}$. De plus $D = L_{(F+X)}$ avec $X \in H_0$ et $F \in \mathfrak{P} - H_0$.*

Démonstration. Soit D une dérivation de $\mathfrak{P}$. D'après le Lemme 2.3, il suffit de considérer $D(V_m)$, où V_m est un champ homogène de degré $m \geq -1$ de $\mathfrak{P}$.
On pose $D(V_m) = \sum\limits_{-1 \leq i \leq k} W_i$ et $D(E) = \sum\limits_{-1 \leq i \leq l} E_i$, où les $W_i,\ E_i \in H_i \cap \mathfrak{P}$ en vertu du Lemme 2.3.
Utilisant la définition de la dérivation en terme de composantes homogènes de même degré, on a :

$$D[E,V_m] = [D(E),V_m] + [E,D(V_m)]$$

Entraîne

$$\begin{array}{rcccc}
mW_{-1} & = & 0 & - & W_{-1} \\
mW_0 & = & 0 & + & 0 \\
mW_1 & = & 0 & + & W_1 \\
mW_2 & = & 0 & + & 2W_2 \\
\dots & = & \dots & & \dots \\
mW_{m-2} & = & 0 & + & (m-2)W_{m-2} \\
mW_{m-1} & = & [E_{-1},V_m] & + & (m-1)W_{m-1} \\
mW_m & = & [E_0,V_m] & + & mW_m \\
\dots & = & \dots & & \dots \\
mW_{m+l} & = & [E_l,V_m] & + & (m+l)W_{m+l} \\
mW_{m+l+1} & = & 0 & + & (m+l+1)W_{m+l+1} \\
mW_{m+l+2} & = & 0 & + & (m+l+2)W_{m+l+2} \\
\dots & = & \dots & & \dots
\end{array}$$

– Pour $-1 \leq i \leq m-2$ et $i > m+l$, on a $(i-m)W_i = 0 \Rightarrow W_i = 0$
– Pour $m-1 \leq i \leq m+l$, on obtient $(i-m)W_i + [E_{i-m},V_m] = 0$.
  En particulier

$$[E_0,V_m] = 0 \tag{2.3}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} D(V_m) &= [E_{-1},V_m]+W_m+\sum_{m+1\leq i\leq m+l}\left(\frac{1}{m-i}\right)[E_{i-m},V_m] \\ &= [E_{-1},V_m]+W_m+\sum_{1\leq i\leq l}\left(\frac{-1}{i}\right)[E_i,V_m] \\ &= W_m+\left[\sum_{i\neq 0}\left(\frac{-1}{i}\right)E_i,V_m\right] \end{aligned}$$

On note $F=\sum_{-1\leq i\leq l, i\neq 0}\left(\frac{-1}{i}\right)E_i\in\mathfrak{P}$, et on a $D(V_m)=W_m+[F,V_m]$.
Posant $D'=D-L_F$, c'est une dérivation homogène de degré 0 de $\mathfrak{P}$.
D'après (2.3) et le fait que tous les champs constants sont dans $\mathfrak{P}$, on a $[E_0,C]=0\,\forall C\in H_{-1}$.
Par conséquent, $E_0=0$ et $D'(E)=0$.
D'après la Proposition 2.8, $D'=L_X$ avec $X\in H_0$.
Alors $D=L_{(F+X)}$ avec $F+X$ est un champ de vecteurs polynomial sur $\mathbb{R}^n$.
Dans ce cas, $F+X\in\mathfrak{N}$ avec $F\in\mathfrak{P}-H_0$. □

Remarque 2.10. Le champ $F+X$ du Théorème 2.9 peut ne pas être dans $\mathfrak{P}$, car L_X avec X un champ linéaire diagonal est toujours une dérivation de $\mathfrak{P}$. Or, tous les champs linéaires diagonaux ne sont pas forcément dans $\mathfrak{P}$.

Proposition 2.11. *Le centralisateur $\mathfrak{C}(\mathfrak{P})$ de $\mathfrak{P}$ est nul.*

Démonstration. Par définition $\mathfrak{C}(\mathfrak{P})=\{X\in\chi(\mathbb{R}^n)\,/\,[X,\mathfrak{P}]=\{0\}\}$.
Soit $X\in\mathfrak{C}(\mathfrak{P})\subset\mathfrak{N}$, X est un champ de vecteurs polynomial d'après la Proposition 2.5.
Alors $X=\sum_{-1\leq i\leq k}X_i$ avec $X_i\in H_i$.
De la Proposition 2.1 et par définition, $[E,X]=\sum_{-1\leq i\leq k}(i)X_i=0$. Alors $\forall i\neq 0$ on a $X_i=0$.
Or $[C,X]=[C,X_0]=0\,\forall C\in H_{-1}$, alors $X_0=0$ et $X=0$.
D'où $\mathfrak{C}(\mathfrak{P})=\{0\}$. □

Théorème 2.12. *Le premier espace de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{P}$ noté $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P})$ est isomorphe à une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de Lie de H_0. Si tous les champs linéaires diagonaux appartiennent à $\mathfrak{P}$ alors $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P})$ est nul.*

Démonstration. Par définition, $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P})=\mathrm{Der}(\mathfrak{P})/\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}$ cf. [8] avec $\mathrm{Der}(\mathfrak{P})$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{P}$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}$ l'ensemble des dérivations intérieures de $\mathfrak{P}$.
Soit $L:X\in\mathfrak{N}\longmapsto \mathrm{ad}_X\in\mathrm{Der}(\mathfrak{P})$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire.
Si $L_X=0$, c'est à dire $[X,Y]=0\,\forall Y\in\mathfrak{P}$, alors $X\in\mathfrak{C}(\mathfrak{P})$.
Par la Proposition 2.11, $\mathfrak{C}(\mathfrak{P})=\{0\}$ et $X=0$. D'où l'injectivité de L.
Soit $D\in\mathrm{Der}(\mathfrak{P})$, d'après le Théorème 2.9 $\exists X\in\mathfrak{N}$ tel que $D=L_X$. D'où la surjectivité.
Par ailleurs, pour $X,Y,Z\in\chi(\mathbb{R}^n)$ $[X,[Y,Z]]+[[X,Z],Y]=[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]$ et en utilisant l'identité de Jacobi, on a $[[X,Y],Z]=L_XL_Y(Z)-L_YL_X(Z)$.
Donc $L_{[X,Y]}(Z)=[L_X,L_Y](Z)$ $\forall X,Y\in\mathfrak{N}$ et $\forall Z\in\chi(\mathbb{R}^n)$, ainsi L est un homomorphisme d'algèbres de Lie.
Par suite $\mathfrak{N}\cong\mathrm{Der}(\mathfrak{P})$.

D'une manière analogue que précédemment, $L' : X \in \mathfrak{P} \longmapsto \mathrm{ad}_X \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. C'est donc un isomorphisme d'algèbres de Lie. Par suite $\mathfrak{P} \cong \mathrm{ad}_{\mathfrak{P}}$.
Alors

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong \mathfrak{N}/\mathfrak{P}$$

, où $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ est isomorphe à une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de Lie de H_0 d'après le Théorème 2.9.
Par ailleurs, soit $D = L_{(F+X)}$ avec $F \in \mathfrak{P}$, $X \in H_0$ du Théorème 2.9.
$\exists Y \in \left(H_0 - H_0^d\right) \cup \{0\}$ et $C_0 \in H_0^d$ tels que $X = C_0 + Y$.
Par (2.1), il existe $C_0' \in H_0^d$ tel que $[Y, C_0'] = Y$. Si $H_0^d \subset \mathfrak{P}$ alors $Y \in \mathfrak{P}$ car $L_Y \in \mathrm{Der}(\mathfrak{P})$.
Ainsi $X \in \mathfrak{P}$ et toute dérivation de $\mathfrak{P}$ est intérieure. □

Corollaire 2.13. *Toute dérivation de $\mathfrak{N}$ est intérieure .*

Démonstration. D'après la *Remarque* 2.10, le normalisateur $\mathfrak{N}$ contient tous les champs linéaires diagonaux. Alors par le Théorème 2.12 on a le résultat. □

Exemple 2.14. L'algèbre de Lie des champs affines $H_{-1} \oplus H_0$ sur $\mathbb{R}^n$ de dimension $n^2 + n$ est résoluble d'ordre 3, toute sa dérivation est intérieure par le Corollaire 2.13.

Exemple 2.15. Chacune des $\mathbb{R}$-algèbres de Lie suivantes est un exemple de $\mathfrak{P}$.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ est résoluble d'ordre 2 et sa dérivation D est L_X avec X appartient à l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}$, $, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}$. Ainsi son normalisateur est $H_{-1} \oplus H_0$ et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong H_0/ < E >$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$, soit l'algèbre de Lie non simple et non résoluble, engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial x}$, $, y\frac{\partial}{\partial y}, (x)^2\frac{\partial}{\partial x}$. Sa dérivation D est L_X telle que X appartenant à l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, (x)^2\frac{\partial}{\partial x}$, et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong \{0\}$.
3. Sur $\mathbb{R}^2$, on considère l'algèbre de Lie résoluble d'ordre 3, engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} +$ $+ y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, (x)^2\frac{\partial}{\partial y}$. Sa dérivation D est L_X avec X appartient à l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, (x)^2\frac{\partial}{\partial y}$, et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong H_0^d/ < E >$.
4. Sur $\mathbb{R}^2$, l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, (x)^3\frac{\partial}{\partial x}$ est de dimension infinie dénombrable, dont le seul idéal commutatif est $\{0\}$, et $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = \mathfrak{P}$. Sa dérivation D est L_X telle que X appartenant à l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, (x)^3\frac{\partial}{\partial x}$, et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong \{0\}$.
5. On considère l'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^2$ de dimension infinie dénombrable, engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x}$. Elle a un idéal commutatif non nul engendré par $\left\{ \underset{r\geq 0}{y^r\frac{\partial}{\partial x}} \right\}$ et coïncide avec son idéal dérivé. Sa dérivation D est L_X avec X appartient à l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x}$, et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong \{0\}$.
6. Sur $\mathbb{R}^2$, soit l'algèbre de Lie de dimension infinie dénombrable engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, $,x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, (x)^2\frac{\partial}{\partial x}$. Sa dérivation D est L_X telle que X appartenant à l'algèbre de Lie engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial x}$. $\mathrm{H}^1(\mathfrak{P}) \cong \{0\}$ et $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{P}$.

Remarque 2.16. Si un champ constant ou le champ d'Euler E n'appartient pas à $\mathfrak{P}$ alors il peut exister des dérivations qui ne sont pas intérieures dans le normalisateur de $\mathfrak{P}$:
Soit la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Sa dérivation définie par $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = D\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0,\ D\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) = y\frac{\partial}{\partial y}$ est une dérivation non intérieure de $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$.
La $\mathbb{R}$-algèbre de Lie dans $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}$) admet une dérivation D (resp. D') non intérieure de son normalisateur, définie respectivement par :

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = D\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0,\ D\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$D'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = D'\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0,\ D'\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}$$

Définition 2.17. On désigne par λ_X le degré d'homogénéité d'un champ homogène X de $\mathfrak{P}$. $\lambda_{\mathfrak{S}}$ est le degré d'homogénéité maximal de tous les champs homogènes de $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}$. Ce dernier peut être infini.

Lemme 2.18. *Soient X un champ homogène de degré $k \geq 1$, $(V_i)_i$ une suite de sous-espace de $\sum_{-1\leq i\leq k} H_i$ définie par $V_0 = \mathbb{R}X$ et la relation de récurrence : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $V_{i+1} = [H_{-1} \oplus \langle E\rangle, V_i]$. Cette suite stationne en V_{k+1}. Si* $\operatorname{div}(X) = 0$ *, où* div *est la divergence de champ de vecteurs de $\chi(\mathbb{R}^n)$ alors $\forall Y \in V_k$,* $\operatorname{div}(Y) = 0$.

Démonstration. Soit X un champ homogène de degré $k \geq 1$. En vertu du rôle des champs constants et du champ d'Euler par le crochet de champs de vecteurs, la suite $(V_i)_i$ stationne lorsque $\exists j$ et $Y \in V_j$ tels que $\lambda_Y = -1$. Dans ce cas $(V_i)_i$ converge vers V_{k+1}.
La formule de divergence donne $\operatorname{div}([A,B]) = A(\operatorname{div}(B)) - B(\operatorname{div}(A))$ et $\operatorname{div}([E,A]) = E\operatorname{div}(A)\, \forall A,B \in \chi(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, si $\operatorname{div}(X) = 0$ alors $\operatorname{div}(Y) = 0,\ \forall Y \in V_{k+1}$. □

Lemme 2.19. *Il existe un champ quadratique ω de $\mathfrak{P}$ de divergence non nulle tel que $\left[\omega, \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)\right] \neq \{0\}$ si et seulement si (il existe un champ quadratique Y de $\mathfrak{P}$ de divergence non nulle et $\exists Z \in \left(H_0 - H_0^d\right) \cap \mathfrak{P}$) ou (il existe un champ quadratique Y de $\mathfrak{P}$ de divergence non nulle et $\exists Z \in H_2 \cap \mathfrak{P}$) tel que le degré $(\lambda_{V_i})_i$ tend vers $+\infty$, où $(V_i)_i$ la suite définie par $V_0 = Y$ et la relation de récurrence $\forall i \in \mathbb{N}$, $V_{i+1} = [Z, V_i]$.*

Démonstration. S'il existe un champ quadratique ω de $\mathfrak{P}$ avec $\operatorname{div}(\omega) \neq 0$ tel que

$$\left[\omega, \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)\right] \neq \{0\}$$

Comme $\operatorname{div}(\omega) \neq 0$, alors $\exists C \in H_{-1}$ tel que $[C, \omega] \neq 0$.
1$^{\text{er}}$ cas : Il existe $C' \in H_{-1}$ avec $[C', \omega] \in \left(H_0 - H_0^d\right) \cap \mathfrak{P}$ tel que le degré de la suite $(V_i)_i$ tend vers $+\infty$, où $(V_i)_i$ est définie par $V_0 = \omega$ et la récurrence $V_{i+1} = [[C', \omega], V_i]$.
2$^{\text{ème}}$ cas : $\exists C' \in H_{-1}$ tel que $[C', \omega] \in H_0^d \cap \mathfrak{P}$ et $\forall h \in H_{-1}$, $[h, \omega] \notin \left(H_0 - H_0^d\right)$.
Soit $X \in \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)$, avec $\deg(X) = k \geq 1$ tel que $[\omega, X] \neq 0$.

1. Pour $k = 1$: Il existe $C'' \in H_{-1}$ avec $[C'', X] \in \left(H_0 - H_0^d\right) \cap \mathfrak{P}$ tel que le degré de la suite $(V_i)_i$ tend vers $+\infty$, où $(V_i)_i$ est définie par $V_0 = \omega$ et la récurrence $V_{i+1} = [[C'', X], V_i]$.

2. Pour $k \geq 2$: Des crochets successifs avec les champs constants permettent de ramener X au degré 2.
   - Si $\exists C''' \in H_{-1}$ avec $[C''', X] = \alpha\omega + \omega' \in H_1 \cap \mathfrak{P}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors le degré de la suite $(V_i)_i$ tend vers $+\infty$, où $(V_i)_i$ est définie par $V_0 = \omega$ et la récurrence $V_{i+1} = [X, V_i]$.
   - Si $\forall C''' \in H_{-1},\ [C''', X] \neq \alpha\omega + \omega' \in H_1 \cap \mathfrak{P}$ alors on peut faire des crochets successifs de X avec les champs constants jusqu'à ce qu'on obtienne le sous-cas 1..

La réciproque est évidente. □

Proposition 2.20. *Il existe un champ quadratique* ω *de* $\mathfrak{P}$ *de divergence non nulle tel que* $\left[\omega, \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)\right] \neq \{0\}$ *si et seulement si* $\lambda_{\mathfrak{P}}$ *est infini.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.19, on a la nécessité.
Réciproquement, si pour tout $\omega \in H_1 \cap \mathfrak{P}$ tel que $\operatorname{div}(\omega) \neq 0$ et $\left[\omega, \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)\right] = \{0\}$, montrons que $\lambda_{\mathfrak{P}}$ est fini.
Soit alors ω un champ vérifiant ces hypothèses. On peut décomposer ω en une somme des champs quadratiques $\omega = \sum_i \omega_i$ tels que $\Delta\omega_i \neq 0\ \forall i$, où Δ désigne le laplacien de champ de vecteurs de $\chi(\mathbb{R}^n)$, sinon il existe $C \in H_{-1}$ tel que $[C, \omega] \in \left(H_0 - H_0^d\right) \cap \mathfrak{P}$ et $[\omega, [C, \omega]] \neq 0$.
Alors les champs de vecteurs polynomiaux homogènes X de degré supérieur ou égal à 2 de $\mathfrak{P}$ sont de divergence nulle avec $[\omega, X] = 0$, et les champs homogènes Y de degré inférieur ou égal à 1 de $\mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)$ vérifient $[\omega, Y] = 0$.
Donc le degré maximal des champs de $\mathfrak{P}$ dépend de l'existence dans $\mathfrak{P}$ d'un champ homogène de degré arbitraire supérieur ou égal à 2.
D'où $\lambda_{\mathfrak{P}} \geq 2$ est fini. □

Théorème 2.21. *Les seules* $\mathbb{R}$*-algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux* $\mathfrak{P}$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *contenant tous les champs constants et le champ d'Euler sont :*

1. *Les* $\mathbb{R}$*-sous-algèbres de Lie de* $H_{-1} \oplus H_0$ *contenant tous les champs constants et le champ d'Euler.*
2. *Les* $\mathbb{R}$*-algèbres de Lie de champs de vecteurs polynomiaux sur* $\mathbb{R}^n$ *contenant tous les champs constants et le champ d'Euler, dont il existe un champ homogène de divergence non nulle de* H_k *avec* $k \geq 1$ *vérifiant :* $\lambda_{\mathfrak{P}}$ *est infini si et seulement s'il existe un champ quadratique* ω *de* $\mathfrak{P}$ *de divergence non nulle tel que* $\left[\omega, \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)\right] \neq \{0\}$.
3. *Les* $\mathbb{R}$*-algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur* $\mathbb{R}^n$ *contenant tous les champs constants et le champ d'Euler, dont les champs homogènes de degré supérieur ou égal* 1 *sont de divergence nulle* ($\lambda_{\mathfrak{P}}$ *peut être fini ou infini*).

Démonstration.

1. Immédiate.
   Sinon $\lambda_{\mathfrak{P}} \geq 1$, car $\mathfrak{P}$ n'est plus un sous-espace de $H_{-1} \oplus H_0$.
2. S'il existe $X \in H_k \cap \mathfrak{P}$, où $k \geq 1$ tel que $\operatorname{div}(X) \neq 0$, d'après le Lemme 2.18 et la Proposition 2.20, on peut construire toutes les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux satisfaisant :
   $\lambda_{\mathfrak{P}}$ est infini si et seulement s'il existe un champ $\omega \in H_1 \cap \mathfrak{P},$ avec $\operatorname{div}(\omega) \neq 0$ tel que $\left[\omega, \mathfrak{P} - \left(H_{-1} \oplus H_0^d\right)\right] \neq \{0\}$.

3. Si $\forall X \in H_k \cap \mathfrak{P}$, où $k \geq 1$ tel que $\operatorname{div}(X) = 0$, en vertu du Lemme 2.18, on peut construire toutes les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux vérifiant :
$\forall Y \in \mathfrak{P} - H_0^d$, $\operatorname{div}(Y) = 0$ et $\forall Y, Z \in \mathfrak{P}$, $\operatorname{div}([Y,Z]) = 0$.

□

Corollaire 2.22. *En coordonnées* $\left(x^i\right)_{1\leq i\leq n}$*de* $\mathbb{R}^n$*, la valeur de* $\lambda_{\mathfrak{P}}$ *est infini si et seulement si* $\left(\exists i \neq j \;/\; x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ *ou* $\left(\exists i \neq j \;/\; x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \left(x^j\right)^2 \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ *ou* $\left(\exists i \;/\; \left(x^i\right)^3 \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ *figurant dans l'expression d'un élément non nul de* $\mathfrak{P}$*.*

Proposition 2.23. *Toute dérivation des champs de vecteurs polynomiaux* $\mathfrak{P}$ *sur* $\mathbb{R}$ *est intérieure, toute dérivation des champs de vecteurs polynomiaux* $\mathfrak{P}$ *de dimension infinie sur* $\mathbb{R}^2$ *est intérieure.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 2.12 et du Théorème 2.21. □

Nous tenons à remercier M. Jean Moulin Ollagnier, Université Paris XII ; M. Didier Pinchon, Université Toulouse III ; pour leurs suggestions au cours de ce travail.

Références

[1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie. *Hermann*, Paris, 1960.

[2] L. M. Camacho, J. R. Gómez and R. M. Navarro, Algebra of derivations of Lie algebras. *Linear Algebra Appl.* **332/334** (2000), 371-380.

[3] D. B. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*. Translated from the Russian by A. B. Sosinski. Contemporary Soviet Mathematics, Consultants Bureau. New York 1986.

[4] J. Grabowski, Derivations of the Lie algebras of analytic vector fields. *Compositio Math.* **43** (1981), 95-110.

[5] J. Peetre, Rectifications à l'article "Une caracterisation abstraite des opérateurs différentiels". *Math. Scand.* **8** (1960), 116-120.

[6] S. Skryabin, Degree one cohomology for the Lie algebras of derivations. *Lobachevskii J. Math.* **14** (2004), 69-107.

[7] F. Takens, Derivations of vector fields. *Compositio Math.* **26** (1973), 95-99.

[8] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **38**, Cambridge University Press, Cambridge 1994.