Introduction.

Les fonctions algébriques et leurs intégrales ont fait l'objet, depuis ABEL et RIEMANN, des plus profondes recherches des géomètres. En se plaçant au point de vue de RIEMANN, on peut définir les fonctions algébriques comme étant *uniformes* sur une surface de Riemann et n'admettant pas d'autres singularités que des *pôles;* les intégrales de ces fonctions algébriques ne sont pas uniformes sur la surface primitive de Riemann, mais le deviennent après qu'on a tracé sur cette surface des coupures appropriées; sur les deux bords d'une de ces coupures, les valeurs de l'intégrale ne diffèrent que par une constante.

De même qu'à côté des fonctions doublement périodiques ordinaires, viennent se placer les fonctions que M. HERMITE a nommées *fonctions doublement périodiques de seconde espèce* et qui se reproduisent, multipliées par des facteurs constants, quand la variable augmente de l'une ou l'autre des périodes; de même à coté des fonctions algébriques viennent se placer des fonctions qui sont uniformes sur une surface de Riemann rendue *simplement connexe,* qui n'admettent pas d'autres singularités que des pôles et dont les valeurs aux deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un *facteur* ou *multiplicateur constant.* Nous nommerons ces fonctions: *fonctions à multiplicateurs.*

Ces fonctions ont fait l'objet d'un mémoire de M. APPELL intitulé *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. RESAL, janvier 1883).

Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier les *intégrales* des *fonctions à multiplicateurs,* ce qui constitue une recherche entièrement nouvelle[1] comprenant, comme cas particulier, la théorie des intégrales

[1] Nous devons cependant citer un Mémoire de M. PRYM qui se trouve dans le Tome 70 du Journal de CRELLE (p. 354) et dont nous n'avons eu connaissance que dans le courant de l'année 1889.

abéliennes, lorsque les multiplicateurs deviennent tous égaux à l'unité. Les intégrales des *fonctions à multiplicateurs* fournissent donc une extension naturelle des intégrales abéliennes.

Ces intégrales se présentent aussi, comme nous le montrerons, dans la résolution d'un problème d'une haute importance qui a, depuis longtemps, attiré l'attention des géomètres, à savoir le problème du *développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.* On n'a jusqu'à présent rien publié sur ces développements qui doivent avoir, dans la théorie des fonctions abéliennes, un rôle aussi important que les beaux développements en séries trigonométriques donnés par JACOBI dans la théorie des fonctions elliptiques. En traitant plus particulièrement le cas des fonctions abéliennes de genre 2, nous calculons le coefficient du terme général de leurs développements en séries trigonométriques; ce coefficient est d'une nature plus compliquée que celui des développements de JACOBI: il contient dans son expression une intégrale définie qui ne paraît pas pouvoir se réduire aux fonctions élémentaires et qui comprend comme cas très particulier les fonctions de BESSEL.

Cette même intégrale définie reparaît lorsqu'on veut, à l'aide d'une série trigonométrique, faire l'inversion d'une *intégrale hyperelliptique* en se restreignant à des valeurs réelles de l'intégrale et de la variable d'intégration.[1] La résolution de ce problème trouve de nombreuses applications en mécanique rationnelle.

Pour bien faire saisir l'esprit de la méthode, nous traitons d'abord le développement en série trigonométrique de la fonction

$$\operatorname{sn} u,$$

c'est à dire de la fonction z de u définie par l'équation

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

et cela sans nous servir ni des propriétés des fonctions θ ni de la theorie des fonctions elliptiques.

[1] Voyez un Mémoire de M. WEIERSTRASS: *Über eine Gattung reell periodischer Functionen,* Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, p. 97.

La méthode que nous appliquons aux fonctions abéliennes peut aussi servir à développer en séries trigonométriques certaines racines carrées de fonctions abéliennes du genre 2, et certaines fonctions de plusieurs variables analogues aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Ce travail est divisé en *trois parties:* la première contient un résumé des principales propriétés des *fonctions à multiplicateurs,* la seconde est consacrée à l'étude des intégrales de ces fonctions, la troisième aux applications et principalement au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Nous suivons, dans ce travail, les notations et la terminologie de M. C. NEUMANN dans l'ouvrage intitulé: *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale,* von Dr. *C. Neumann,* zweite Auflage; Leipzig, Teubner, 1884.