J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
16 (1981) 675–684

UNE OBSTRUCTION GEOMETRIQUE A L'EXISTENCE DE FEUILLETAGES DE CODIMENSION 1 TOTALEMENT GEODESIQUES

FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO

1. Introduction

Soit W^{n+1} une variété riemannienne compacte, connexe et sans bord sur laquelle est défini un feuilletage transversalement orienté $\mathcal{F}$ de codimension 1. D. Asimov [1] a démontré que pour W à courbure sectionnelle constante c on a

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(W)}\int_W K = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{2^n c^{n/2}}{\binom{n}{n/2}}, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Soit maintenant une variété W de dimension 3. S'il existe des constantes K_1, K_2 telles que $K_1 \leqslant c(x, Q_2) \leqslant K_2$, $\forall x \in W, \forall Q_2 \subset T_xW$. On a

$$2K_1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{vol}(W^3)}\int_{W^3} K \leqslant 2K_2,$$

où $K\colon W \to \mathbf{R}$, désigne la courbure de Lipschitz-Killing (de Gauss si $n = 2$) de la feuille qui passe par x au point x avec la métrique induite par celle de W, et $c(x, Q_2)$ la courbure sectionnelle en x dans la direction *du* 2-plan $Q_2 \subset T_xW$.

D'autre part, R. Langevin, H. Rosenberg et l'auteur démontrent dans [2] que

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(W)}\int_W \eta_k = \begin{cases} c^{k/2}\binom{n/2}{k/2} & \text{si } n \text{ et } k \text{ sont pairs,} \\ 0 \quad \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

pour W de courbure constante c, et η_k désignant la k-ième fonction symétrique de courbure extrinsèque de la feuille qui passe par x au point x. Suivant [2], les fonctions η_k sont définies par

$$\det(I + tA_x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x)t^i,$$

Received June 2, 1980.

I étant l'endomorphisme identité, et A_x: $T_xM_x \to T_xM_x$ étant défini par $A_x(Y) = \nabla_Y(N)$, où M_x est la feuille qui passe par x, et N, ∇ le vecteur normal à $\mathcal{F}$ et la connexion riemannienne de W respectivement.

Il est aussi possible de définir des fonctions intrinsèques de courbure γ_k, $k = 2\alpha$, $\alpha = 1, 2, \cdots, n/2$, sur les feuilles de $\mathcal{F}$.

On les appellera courbure k-scalaire [2] et elles mesurent, en chaque point de la feuille, la moyenne des courbures k-sectionnelles. Dans ce cas, pour n pair on a

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(W)} \int_W \gamma_k = \sum_{r=0}^{k/2} c^{k/2} \frac{\binom{k/2}{r}\binom{n/2}{r}}{\binom{n}{2r}}.$$

On annonce ici des généralisations de ces résultats de même qu'une obstruction géométrique à l'existence de feuilletages totalement géodésiques.

Dans les assertions ci-dessous, la variété riemannienne W^{n+1} sera toujours compacte, connexe, sans bord et de dimension impaire.

Avec les mêmes notations utilisées jusqu'à maintenant on a

(i) Si $n + 1 \geqslant 3$ et s'il existe des constantes K_1, K_2 telles que

$$K_1 \leqslant c(x, Q_2) \leqslant K_2,$$

alors

$$d_1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \leqslant d_2,$$

où d_1, d_2 ne dépendent que de K_1, K_2 et de la dimension n.

En outre, si W est une variété d'Einstein (courbure de Ricci constante), alors l'intégrale $\int_W \gamma_2$ ne dépend pas du feuilletage.

Observation. γ_2 est la courbure scalaire usuelle des feuilles de W.

(ii) S'il existe un entier $q, 1 \leqslant 2q \leqslant n - 1$, tetlle que les courbures $2q$-sectionnelles de W ne s'annulent pas, alors W n'admet pas de feuilletages totalement géodésiques de codimension 1. En particulier les espaces à courbure non nulle (sectionnelle) ont cette propriété.

(iii) Il existe des $(n + 1)$-formes globales Θ_{2k}, $0 \leqslant 2k \leqslant n$, qui dépendent et la variation du champ de vecteurs N normal à $\mathcal{F}$, mais dont les intégrales sur W ne dépendent pas du feuilletage. En outre

$$\int_W \Theta_{2k} = \int_W c_{2k},$$

où c_{2k} est la courbure $2k$-scalaire de W. Donc l'intégrale de gauche ne dépend que de la métrique de W.

Remarque. W est orientée et $\mathcal{F}$ est transversalement orientable.

2. Notation

Soit $x \in W^{n+1}$, $U \ni x$ un ouvert de W, $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ un repère orthonormal adapté sur U:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n+1; \quad N = e_{n+1} \perp \mathcal{F}.$$

Le corepère, les formes de connexion et de courbures associées sont donnés par

$$\theta_i(e_j) = \delta_{ij}, \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \delta_{ii} = 1,$$
$$\omega_{ij}(u) = \langle \nabla_u(e_i), e_j \rangle,$$
$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj},$$

$\langle \ , \ \rangle$ et ∇ dénotent respectivement le produit scalaire et la connexion riemannienne associés à $(W, \langle\ \rangle)$. Les formules de structure sont

$$d\theta_i = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \theta_k, \quad d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}.$$

Et l'identité de Bianchi prend la forme

$$d\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} - \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

3. Les formes $\psi_{k,2l,n}$, $\varphi_{k,2l,n}$, $\Gamma_{2r,n}$ et un lemme combinatoire

Avec les notations introduites au §2 on peut définir des n-formes $\psi_{k,2l,n}$

$$0 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant 2l \leqslant n, \quad k + 2l \leqslant n$$

et des $(n+1)$-formes $\varphi_{k,2l,n}$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant 2l \leqslant n-2, \quad k + 2l \leqslant n - 2l$$

sur un ouvert $U \subset W$. Ces formes sont directement associées au feuilletage $\mathcal{F}$ et sont définies à l'aide d'un repère orthonormal adapté $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ par

$$\psi_{k,2l,n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)},$$

$$\phi_{k,2l,n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k+1),n+1} \wedge \Omega_{\sigma(k+2),\sigma(k+3)}$$
$$\wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l)\sigma(k+2l+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)},$$

où S_n dénote le groupe symétrique des permutations à n-éléments.

3.1. Lemme. *Les formes $\psi_{k,2l,n}$, $\phi_{k,2l,n}$ sont globales.*

Démonstration. Soit $\{\bar{e},\cdots,\bar{e}_{n+1}\}$ un autre repère orthonormal adapté à $\mathfrak{F}$. On a

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$\bar{e}_{n+1} = e_{n+1},$$

$\det(a_{ij}) = 1$, (a_{ij}) est une matrice orthogonale. On a aussi

$$\bar{\omega}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_{j,n+1},$$
$$\bar{\Omega}_{ij} = \sum_{r,s=1}^{n} a_{i,r}a_{j,s}\Omega_{r,s}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$
$$\bar{\Omega}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Omega_{j,n+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{k,2l,n} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\sum_{r=1}^{n} a_{\sigma(1),r}\omega_{r,n+1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{r=1}^{n} a_{\sigma(k),r}\omega_{r,n+1}\right)\\ \wedge\left(\sum_{r,s=1}^{n} a_{\sigma(k+1),r}a_{\sigma(k+2),s}\Omega_{r,s}\right) \wedge \left(\sum_{r,s=1}^{n} a_{\sigma(k+3),r}a_{\sigma(k+4),s}\Omega_{r,s}\right)\\ \wedge\cdots\wedge\left(\sum_{r,s=1}^{n} a_{\sigma(k+2l-1),r}a_{\sigma(k+2l),s}\Omega_{r,s}\right) \wedge \left(\sum_{r=1}^{n} a_{\sigma(k+2l+1),r}\theta_r\right)\\ \wedge\left(\sum_{r=1}^{n} a_{\sigma(k+2l+2),r}\theta_r\right) \wedge\cdots\wedge\left(\sum_{r=1}^{n} a_{\sigma(n),r}\theta_r\right).\end{aligned}$$

La symétrie de S_n nous donne immédiatement

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{k,2l,n} = \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)a_{\sigma(1)\tau(1)}\omega_{\tau(1),n+1}\wedge\cdots\\ \wedge a_{\sigma(k)\tau(k)}\omega_{\tau(k),n+1} \wedge a_{\sigma(k+1)\tau(k+1)}a_{\sigma(k+2)\tau(k+2)}\Omega_{\tau(k+1)\tau(k+2)}\\ \wedge\cdots\wedge a_{\sigma(k+2l-1)\tau(k+2l-1)}a_{\sigma(k+2l)\tau(k+2l)}\Omega_{\tau(k+2l-1)\tau(k+2l)}\\ \wedge a_{\sigma(k+2l+1)\tau(k+2l+1)}\theta_{\tau(k+2l+1)} \wedge a_{\sigma(k+2l+2)\tau(k+2l+2)}\theta_{\tau(k+2l+2)}\\ \wedge\cdots\wedge a_{\sigma(n)\tau(n)}\theta_{\tau(n)}.\end{aligned}$$

Le fait que $\det(a_{ij}) = 1$ fournit $\bar{\psi} = \psi$. Par un processus entièrement analogue on démontre que $\bar{\phi} = \phi$.

3.2. Lemme fondamental.

$$d\psi_{k,2l,n} = k\phi_{k-1,2l,n} + 2l\phi_{k+1,2(l-1),n} - (n-k-2l)\psi_{k+1,2l,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

Démonstration. $d\psi_{k,2l,n} = A + B + C$, où

$$A = k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1}$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

$$B = (-1)^k l \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1}$$
$$\wedge d\Omega_{\sigma(k+1),\,\sigma(k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(k+3),\sigma(k+4)} \wedge \cdots$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

$$C = (-1)^k (n-k-2l) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1}$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)}$$
$$\wedge d\theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

Mais

$$A = A_1 + k\phi_{k-1,2l,n}, \text{ où}$$

$$A_1 = k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\sigma(1),j} \wedge \omega_{j,n+1} \right) \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1}$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

Et

$$A_1 = A_{11} + A_{12}, \text{ où}$$

$$A_{11} = (-1)^{k+1} 2lk \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \wedge \omega_{\sigma(k+1),\sigma(1)}$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(1),\sigma(k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(k+3),\sigma(k+4)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)}$$
$$\wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)},$$

$$A_{12} = (-1)^{k+1} (n-k-2l) k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1}$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)}$$
$$\wedge \omega_{\sigma(k+2l+1),\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

D'autre part

$$B = -A_{11} + B_1 + 2l\phi_{k+1,2(l-1)n}, \text{ où}$$

$$B_1 = -2l(-1)^k(n-k-2l)\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1}$$
$$\wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)}$$
$$\wedge \omega_{\sigma(k+2l+1),\sigma(k+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

Pour C nous avons

$$C = -A_{12} - B_1 - (n-k-2l)\psi_{k+1,2l,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

Donc

$$d\psi_{k,2l,n} = A + B + C = k\phi_{k-1,2l,n} + 2l\phi_{k+1,2(l-1),n}$$
$$- (n-k-2l)\psi_{k+1,2l,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

3.3. Définition. On associe au feuilletage $\mathscr{F}$ des $(n+1)$-formes $\Gamma_{2r,n}$ sur W pour $r = 0, 1, \cdots, n/2$, définies par l'équation

$$\Gamma_{2r,n} = \eta_{2r,n} \wedge \theta_{n+1} + (-1)^{r+1}\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 5.3}{2.4.6\cdots(2r-4)(2r-2)}\phi_{0,2r-2,n},$$

où

$$\eta_{2r,n} = (n-2r+1)\Big[-\psi_{2r,0,n} + \frac{2r-1}{2}\psi_{2r-2,2,n} - \frac{(2r-1)(2r-3)}{2.4}\psi_{2r-4,4,n}$$
$$+ \cdots + (-1)^{r-1}\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 7.5.}{2.4\cdots(2r-6)(2r-4)}\psi_{4,2r-4,n}$$
$$+ (-1)^r\frac{(2r-1k)(2r-3)\cdots 7.5.3}{2.4\cdots(2r-6)(2r-4)(2r-2)}\psi_{2,2r-2,n}\Big].$$

3.4. Corollaire. *Les formes $\Gamma_{2r,n}$ sont exactes.*

Démonstration. Il suffit de prendre

$$\tau_{2t-1,n} = \psi_{2r-1,0,n} - \frac{2r-1}{2}\psi_{2r-3,2,n} + \frac{(2r-1)(2r-3)}{2.4}\psi_{2r-5,4,n} - \cdots$$
$$+ (-1)^{r-2}\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots 7.5}{2.4\cdots(2r-6)(2r-4)(2r-2)}\psi_{2,2r-2,n},$$

et appliquer le lemme fondamental pour obtenir

$$d\tau_{2k-1,n} = \Gamma_{2r,n}.$$

4. Les résultats

4.1. Théorème. *Si les courbures sectionnelles de W sont bornées par K_1 et K_2, c.à.d., $K_1 \leqslant c(x, Q_2) \leqslant K_2 \forall x \in W, \forall Q_2 \subset T_xW$, alors,*

$$\frac{n}{n-1}K_1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{vol}(W)}\int_W \gamma_2 \leqslant \frac{n}{n-1}K_2.$$

En outre, si W est une variété d'Einstein on a

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(W)}\int_W \gamma_2 = \frac{1}{n-1}\rho,$$

où ρ est la courbure de Ricci de W.

Démonstration. D'après le lemme fondamental on a

$$d\psi_{1,0,n} = \phi_{0,0,n} - (n-1)\psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1}. \tag{1}$$

L'expression de la courbure scalaire de la feuille sera donnée à l'aide d'un repère orthonormal adapté par:

$$\gamma_2 \nu = \frac{-1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\overline{\Omega}_{\sigma(1),\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1},$$

où les $\overline{\Omega}_{ij}$ sont les formes de courbure de la feuille vue comme sous-variété régulière de W^{n+1} munie de la métrique induite par l'inclusion de la feuille et ν la $(n+1)$-forme volume de W. Explicitement

$$\overline{\Omega}_{ij} = \omega^*_{i,n+1} \wedge \omega^*_{n+1,j} + \Omega^*_{ij}$$

où

$$\omega^*_{i,n+1} = \lambda^*\omega_{i,n+1},\ \Omega^*_{ij} = \lambda^*\Omega_{ij},$$

λ: $M_x \to W$, l'inclusion de la feuille qui passe par x.

Donc, on aura

$$\begin{aligned}
-\gamma_2\nu &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\omega^*_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega^*_{n+1,\sigma(2)} + \Omega^*_{\sigma(1),\sigma(2)}\right) \\
&\qquad \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} \\
&= -\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_n \qquad (2) \\
&\qquad + \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\Omega_{\sigma(1),\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} \\
&= \frac{-1}{n!}\psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} - \left[\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j=2}^{n} c_{ij}\right]\nu,
\end{aligned}$$

où c_{ij} est la courbure sectionnelle de W dans la direction du 2-plan déterminé par $\{e_i, e_j\}$.

Le théorème de Stokes appliqué à (1) fournit

$$\int_W \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} = \frac{1}{n-1} \int_W \phi_{0,0,n}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\phi_{0,0,n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} \\ &= \left[+ (n-1)! \sum_{j=1}^{n} c_{j,n+1} \right] \nu.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_W \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} = (n-2)! \sum_{j=1}^{n} c_{j,n+1}.$$

Intégrant les deux membres de l'égalité (2) on obtient

$$\int_W \gamma_2 \nu = \int_W \left[\frac{(n-2)!}{n!} \sum_{j=1}^{n} c_{j,n+1} + \frac{\sum_{i<j=2}^{n} c_{ij}}{\binom{n}{2}} \right] \nu. \tag{3}$$

Maintenant, l'inégalité $K_1 \leqslant c_{ij} \leqslant K_2$, $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, entraîne

$$\frac{n}{n-1} K_1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \nu \leqslant \frac{n}{n-1} K_2.$$

Si, en outre, W est une variété, d'Einstein, l'équation (3) nous donne

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(W)} \int_W \gamma_2 = \frac{1}{n-1} \rho,$$

puisque $\sum_{j=1}^{n} c_{j,n+1} = \rho$ et $\sum_{i<j\leqslant 2}^{n} c_{ij} = \frac{1}{2}(n-1)\rho$.

4.2. Théorème. *S'il existe un entier pair p, $2 \leqslant p \leqslant n$, tel que les courbures p-sectionnelles de W soient partout non nulles, alors W n'admet pas de feuilletages totalement géodésiques de codimension 1. En particulier, sur une variété riemannienne à courbure sectionnelle (2-sectionnelle) non nulle il n'y a pas de feuilletages totalement géodésiques de codimension 1.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il y ait un feuilletage totalement géodésique $\mathcal{F}$ sur W. Alors les formes $\psi_{k,2l,n} \wedge \theta_{n-1}$ sont nulles. Donc d'après définition 3.3

$$\Gamma_{p,n} = (-1)^{p/2+1} \frac{(p-1)(p-3)\cdots 5.3.}{2.4.6\cdots(p-4)(p-2)} \phi_{0,p-2,n}.$$

Mais $\Gamma_{p,n}$ est exacte. Donc

$$\text{(4)} \qquad \int \Gamma_{p,n} = (-1)^{p/2-1} \frac{(p-1)(p-3)\cdots 5.3.}{2.4.6\cdots(p-4)(p-2)} \phi_{0,p-2,n} = 0.$$

Par contre

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} &\phi_{0,p-2,n}(e_1,\cdots,e_{n+1}) \\ &\quad = (-1)^{p/2-1}(p-1)!\,(n-p+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{p-1} \leq n} c_{i_1\cdots i_{p-1}n+1}, \end{aligned}$$

où $c_{i_1\cdots i_{p-1}n+1}$ est las courbure p-sectionnelle dans la direction du plan déterminé par $\{e_{i_1},\cdots,e_{i_{p-1}},e_{n+1}\}$. Pour une définition des courbures p-sectionnelles voir [4].

Donc (4), (5) fournissent

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \int_W \Gamma_{p,n} &= -\int_W \frac{(p-1)(p-3)\cdots 7.5.3}{2.4.6\cdots(p-4)(p-2)}(p-1)!\,(n-p+1)! \\ &\qquad \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{p-1} \leq n} c_{i_1\cdots i_{p-1}n+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $c_{i_1\cdots i_{p-1}n+1} \neq 0$ avec la connexité de W.

4.3. Théorème. *Soit Θ_{2k}, $0 \leq 2k \leq n$, la $(n+1)$-forme sur W définie par*

$$\Theta_{2k} = -\Gamma_{2k,n} + (-1)^k \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 5.3}{2.4.6\cdots(2k-2).2k}(n-2k+1)\psi_{0,2k,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

Alors

$$\int_W \Theta_{2k} = \alpha \int_W c_{2k},$$

où α est un coefficient combinatoire qui ne dépend que de k et de n, et où c_{2k} désigne la courbure $2k$-scalaire de W.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \psi_{0,2k,n} \wedge \theta_{n+1} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\Omega_{\sigma(1),\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(2k-1),\sigma(2k)} \wedge \theta_{\sigma(2k+1)} \\ \wedge \theta_{\sigma(2k+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc il est évident que

$$\psi_{0,2k,n} \wedge \theta_{n+1} = \left[(2k)!\,(n-2k)! \sum_{1 \leq i_1 \cdots i_{2k} \leq n} c_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}}\right] \nu.$$

Maintenant on applique la formule (6) du théorème 4.2 et la démonstration est achevée.

5. Conclusion

Soit $H^*(W, \mathbf{R})$ la cohomologie de de Rham de W, et $\varepsilon(\mathcal{F}) \in H^n(W, \mathbf{R})$ la classe d'Euler de $\mathcal{F}$. Alors, si on se donne un repère orthonormal adapté local, $\varepsilon(\mathcal{F})$ s'exprime par

$$\varepsilon(\mathcal{F}) = (-1)^{n/2}\frac{1}{n!}Pf\big(\tilde{\Omega}_{ij}\big),$$

où

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j} + \Omega_{ij} \text{ (voir } (M)).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mathcal{F}) &= \frac{1}{n!}(-1)^{n/2} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\big(\omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(2)} + \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}\big) \\
&\qquad \wedge \big(\omega_{\sigma(3),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(4)} + \Omega_{\sigma(3),\sigma(4)}\big) \wedge \cdots \\
&\qquad \wedge \big(\omega_{\sigma(n-1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(n)} + \Omega_{\sigma(n-1),\sigma(n)}\big) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\psi_{n,0,n} - \binom{n/2}{n/2-1}\psi_{n-2,2,n} + \binom{n/2}{n/2-2}\psi_{n-4,4,n} - \cdots \right. \\
&\qquad \left. + (-1)^{n/2-1}\binom{n/2}{1}\psi_{2,n-2,n} + (-1)^{n/2}\psi_{0,n,n}\right).
\end{aligned}$$

Le théorème d'Asimov (voir [1, th. 1]) peut s'énoncer de la manière suivante: *Si W^{n+1} a une courbure sectionnelle constante, alors; $\varepsilon(\mathcal{F}) \wedge \theta_{n+1} \in H^{n+1}(W, \mathbf{R})$, ne dépend pas du feuilletage.*

Ce qu'on vient de faire dans le théorème 4.3 correspond, pour le cas où $2k = n$, à définir une combinaison linéaire standard $\overline{\Theta}_n$ des formes $\psi_{2r,n-2r,n}$ à coefficients rationnels qui satisfait

$$\overline{\Theta}_n \wedge \theta_{n+1} = \Theta_n \in H^{n+1}(W, \mathbf{R})$$

ne dépend pas du feuilletage.

Cependant, les formes $\overline{\Theta}_n$ ne sont pas fermées en général.

Bibliographie

[1] D. Asimov, *Average gaussian curvatures of leaves of foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978) 131–134.

[2] F. Brito, R. Langevin & H. Rosenberg, *Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées*, C. R. Acad. Sci. Paris **28** (1977) 533–536; J. Differential Geometry **16** (1981) 19–50.

[3] J. W. Milnor & J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies, No. 76, Princeton University Press, Princeton, 1973.

[4] J. A. Thorpe, *Sectional curvatures and characteristic classes*, Ann. of Math. **80** (1964) 429–443.

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO, BRASIL