J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 519-520

SUR CERTAINES VARIÉTÉS KÄHLERIENNES A GÉODÉSIQUES TOUTES FERMÉES

MARCEL BERGER

Dans cet article nous utilisons le résultat principal de l'article précédent d'A. Weinstein [6] pour démontrer la:

Proposition. *Soit $(P^n(C), g)$ une structure kählérienne sur le projectif complexe, de structure complexe coïncidant avec la structure complexe usuelle de $P^n(C)$. Alors g est isométrique à g_0 si g vérifie les conditions suivantes:*

(i) *$(P^n(C), g)$ est une $C_{1/2}$-variété* (voir [6]);

(ii) *son entier de Weinstein $i(P^n(C), g)$ est égal à $\binom{2n-1}{n-1}$ (c'est à dire à celui de la structure kählérienne canonique g_0 de $P^n(C)$)*;

(iii) *sur toute géodésique de $(P^n(C), g)$ le premier point conjugué est exactement à la distance $\frac{1}{2}\pi$.*

Lemme. *Soit (X, g) une variété kählérienne, de forme de Kähler ω et de courbure scalaire τ. Si g est telle que sur toute géodésique le premier point conjugué soit à une distance supérieure ou égale à $\frac{1}{2}\pi$, alors*

$$\text{volume}\,(g) = \frac{1}{n!}\int_X \omega^n \geq \frac{1}{n!\,n(n+2)}\int_X \tau\omega^n\ ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si (X, g) est isométrique à $(P^n(C), g_0)$.

La démonstration de ce lemme consiste seulement à reprendre la démonstration du théorème 5.1 de [4], en se contentant cette fois-ci de prendre le long de chaque géodésique γ le seul champ de vecteurs $J(\gamma'(t))$, où J désigne la structure complexe (X, g); on est alors conduit à calculer la moyenne des courbures sectionnelles holomorphes en un point, moyenne dont la valeur est donnée par la lemme 7.4 de [1]. La formule du lemme à démontrer en résulte alors directement.

Démontrons maintenant la proposition. D'après (i) et (ii), [6] montre que:

$$\text{volume}\,(g) = \text{volume}\,(g_0)\ .$$

Soit ω (resp. ω_0) la forme de Kähler de g (resp. g_0); puisque $\dim H^2(P^n(C), \boldsymbol{R}) = 1$, on a $\omega = k\omega_0 + d\alpha$, d'où

Received September 12, 1973.

$$\text{volume}\,(g) = \frac{1}{n!}\int_{P^n(C)} \omega^n = k^n\left(\frac{1}{n!}\int_{P^n(C)} \omega_0^n\right) = k^n \,\text{volume}\,(g_0)\ .$$

C'est donc nécessairement que $k = 1$.

Soit τ (resp. τ_0) la courbure scalaire de g (resp. g_0). Il est classique (voir par exemple [2, F. 63, p. 118]) qu'alors

$$\int_{P^n(C)} \tau\omega^n = \int_{P^n(C)} \tau_0\omega_0^n\ ,$$

parce que g et g_0 ont la même structure complexe et que $k = 1$. Appliquant maintenant le lemme à g et à g_0 on obtient:

$$\text{volume}\,(g) \geq \frac{1}{n!\,n(n+2)}\int_{P^n(C)} \tau\omega^n\ ,$$

$$\text{volume}\,(g_0) = \frac{1}{n!\,n(n+2)}\int_{P^n(C)} \tau_0\omega_0^n\ .$$

La proposition résulte donc du "seulement si" du lemme.

Remarques. 1. Si n est impair, on peut supprimer la condition d'identité de la structure complexe de g avec l'usuelle: utiliser en effet [3].

2. La condition (ii) est évidemment satisfaite pour les g suffisamment voisines de g_0.

3. Les surfaces de Zoll (cf. [6]) montrent que la condition (iii) est bien nécessaire pour $S^2 = P^1(C)$. Il serait intéressant de décider si (iii) reste nécessaire lorsque $n > 1$.

4. Pour un analogue infinitésimal, voir [5].

Bibliographie

[1] M. Berger, *Sur les variétés d'Einstein compactes,* C.R. III^e Réunion Math. Expression latine, Namur (1965) 35–55.

[2] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne,* Lecture Notes in Math. Springer, Vol. 194, Berlin, 1971.

[3] F. Hirzebruch & K. Kodaira, *On the complex projective spaces,* J. Math. Pures Appl. **36** (1957) 201–216.

[4] L. Green, *Auf Wiedersehenflächen,* Ann. of Math. **78** (1963) 289–299.

[5] R. Michel, *Problèmes d'analyse géométrique liés à la conjecture de Blaschke,* Bull. Soc. Math. France **101** (1973) 17–69.

[6] A. Weinstein, *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed,* J. Differential Geometry **9** (1974) 513–517.

Université Paris VII