Théorèmes-limite de Szegö dans le cas matriciel

Par Jean Chanzy

Laboratoire de Mathématiques, Université de Paris-Sud Xl, Bâtiment 425, F-91405 Orsay, France

(Communicated by Heisuke Hironaka, m.j.a., Oct. 12, 2006)

Abstract: This work is a theoretical study of Toeplitz operators the symbol of which is a regular matricial function, positive definite everywhere on the one-dimensionnal torus. We propose a trace theorem with an asymptotic expression giving an extension of the three Szegö limit theorems to the matricial case.

Key words: Opérateur de Toeplitz ; opérateur matriciel ; théorèmes-limite de Szegö ; espaces de Lebesgue ; fonction matricielle.

1. Introduction. Cette note s'inscrit à la fois dans le cadre de la théorie de la prédiction des processus stationnaires du second ordre, développée par Helson et Lowdenslager [H-L] pour un passé infini et dans celui de la théorie des espaces de Hilbert avec poids. Les démonstrations des théorèmes qui suivent ont été publiées dans [C]. Nous étendons ici aux opérateurs de Toeplitz à symbole matriciel des théorèmes connus dans le cas d'un symbole fonctionnel. Dans ce cadre, à partir d'une formule d'inversion exacte d'une matrice de Toeplitz à blocs, établie dans [C], où le symbole est une fonction matricielle définie sur le tore à une dimension, et qui donne l'expression des blocs de la matrice inverse, nous donnons un théorème de trace sous forme d'une expression asymptotique « à la Szegö », permettant d'étendre au cas matriciel les trois principaux théorèmes-limite de Szegö, avec des formules aussi explicites que celles de Szegö. Nous utilisons ici des techniques très différentes à base de séries d'opérateurs de Hankel[N], mais les symboles vérifient les hypothèses de décomposition du théorème de Helson et Lowdenslager[H-L]. Ce théorème permet de décomposer une fonction matricielle hermitienne semi-définie positive partout sur le tore à une dimension, et intégrable, en le produit d'une fonction matricielle de type analytique (c'est-à-dire de carré intégrable et développable en série de Fourier) par son adjoint. Ce théorème a été établi à partir d'une généralisation au cas matriciel du théorème de Szegö relatif à la décomposition de Lebesgue d'une mesure complexe en une partie régulière et une partie singulière.

Dans la présente note, nous nous plaçons dans le cadre des espaces de Lebesgue de fonctions matricielles. Plus précisément, nous notons $\mathbf{T}$ le tore à une dimension, identifié avec l'intervalle $]-\pi,\pi]$, σ la mesure de Haar sur $\mathbf{T}$, et $\mathring{\imath}$ l'imaginaire pur de $\mathbf{C}$. Nous considérons le caractère :

$$\begin{aligned}\chi :]-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathbf{T}\\ \theta &\longmapsto e^{\mathring{\imath}\theta}.\end{aligned}$$

Nous notons $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace des matrices de dimension $n\times n$ à coefficients dans le corps des complexes $\mathbf{C}$ et Id la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$.

Nous munissons l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ des trois normes vectorielles usuelles

$$\|M\|_1 = \sum_{1\le i\,,\, j\le n} |m_{i\,j}|\,,$$

$$\|M\|_2 = [\mathrm{tr}\,(MM^*)]^{1/2} \text{ et } \|M\|_\infty = \max_{1\le i\,,\,j\le n} |m_{i\,j}|\,,$$

$$\forall M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}).$$

Nous utilisons les espaces de Lebesgue de fonctions matricielles suivants :

$$L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T}) = \left\{ M : \mathbf{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \;:\; \int_{\mathbf{T}} \|M\|_2^2 \,\mathrm{d}\sigma < +\infty \right\},$$

qui, muni du produit scalaire :

$$\langle M, M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T})} = \frac{1}{n}\int_{\mathbf{T}} \mathrm{tr}\,(MM'^*)\,\mathrm{d}\sigma,$$

est un espace de Hilbert,

2000 Mathematics Subject Classiffcation. Primary 47Axx, 47A05, 47Bxx, 47B48, 47B35, 47B39, 47F05.

$$L^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T}) = \Big\{ M : \mathbf{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \ : \|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T})} = \sup_{z\in\mathbf{T}} \|M(z)\|_{\infty} < +\infty \Big\},$$

$$L^{1}_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T}) = \Big\{ M : \mathbf{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \ : \|M\|_{L^{1}_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T})} = \frac{1}{n}\int_{\mathbf{T}} \|M\|_1 \ \mathrm{d}\sigma < +\infty \Big\},$$

notés $L^2_{\mathfrak{M}}$, $L^1_{\mathfrak{M}}$ et $L^{\infty}_{\mathfrak{M}}$ dans la suite.

Nous prenons un symbole matriciel F qui est une matrice hermitienne définie positive partout sur le tore, on définit son logarithme au moyen d'une série de puissances de matrices et on suppose que F et $\log(F)$ sont dans $L^1_{\mathfrak{M}}$. Le théorème de Helson et Lowdenslager [H-L] établit que F se décompose en le produit (a priori non commutatif) d'une fonction matricielle G de type analytique par son adjointe G^*. Nous supposons néanmoins que cette matrice G est partout normale sur le tore à une dimension, c'est-à-dire qu'elle commute partout avec son adjointe. Cette restriction est justifiée par le fait que toute fonction matricielle de type analytique dont les coefficients de Fourier sont des matrices hermitiennes qui commutent toutes les unes avec les autres vérifie cette propriété. En particulier, l'opérateur « Laplacien discret » , ainsi que d'autres, construits à partir du Laplacien comme l'opérateur de Helmholtz, sont de ce type. Enfin, nous notons $\pi^{(1)}_N$ la projection orthogonale de $L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T})$ sur $\mathscr{P}_N$, où $\mathscr{P}_N = \mathrm{Lin}_{\mathfrak{M}}\left\{\chi^k \mathrm{Id} : k \in \mathbf{N}\ ; 0 \le k \le N\right\}$, puis nous définissons l'opérateur de Toeplitz tronqué à blocs, à symbole matriciel F, par $T_N(F)(Q) = \pi^{(1)}_N(QF)$, $\forall Q \in \mathscr{P}_N$. Nous imposons aussi que G et G^{-1} soient dans $H^{\infty}_{\mathfrak{M}} = L^{\infty}_{\mathfrak{M}} \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, où $H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbf{T})$ est l'espace de Hardy des fonctions matricielles de type analytique dans $L^2_{\mathfrak{M}}$.

Le lecteur pourra comparer les résultats exposés ci-dessous avec ceux de Widom dans [W1, W2], où l'auteur utilise, quant à lui, une décomposition du symbole du type Wiener-Hopf (voir [G-L-R]) et les propriétés de l'opérateur de Toeplitz en tant qu' opérateur de Fredholm d'indice 0.

2. Théorème de trace « à la Szegö ». Le théorème suivant est une estimation asymptotique de la trace de $\left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right)$, à comparer aux formules obtenues en particulier par Grenander, Szegö [G-S] et Widom [W1, W2] :

Théorème 1. Théorème de trace « à la Szegö ». (i) *Soit $P \in \mathscr{P}_N \cap H^{\infty}_{\mathfrak{M}}$, P non nul et inversible sur $\mathbf{T}$ et tel que $P^{-1} \in H^{\infty}_{\mathfrak{M}}$. Si $G = P^{-1}$ et $P = \sum_{k=0}^{k=N} \chi^k A_k$, alors :*

$$\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=N} k\,\|A_k\|_2^2 = -2\left\langle \chi\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(\chi), P(\chi)\right\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

(ii) *Dans le cas général, si G et G^{-1} sont dans $H^{\infty}_{\mathfrak{M}}$, on pose $G^{-1} = \sum_{k\in\mathbf{N}} \chi^k \Gamma_k$, avec*

$$\Gamma_k = \widehat{G^{-1}}(k) \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}),\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

Alors si $\sum_{k\in\mathbf{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2 < +\infty$,

$$\left|\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) + \frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{k=N} k\,\|\Gamma_k\|_2^2 + (N+1)\sum_{k\ge N+1}\|\Gamma_k\|_2^2\right)\right| \le \frac{4}{n}\ \frac{\rho_{N+1}(F^{-1})}{1-\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}\ \left(\sum_{k\in\mathbf{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right).$$

Comme $\lim_{N\to+\infty}\rho_{N+1}(F^{-1}) = 0$, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\frac{2}{n}\ \sum_{k\in\mathbf{N}} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|_2^2.$$

Si de plus G^{-1} est dérivable, avec $\dfrac{\mathrm{d}G^{-1}}{\mathrm{d}z} \in L^1_{\mathfrak{M}}$,

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\frac{2}{n}\ \sum_{k\in\mathbf{N}} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|_2^2 = -\frac{2}{n}\int_{\mathbf{T}}\chi\ \mathrm{tr}\left(\frac{d(G^{-1})}{dz}(\chi)G^{-1*}(\overline{\chi})\right)\ \mathrm{d}\sigma.$$

Si la somme $\sum_{k\in\mathbf{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2$ est infinie, alors

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\infty.$$

3. Théorèmes-limite « à la Szegö ». À partir du théorème de trace précédent, nous étendons les trois principaux théorèmes-limite de Szegö au cas matriciel. Nous introduisons l'espace de Hilbert :

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}(\mathbf{T}) = \Big\{ M : \mathbf{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})\ ;\ M \in L^2_{\mathfrak{M}}\ ;\ \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k| \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 < +\infty \Big\},$$

et nous faisons désormais l'hypothèse $(\mathfrak{H})$ suivante :

Hypothèse $(\mathfrak{H})$:

(1) $F \in L^1_{\mathfrak{M}}$ et $\log(F) \in L^1_{\mathfrak{M}}$. D'après le théorème de Helson et Lowdenslager, il existe alors une décomposition de F en $F = GG^*$, avec $G \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$.

(2) G est partout sur $\mathbf{T}$ une matrice normale et inversible, $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$, $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$.

(3) Tous les coefficients de Fourier de G^{-1} commutent les uns avec les autres, $G^{-1} \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$ et $\log\left(G^{-1}\right) \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$.

Nous avons alors les théorèmes suivants :

Théorème 2. *Soit F une fonction matricielle définie sur le tore $\mathbf{T}$, à valeurs dans le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ des matrices définies positives et hermitiennes partout, telle que F vérifie l'hypothèse* $(\mathfrak{H})$ *et* $\log(F) \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$, $F^{-1} \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty} \operatorname{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) \\
&\quad = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k| \operatorname{tr}\ \left[\widehat{\log(F)}(k).\widehat{F^{-1}}^{*}(k)\right] \\
&\quad = \left\langle \log(F), F^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} .
\end{aligned}$$

Théorème 3. *Avec les mêmes hypothèses que le théorème 2,*

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty} \ln(\det T_N(F)) - \operatorname{tr}\ (T_N(\log(F))) \\
&\quad = \frac{1}{2n} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k|\ \left\| \widehat{\log(F)}(k) \right\|_2^2 \\
&\quad = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbf{N}^*} k\ \left\| \widehat{\log(F)}(k) \right\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Corollaire. *Soient F un symbole vérifiant les hypothèses du théorème 2 et $\mathscr{D}$ le disque fermé de $\mathbf{C}$ de centre 0 et de rayon $n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}$:*

$$\mathscr{D} = \left\{ w : w \in \mathbf{C}; |w| \le n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \right\}.$$

Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$ contenant 0 et le spectre $\sigma(F)$ de F, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique sur Ω, dont le développement en 0 est :

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k z^k.$$

Alors f induit sur $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ une fonction $\tilde{f}$: $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, $\tilde{f}(M)$ soit de type analytique :

$$\tilde{f}(M) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k M^k,$$

chaque composante de M étant dans Ω. On suppose en outre que la matrice $w\mathrm{Id} - F$ vérifie le théorème 2 pour tout $w \in \Omega\backslash\mathscr{D}$. Dans ces conditions, pour tout (Γ), contour rectifiable fermé de $\Omega\backslash\mathscr{D}$ entourant $\sigma(F)$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty} \operatorname{tr}\ \left(\tilde{f}\left(T_N(F)\right) - T_N\left(\tilde{f}(F)\right)\right) \\
&\quad = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_\Gamma f(w) \left\langle \log(w\mathrm{Id} - F), (w\mathrm{Id} - F)^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} \mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

Références

[C] J. Chanzy. Inversion d'un opérateur de Toeplitz tronqué à symbole matriciel et théorèmes-limite de Szegö, Ann. Math. Blaise Pascal **13** (2006), no.1, 111–205.

[B] P. Bylund, *Besov spaces and measures on arbitrary closed sets*, Univ. Umeå, Umeå, 1994.

[B-S1] A. Böttcher, and B. Silberman, *Analysis of Toeplitz operators*, Springer, Berlin, 1990.

[H-L] H. Helson, and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta Math. **99** (1958), 165–202.

[G-L-R] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[G-S] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz Forms and their applications*, Univ. California Press, Berkeley, 1958.

[H-J1] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Canbridge, 1985.

[H-J2] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Combridge 1986.

[L-S] G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, *Factorisation of Measurable Matrix Functions*, Birkhaüser, Basel-Boston, 1987.

[N] N. V. Nikolski, Hardy, Hankel and Toeplitz, vol.I ; Model operators and systems, vol.II, in *Operators, Functions, and Systems*, An easy reading, American mathematical society, Providence, 2002.

[W1] H. Widom, Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants. Advances in Mathematics **13** (1974), 284–322.

[W2] H. Widom, Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants. II. Advances in Mathematics **21** (1976), 1–29.