

Corps linéairement compacts discrets

By Mohamed TABAË

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc

(Communicated by Shokichi IYANAGA M. J. A., Sept. 12, 1995)

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires.

Une topologie linéaire sur un module est dite linéairement compacte si elle est séparée et si toute base de filtre formée de variétés linéaires affines admet au moins un point adhérent.

Nous cherchons à déterminer les anneaux intègres dont le corps des fractions est linéairement compact pour la topologie discrète. L'importance de ces anneaux a été soulignée par Vámos dans [14]. On connaît essentiellement deux types de tels anneaux: les anneaux de valuation maximaux [8] et les anneaux locaux noethériens complets de dimension 1 [2]. Dans cette Note nous obtenons une caractérisation de ces anneaux, et donnons quelques exemples.

Dans toute la suite A désigne un anneau intègre, K son corps des fractions et A' sa clôture intégrale.

Lemme 1. *On suppose que A est intégralement clos. Si A est un anneau local et si, pour tout anneau de valuation de K dominant A , K est A -linéairement compact pour la topologie définie par cet anneau, alors A est un anneau de valuation.*

Preuve. La démonstration du lemme de [12] montre que la propriété 7) du théorème 19.15 de [5] est vérifiée pour A , d'où le lemme.

On en déduit le

Corollaire 1 ([6, th. 2], [14, prop. 2.11]). *Si K est A -linéairement compact pour la topologie discrète, alors A' est un anneau de valuation.*

Preuve. L'anneau A' est linéairement compact pour la topologie discrète, il résulte donc de [3, chap. 3 §2 exer. 21 c)] que A' est local; le résultat découle alors du lemme précédent.

Dans [16, section 4], Wiseman montre, sur quelques exemples, que le type d'anneau intègre linéairement compact pour la topologie discrète peut être déterminé en considérant sa clôture intégrale; dans ce sens on a la

Proposition 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) K est A -linéairement compact pour la topologie discrète.

2) A' est un anneau de valuation A -linéairement compact pour la topologie discrète.

Preuve. 1) \Rightarrow 2). La première assertion découle du corollaire 1 et la seconde est claire.

2) \Rightarrow 1). A' est un anneau de valuation linéairement compact pour la topologie discrète, donc, d'après [4, prop. 10. 10], K est A' -linéairement compact pour la topologie discrète. L'implication résulte alors de [16, lemme 1.5] puisque, en vertu de [1, cor. 9], l'anneau A a la dualité.

Dans la proposition précédente la propriété 2) ne peut pas être remplacée par " A' est un anneau de valuation maximal". On prend $A = \mathbb{Q} + X\bar{\mathbb{Q}}[[X]]$ où $\bar{\mathbb{Q}}$ est une clôture algébrique de \mathbb{Q} . A est un anneau intègre local d'idéal maximal $X\bar{\mathbb{Q}}[[X]]$ et de corps des fractions $\mathbb{Q}((X))$; sa clôture intégrale $A' = \bar{\mathbb{Q}}[[X]]$ est un anneau de valuation discrète complet donc un anneau de valuation maximal; mais A' n'est pas A -linéairement compact pour la topologie discrète; sinon, d'après [3, chap. 3 §2 exer. 15 c)], le corps résiduel $\kappa_{A'} = \bar{\mathbb{Q}}$ de A' serait A -linéairement compact pour la topologie discrète; et par suite, en vertu de [3, chap. 3 §2 exer. 20 a)], serait de rang fini sur $\kappa_A = \mathbb{Q}$.

On désigne par $\mathfrak{f} = \text{Ann}_A(A'/A)$ le conducteur de A dans A' .

Corollaire 2. *Si $\mathfrak{f} \neq 0$, A est linéairement compact pour la topologie discrète et A' est un anneau de valuation alors K est A -linéairement compact pour la topologie discrète.*

Preuve. Soit $d \in \mathfrak{f}$, $d \neq 0$. On a $dA' \subset A$, donc dA' est A -linéairement compact pour la topologie discrète et par suite A' est A -linéairement compact pour cette topologie. Le corollaire découle alors de la proposition 1.

Un anneau intègre est dit *complètement réflexif* si tout module réduit sans torsion de rang fini est réflexif, et il est dit un D -anneau si tout mod-

ule sans torsion de rang fini est somme directe de modules de rang 1.

Les hypothèses du corollaire précédent sont vérifiées si A est complètement réflexif ou si A est un D -anneau local (cf. [11, th. 1]).

Un anneau intègre est dit cohérent si l'intersection de deux idéaux de type fini de cet anneau est un idéal de type fini.

L'hypothèse $\mathfrak{f} \neq 0$ est vérifiée si A' est une A -algèbre finie.

Corollaire 3. *Si A est un anneau cohérent de dimension 1 linéairement compact pour la topologie discrète et A' est une A -algèbre finie, alors K est A -linéairement compact pour la topologie discrète.*

Preuve. A' est quotient d'un A -module libre de rang fini, il résulte de [3, chap. 3 §2 exer. 15 b), d)] que A' est A -linéairement compact pour la topologie discrète, et à fortiori, est un anneau linéairement compact pour cette topologie, donc A' est local; d'autre part A' est une A -algèbre finie donc, en vertu de [7, cor. 1.5], est un anneau cohérent. On en déduit, d'après [10, prop. 2], que A' est un anneau de valuation. Le résultat découle du corollaire précédent puisque $\mathfrak{f} \neq 0$.

Corollaire 4 ([2, cor. 2], [14, th. 3.7]). *Si A est un anneau local noethérien complet de dimension 1 alors K est A -linéairement compact pour la topologie discrète.*

Preuve. D'après [3, chap. 3 §3 exer. 5 b)], A est linéairement compact pour la topologie discrète et d'après le théorème de Nagata [3, chap. 9 §4 th. 2] A' est une A -algèbre finie; le résultat découle alors du corollaire précédent puisque A est un anneau cohérent.

Remarque. Si A est un anneau local noethérien complet de dimension 1, le théorème de Nagata résulte du théorème de Krull-Akizuki [3, chap. 7 §2 prop. 5] et de [3, chap. 3 §3 exer. 18 a)].

Un anneau R de radical \mathfrak{R} est dit hensélien si, pour tout polynôme unitaire f de $R[X]$ et toute décomposition de son image \bar{f} dans $(R/\mathfrak{R})[X]$ en produit $\bar{f} = GH$ de polynômes étrangers unitaires, il existe deux polynômes unitaires g, h de $R[X]$ d'images respectives G, H tels que $f = gh$.

D'après [13], tout anneau linéairement compact pour la topologie discrète est hensélien.

Dans toute la suite L désigne un corps, p est un nombre premier, v une valuation sur L dont le

groupe des valeurs Γ_v est $\mathbf{Z}_{(p)}$, $n = p^r$ ($r \geq 1$) et V l'anneau de v .

La proposition suivante fournit des exemples non triviaux d'anneaux vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 1.

Proposition 2. *On suppose que V est hensélien. Soient K une extension finie de L de degré n , et $b \in K$ entier sur V tel que $K = L(b)$. v admet un unique prolongement w à K , dont l'anneau W est la fermeture intégrale de V dans K [3, chap. 6 §8 exer. 6 e)]. On pose $A = V[b]$ et $d = N_{K/L}(b)$.*

1) *A est un anneau cohérent de dimension 1 et A' est un anneau de valuation.*

2) *Si $v(b) \in U(\mathbf{Z}_{(p)})$ alors:*

i) $\mathfrak{f} \neq 0$.

ii) *Le degré résiduel $f(w/v) = 1$, l'indice de ramification $e(w/v) = n$ et l'indice initial $\varepsilon(w/v) = 1$; en particulier A' n'est pas une A -algèbre finie.*

3) *K est A -linéairement compact pour la topologie discrète si et seulement si V est maximal.*

Preuve. 1) On a $A' = W$ car $b \in W$, donc A' est un anneau de valuation et $\dim(A) = \dim(V) = h(V) = 1$. L'assertion " A est un anneau cohérent" résulte du fait que V est un anneau cohérent et que A est une V -algèbre finie.

2) Soit $x = \zeta_0 + \zeta_1 b^1 + \dots + \zeta_{n-1} b^{n-1}$, où $\zeta_i \in L$. D'après [15, exer. 32.1] on a $w(b) = \frac{v(d)}{n}$; on en déduit, puisque $v(d) \in U(\mathbf{Z}_{(p)})$, que $v(\zeta_i) + iw(b) \neq v(\zeta_j) + jw(b)$ pour $i \neq j$; d'où $w(x) = \inf(v(\zeta_i) + iw(b))$. Il en résulte que:

i) $dA' \subset A$, donc $\mathfrak{f} \neq 0$.

ii) $\Gamma_w/\Gamma_v \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, d'où $e(w/v) = n$, on en déduit que $f(w/v) = 1$, car, en vertu de [3, chap. 6 §8 lemme 2], on a $e(w/v) f(w/v) \leq n$. L'égalité $\varepsilon(w/v) = 1$ résulte de [3, chap. 6 §8 prop. 3], puisque Γ_w est dense dans \mathbf{R} . Enfin, A' est une A -algèbre finie si et seulement si A' est une V -algèbre finie; la dernière assertion découle alors de [3, chap. 6 §8 th. 2], puisque $\varepsilon(w/v) \neq e(w/v)$.

3) La condition est nécessaire: Soit $(u_\lambda + E_\lambda)_\lambda$ une base de filtre formée de variétés V -linéaires affines de L , alors $(u_\lambda + E_\lambda A)_\lambda$ est une base de filtre formée de variétés A -linéaires affines de K , et comme K est A -linéairement compact pour la topologie discrète, il existe $x \in K$ tel que $x - u_\lambda \in E_\lambda A$ pour tout λ ; mais $x = \zeta_0 + \zeta_1 b^1 + \dots + \zeta_{n-1} b^{n-1}$ ($\zeta_i \in L$), et puisque V

est intégralement clos le polynôme minimal de b sur L appartient à $V[X]$, donc pour tout sous- V -module E de L on a $EA = E \oplus Eb \oplus \cdots \oplus Eb^{n-1}$; d'où $\zeta_0 - u_\lambda \in E_\lambda$ pour tout λ .

La condition est suffisante: L est V -linéairement compact pour la topologie discrète et K est de degré fini sur L donc, comme dans la preuve du corollaire 3, K est V -linéairement compact pour la topologie discrète, et par suite A -linéairement compact pour cette topologie.

Soient $a \in V$ tel que $v(a) \in U(\mathbf{Z}_{(p)})$ et $f(X) = X^n - a$.

Lemme 2. *Le polynôme $f(X)$ est irréductible dans $L[X]$.*

Preuve. On applique [9, chap. 8 §9 th. 16].

1) Si $a \in L^p$, alors $a = x^p$, où $x \in L$; d'où $v(a) = pv(x)$, ceci est impossible car $v(x) \in \mathbf{Z}_{(p)}$ et $v(a) \in U(\mathbf{Z}_{(p)})$. Donc $a \notin L^p$.

2) Si 4 divise n , alors $p = 2$, dans ce cas $a \notin -4L^4$; en effet, si $a = -4x^4$, où $x \in L$, alors $v(a) = 2v(2x^2)$, ceci est impossible car $v(2x^2) \in \mathbf{Z}_{(2)}$ et $v(a) \in U(\mathbf{Z}_{(2)})$.

Exemple. On prend V maximal et b une racine du polynôme $f(X)$. D'après le lemme précédent $f(X)$ est irréductible dans $L[X]$, donc $A = V[b]$ vérifie les deux propriétés 1) et 2) de la proposition précédente et K est A -linéairement compact pour la topologie discrète.

Si $n = 2$ et $v(a) = 3$, on retrouve l'exemple 2.13 de [14].

Deux questions naturelles se posent:

1) Si A est linéairement compact pour la topologie discrète, A' est un anneau de valuation maximal et $\kappa_{A'}$ est de rang fini sur κ_A , K est-il A -linéairement compact pour la topologie discrète?

2) Si K est A -linéairement compact pour la topologie discrète, a-t-on $f \neq 0$?

Références

- [1] P. N. Anh: Morita duality for commutative rings. *Comm. Algebra*, **18**, 1781–1788 (1990).
- [2] B. Bâlet: Sur les modules linéairement compacts. *Bull. Soc. Math. France*, **100**, 345–351 (1972).
- [3] N. Bourbaki: *Algèbre Commutative*. Masson (1983–1985).
- [4] W. Brandal: Commutative rings whose finitely generated modules decompose. *Lect. Notes in Math.*, vol. 723, Springer-Verlag (1979).
- [5] R. Gilmer: *Multiplicative ideal theory*. Queen's Papers in Pure and Applied Math. (1992).
- [6] R. Goblot: Sur les anneaux linéairement compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A*, **270**, 1212–1215 (1970).
- [7] M. E. Harris: Some results on coherent rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**, 474–479 (1966).
- [8] I. Kaplansky: Maximal fields with valuations. *Duke Math. J.*, **9**, 303–321 (1949).
- [9] S. Lang: *Algebra*. Addison-Wesley (1970).
- [10] Y. Quentel: Sur une caractérisation des anneaux de valuation de hauteur 1. *C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A*, **265**, 659–661 (1967).
- [11] D. E. Rush: Reflexive D -rings. *J. Algebra*, **113**, 81–88 (1988).
- [12] M. Tabaa: Corps linéairement compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A*, **290**, 531–532 (1980).
- [13] M. Tabaa: Compacité linéaire et lemme de Hensel. *Proc. Japan Acad.*, **69A**, 294–295 (1993).
- [14] P. Vámos: Rings with duality. *Lond. Math. Soc.*, **35**, 275–289 (1977).
- [15] S. Warner: *Topological Fields*. North-Holland, Math. Studies (1989).
- [16] A. N. Wiseman: Integral extensions of linearly compact domains. *Comm. Algebra*, **10**, 1099–1121 (1983).