44. *Épaississement d'une hypersurface algébrique réelle*

By Michel COSTE

IRMAR (CNRS, URA 305), Université de Rennes 1, France

(Communicated by Heisuke HIRONAKA, M. J. A., Sept. 14, 1992)

1. Introduction. Ce texte contient une démonstration d'un résultat de H. Hironaka; j'ai pris connaissance de ce résultat à l'occasion d'un séminaire de B. Teissier, auquel j'emprunte la formulation et la motivation. Le problème est le suivant: trouver une déformation non singulière d'une hypersurface réelle, de même degré, telle que l'adhérence de la déformation contienne l'hypersurface toute entière. Pour rendre une hypersurface non singulière, il suffit de perturber son équation $P=0$ en une équation $P=\varepsilon$, où ε est suffisamment petit. Mais, ce faisant, des morceaux de l'hypersurface réelle risquent de s'évanouir dans le complexe. Si on perturbe de cette façon la courbe d'équation

$$X((X-1)^2(X+1)^2+Y^2)=0,$$

il y a toujours un des deux points isolés qui disparait, quelque soit le signe de ε. On peut éviter ce phénomène utilisant la perturbation $P^2=\varepsilon$ où ε est petit positif, mais alors on double le degré. Le résultat de Hironaka permet d'éviter ceci. Soit $d=\deg(P)$. Posons

$$P^{(0)}=P(X_1,\dots,X_n),$$

$$P^{(l+1)}=P^{(l)}+\sum_{i=1}^{n} t_i^{(l+1)}\frac{\partial P^{(l)}}{\partial X_i}.$$

Notons $F\subset \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^p$ la famille des hypersurfaces $(P_t^{(d)})^{-1}(0)$ paramétrée par les $\boldsymbol{t}=(t_i^{(l)})\in\boldsymbol{R}^p$ oú $i=1,\dots,n$ et $l=1,\dots,d$. Alors, dans l'espace des paramètres $\boldsymbol{R}^p$, il existe un ouvert semi-algébrique U, avec 0 dans son adhérence, tel que:

-pour tout $\boldsymbol{t}\in U$, F_t est non singulier,

-pour tout chemin $\gamma:[0,1]\to\boldsymbol{R}^p$ tel que $\gamma(0)=0$ et que $\gamma(]0,1])\subset U$, l'adhérence dans $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^p$ de la restriction de F au dessus de $\gamma(]0,1])$ est égale à la restriction de F au dessus de $\gamma([0,1])$.

On va utiliser l'idée de Hironaka-perturber en utilisant des dérivées de façon très sommaire, d'abord dans le langage des infinitésimaux. Si l'on part d'une situation où le polynôme est unitaire par rapport à une variable distinguée, la déformation utilise un infinitésimal pour détacher une racine simple d'une racine multiple du polynôme (par rapport à sa variable distinguée). On utilise d'autres infinitésimaux pour avoir une pertubation générique dans l'espace des polynômes du degré considéré. La racine simple détachée ne se perd pas au cours de la seconde perturbation. On peut ensuite se débarrasser des infinitésimaux pour obtenir une déformation paramétrée par un ouvert de l'espace des polynômes. On applique le résultat obtenu pour obtenir une majoration du nombre de composantes connexes d'une hypersurface.

C'est J-J. Risler qui a signalé que le résultat de Hironaka permettait de diviser par deux la borne précédemment connue. Enfin, on utilise la même méthode de perturbation pour le cas projectif.

Rappelons quelques outils dont nous nous servirons pour manier les infinitésimaux. On peut se reporter à [2] pour plus d'informations. Soit R un corps réel clos. Si ε est une indéterminée, on note $R\langle\varepsilon\rangle$ la clôture réelle du corps de fractions $R(\varepsilon)$ pour l'ordre qui fait ε positif et plus petit que tous les éléments positifs de R; c'est le corps des sèries de Puiseux en ε á coefficients dans R, algébriques sur $R(\varepsilon)$. On a sur $R\langle\varepsilon\rangle$ une place canonique, compatible avec l'ordre

$$\text{éval}_\varepsilon : R\langle\varepsilon\rangle \to R \cup \{\infty\}.$$

Cette place consiste à évaluer une série de Puiseux en 0, ce qui explique la notation. On note $\mathcal{O}_\varepsilon = \text{éval}_\varepsilon^{-1}(R)$ l'anneau de valuation correspondant, formé des séries de Puiseux sans terme à exposant négatif. Le groupe de valuation est $\boldsymbol{Q}$. On peut itérer cette construction, et on obtient un corps réel clos $R\langle\varepsilon_1\rangle\ldots\langle\varepsilon_k\rangle$ avec une place composée des places canoniques

$$\text{éval}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k} : R\langle\varepsilon_1\rangle\ldots\langle\varepsilon_k\rangle \to R \cup \{\infty\}$$

et l'anneau de valuation $\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k} = \text{éval}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}^{-1}(R)$ correspondant (on notera encore $\text{éval}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}$ l'extension naturelle aux anneaux de polynômes sur l'anneau de valuation). Le groupe de valuation est $\boldsymbol{Q}^k$, avec l'ordre lexicographique inverse.

Le plongement $R(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) \hookrightarrow R\langle\varepsilon_1\rangle\ldots\langle\varepsilon_k\rangle$ induit un ordre sur ie corps $R(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$. A cet ordre correspond l'ultrafiltre de sous-ensembles semi-algébriques de R^k engendré par les ouverts

$T_{\delta_1,N_2,\ldots,N_k} = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) \in R^k ; 0 < \varepsilon_1 < \delta_1,\ 0 < \varepsilon_i < \varepsilon_{i-1}^{N_i} \text{ pour } i = 2,\ldots k\}$

où δ_1 est un élément positif de R, et $N_2,\ldots,N_k$ des entiers positifs. Un polynôme de $R[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k]$ est positif pour cet ordre si et seulement si il est positif sur un tel $T_{\delta_1,N_2,\ldots,N_k}$. Un élément de $R\langle\varepsilon_1\rangle\ldots\langle\varepsilon_k\rangle$ s'identifie à une fonction de Nash (semialgébrique et de classe C^∞) sur un $T_{\delta_1,N_2,\ldots,N_k}$; par exemple, on peut se rappeler qu'une série de Puiseux réelle algébrique converge sur un intervalle $]0, \delta[$.

2. Hypersurfaces affines. Soit $P(X, Y_1,\ldots,Y_n)$ un polynôme de degré d, à coefficients dans R. On suppose que P est unitaire et de degré d en X. Soient $E_2,\ldots,E_k$ des monômes tels que

$$\frac{\partial P}{\partial X}, E_2,\ldots,E_k$$

forment une base du R-espace vectoriel des polynômes en $X, Y_1,\ldots,Y_n$ de degré inférieur ou égal à d.

Proposition 1. *Posons*

$$Q = P + \varepsilon_1\frac{\partial P}{\partial X} + \varepsilon_2 E_2 + \cdots + \varepsilon_k E_k.$$

Ce polynôme Q est dans $\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}[X, Y_1,\ldots,Y_n]$, et il vérifie que :

i) $\text{éval}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}(Q) = P$.

ii) *pour tout point $(x_0, y_1,\ldots,y_n)$ de l'hypersurface $P^{-1}(0)$ de R^{n+1}, il existe $x_0' \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}$ qui vérifie $Q(x_0', y_1,\ldots,y_n) = 0$, $\partial Q/\partial X(x_0', y_1,\ldots,y_n) \neq 0$, et*

$\text{éval}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}(x_0') = x_0$.

Soit $(x_0, y_1, \dots, y_n)$ un point de l'hypersurface $P^{-1}(0)$ de R^{n+1}. Soit m la multiplicité de la racine x_0 de $P(X, y_1, \dots, y_n)$. Posons $\Pi = P + \varepsilon_1(\partial P/\partial X)$. Alors le polynôme $\Pi(X, y_1, \dots, y_n) \in R\langle\varepsilon_1\rangle[X]$ a une racine d'ordre $m-1$ en x_0, et une racine simple x_0'' différente de x_0 et telle que $\text{éval}_{\varepsilon_1}(x_0'') = x_0$. En effet, un calcul simple montre que si $P = (X - x_0)^m S(X)$ avec $S(x_0) \neq 0$, alors $\Pi = (X - x_0)^{m-1} T(X)$ où $T(x_0)T(x_0 - (m+1)\varepsilon_1) < 0$ et la dérivée T' ne s'annule pas sur $[x_0 - (m+1)\varepsilon_1, x_0]$. Pour obtenir la proposition, on applique $k-1$ fois le lemme suivant.

Lemme 2. *Soit R un corps réel clos et Π, E deux polynômes de $R[X]$. Si Π a une racine simple x_0 dans R, alors $\Pi + \varepsilon E$ a une racine simple x_0' dans $R\langle\varepsilon\rangle$ telle que $\text{éval}_\varepsilon(x_0') = x_0$.*

Un petit calaul avec la formule de Taylor montre que le polynôme $\Pi + \varepsilon E$ prend des signes opposés aux bornes de l'intervalle

$$\left[x_0 - 2\varepsilon\left|\frac{E(x_0)}{\Pi'(x_0)}\right|,\ x_0 + 2\varepsilon\left|\frac{E(x_0)}{\Pi'(x_0)}\right|\right],$$

et que sa dérivée ne s'annulle pas sur cet intervalle.

Théorème 3. *Posons*

$$F = \{(x, y_1, \dots, y_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)\,;\, Q = 0\} \subset R^{n+1} \times R^k,$$

de sorte que la fibre F_0 de la famille F à l'origine est $P^{-1}(0)$. Alors il existe un ouvert $T = T_{\delta_1,N_2,\dots,N_k}$ tel que :

i) *pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ dans T, la fibre $F_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}$ est non singulière,*

ii) *pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to R^k$ avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(]0,1]) \subset T$, l'adhérence dans $R^{n+1} \times R^k$ de la restriction de F au dessus de $\gamma(]0,1])$ est égale à la restriction de F au dessus de $\gamma([0,1])$.*

On commence par expliciter l'assertion $x_0 = \text{éval}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}(x_0')$ qui figure dans la proposition 1. L'élément x_0' de $R\langle\varepsilon_1\rangle \dots \langle\varepsilon_k\rangle$ s'identifie à une fonction de Nash $x_0'(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ sur un ouvert $T_{\delta_1,N_2,\dots,N_k}$ comme ci-dessus. Supposons $x_0' \neq x_0$. Alors la valuation de $x_0' - x_0$ est un k-uplet de nombres rationnels $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, strictement positif pour l'ordre lexicographique inverse, tel que

$$\text{éval}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}\left(\frac{|x_0' - x_0|}{\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdots\varepsilon_k^{\alpha_k}}\right) = a \in R_+^*.$$

Quitte à diminuer δ_1 et à augmenter $N_2, \dots, N_k$, on peut supposer que

$$|x_0'(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) - x_0| < (a+1)\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdots\varepsilon_k^{\alpha_k} \text{ sur } T_{\delta_1,N_2,\dots,N_k}$$

et aussi que

$$\alpha_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_2 N_3 + \cdots + (\alpha_k N_2 \cdots N_k) > 0.$$

La proposition nous dit donc que pour tout $(x, y_1, \dots, y_n) \in P^{-1}(0)$, il existe des entiers naturels $N_1, \dots, N_k$ tels que la formule suivante soit vraie:

$$\forall \mu > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k,\ 0 < \varepsilon_1 < \delta \text{ et } 0 < \varepsilon_i < \varepsilon_{i-1}^{N_i} \text{ pour } i = 2, \dots, k,$$
$$\exists\, x'\ ((x', y_1, \dots, y_n) \in F_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k} \text{ et } |x' - x| < \eta).$$

Comme ceci est valable pour n'importe quel corps réel clos, un argument standard de compacité montre qu'il y a des $N_2, \dots, N_k$ qui conviennent pour tous les points de $P^{-1}(0)$. Ceci nous donne l'assertion ii). En augmentant $N_2, \dots, N_k$ et en réduisant δ_1, on est sûr d'avoir i), car l'ensemble des polynômes de degré au plus d dont l'ensemble des zéros est non singulier est un semi-algébrique dense.

On peut montrer (par un argument logique qui repose sur le fait qu'on a un algorithme de décision pour la théorie des corps réels clos) qu'il y a une borne uniforme pour les $N_2, \dots, N_k$ du corollaire 1, qui est une fonction récursive de n et du degré de P. Il serait bien sûr intéressant d'avoir une borne explicite.

Corollaire 4. *Pour toute hypersurface V de R^{n+1} de degré d, pour tout fermé borné $K \subset R^{n+1}$ et tout $\eta > 0$, il existe une hypersurface W non sigulière, de degré d, et telle que :*
i) *pour tout $\boldsymbol{x}$ de $V \cap K$,* dist $(\boldsymbol{x}, W) < \eta$,
ii) *pour tout $\boldsymbol{y}$ de $W \cap K$,* dist $(\boldsymbol{y}, V) < \eta$.
De plus, on peut choisir W en évitant n'importe quel sous--ensemble algébrique strict, donné à l'espace des polynômes de degré au plus d.

Corollaire 5. *Le nombre de composantes connexes d'une hypersurface algébrique $P^{-1}(0)$ de R^n, où $\deg(P) = d$, est borné par*

$$\beta(n, d) = \frac{1}{2}d\left(\frac{(d-1)^n - 2^n}{d-3} + 2^{n-1}\right) \quad \left(\frac{3}{2}(n+1)2^{n-1} \text{ si } d = 3\right).$$

Cette borne est équivalente à $d^n/2$ quand d tend vers l'infini, pour $n > 1$.

On utilise l'argument de [1], section 4.4 : le nombre de composantes connexes est égal au nombre de composantes connexes bornées plus le nombre de composantes connexes non bornées. Le nombre de composantes connexes bornées, vu le corollaire 4, est majoré par le nombre de composantes connexes bornées d'une hypersurface non singulière de même degré d. Ce dernier nombre est majoré par la moitié du nombre des points critiques pour une coordonnée choisie comme hauteur, ce qui fait $\frac{1}{2}d(d-1)^{n-1}$. Le nombre de composantes non bornées est majoré par deux fois le nombre de composantes connexes de l'intersection avec un hyperplan assez loin dans une direction convenable. Ceci nous donne la formule de récurrence

$$\beta(1, d) = d,$$
$$\beta(n, d) = \frac{1}{2}d(d-1)^{n-1} + 2\beta(n-1, d) \quad \text{pour} \quad n > 1.$$

d'où le résultat annoncé.

Remarquons que l'on n'a pas montré que le nombre maximum de composantes connexes d'une hypersurface est atteint pour une hypersurface non singulière. On va le montrer dans le cas projectif ci-dessous.

3. Hypersurfaces projectives. On considère maintenant un polynôme homogène $P(X, Y_1, \dots, Y_n)$ de degré d à coefficients dans R, dont on suppose qu'il est unitaire de degré d en X (le point de coordonnées homogènes $(1:0:\dots:0)$ n'est pas dans l'hypersurface projective $V \subset \boldsymbol{P}^n(R)$ d'équation $P = 0$). Soient $D_{n+1}, \dots, D_m$ des monômes de degré d tels que

$$Y_1\frac{\partial P}{\partial X}, \dots, Y_n\frac{\partial P}{\partial X}, D_{n+1}, \dots, D_m$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d.

Proposition 6. *Posons*

$$Q = P + \varepsilon_1 Y_1 \frac{\partial P}{\partial X} + \cdots + \varepsilon_n Y_n \frac{\partial P}{\partial X} + \varepsilon_{n+1} D_{n+1} + \cdots + \varepsilon_m D_m.$$

Le polynôme Q est homogène de degré d dans $\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}[X, Y_1, \dots, Y_n]$, et il vérifie que:

i) $\text{éval}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}(Q) = P$,

ii) *pour tout point $(x_0, y_1, \dots, y_n) \in R^{n+1}$ différent de l'origine qui vérifie $P(x_0, y_1, \dots, y_n) = 0$, il existe $x_0' \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$ qui vérifie $Q(x_0', y_1, \dots, y_n) = 0$ $\partial Q/\partial X(x_0', y_1, \dots, y_n) \neq 0$ et $\text{éval}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}(x_0') = (x_0)$.*

On va montrer par récurrence sur i que si

$$Q_i = P + \varepsilon_1 Y_1 \frac{\partial P}{\partial X} + \cdots + \varepsilon_i Y_i \frac{\partial P}{\partial X}$$

pour $0 \leq i \leq n$, et si le $(x_0, y_1, \dots, y_n)$ du théorème ne vérifie pas $y_1 = \cdots = y_i = 0$, alors on a $x_0' \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i}$ qui vérifie $\text{éval}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i}(x_0') = (x_0)$, $Q_i(x_0', y_1, \dots, y_2) = 0$ et $\partial Q_i/\partial X(x_0', y_1, \dots, y_n) \neq 0$. L'assertion est bêtement vraie pour $i = 0$, puisque l'hypothèse n'est jamais vérifiée. Passons de i á $i + 1$. Si l'on n'a pas $y_1 = \cdots = y_i = 0$ et si $y_{i+1} = 0$, alors $Q_{i+1}(X, y_1, \dots, y_n) = Q_i(X, y_1, \dots, y_n)$ et il n'y a pas besoin de changer le x_0' que l'on a déjà. Si l'on n'a pas $y_1 = \cdots = y_i = 0$ et si $y_{i+1} \neq 0$, on applique le lemme 2 à

$$Q_{i+1}(X, y_1, \dots, y_n) = Q_i(X, y_1, \dots, y_n) + \varepsilon_{i+1} y_{i+1} \frac{\partial P}{\partial X}(X, y_1, \dots, y_n)$$

qui nous permet de trouver $x_0'' \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{i+1}}$, racine simple de $Q_{i+1}(X, y_1, \dots, y_n)$ et tel que $\text{éval}_{\varepsilon_{i+1}}(x_0'') = x_0'$. Enfin si l'on a $y_1 = \cdots = y_i = 0$ et si $y_{i+1} \neq 0$, alors on considère $N(X, Y_1, \dots, \widehat{Y_{i+1}}, \dots, Y_n) = P(X, Y_1, \dots, 1, \dots, Y_n)$ et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y_{i+1}^d} Q_{i+1}(X, y_1, \dots, y_n) \\ &\quad = N\left(\frac{X}{y_{i+1}}, \frac{y_1}{y_{i+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{i+1}}\right) + \varepsilon_{i+1} \frac{\partial N}{\partial X}\left(\frac{X}{y_{i+1}}, \frac{y_1}{y_{i+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{i+1}}\right). \end{aligned}$$

Le même raisonnement que pour la proposition 1 nous donne x_0' tel que $\text{éval}_{\varepsilon_{i+1}}(x_0') = (x_0)$, et donc $x_0' \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{i+1}}$, qui vérifie ce que l'on veut.

La proposition est donc vraie quand on remplace Q par Q_n, et m par n. L'application $m - n$ fois du lemme 2 nous donne la proposition.

Théorème 7. *Posons*

$$F = \{((x : y_1 : \dots : y_n), \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) ; Q = 0\} \subset \boldsymbol{P}^n(R) \times R^m,$$

de sorte que la fibre F_0 de la famille F à l'origine est l'hypersurface projective d'équation $P = 0$. Alors il existe un ouvert $T = T_{\delta_1, N_2, \dots, N_m}$ tel que:

i) *pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ dans T, la fibre $F_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}$ est une hypersurface non singulière de $\boldsymbol{P}^n(R)$,*

ii) *pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to R^m$ avec $\gamma(0) = \boldsymbol{O}$ et $\gamma(]0,1]) \subset T$, l'adhérence dans $\boldsymbol{P}^n(R) \times R^m$ de la restriction de F au dessus de $\gamma(]0,1])$ est égale à la restriction de F au dessus de $\gamma([0,1])$.*

On convient de mesurer la distance dans $\boldsymbol{P}^n(R)$ par le sinus de l'angle des deux droites vectorielles dans R^{n+1}. Si l'on part, pour appliquer la proposition 6, d'un point $(x_0 : y_1 : \dots : y_n)$ tel que $x_0^2 + y_1^2 \cdots + y_n^2 = 1$, alors, comme cette proposition nous assure que $|x_0'^2 - x_0^2| \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\operatorname{dist}((x_0' : y_1 : \ldots : y_n), (x_0 : y_1 : \ldots : y_n))$$

$$= |x_0' - x_0| \sqrt{\frac{1 + x_0^2}{1 + x_0'^2 - x_0^2}} \leq 2 |x_0' - x_0|.$$

Ceci vérifié, on peut raisonner pour montrer ce théorème comme on l'a fait pour le théorème 3.

Corollaire 8. *Pour toute hypersurface V de $\boldsymbol{P}^n(R)$ de degré d, pour tout $\eta > 0$, il existe une hypersurface W non singulière, de degré d, et telle que:*
i) *pour tout $\boldsymbol{x}$ de V,* dist $(\boldsymbol{x}, W) < \eta$,
ii) *pout tout $\boldsymbol{y}$ de W,* dist $(\boldsymbol{y}, V) < \eta$.
Si η est suffisamment petit, W a au moins autant de composantes connexes que V. De plus, on peut choisir W en évitant n'importe quel sous-ensemble algébrique strict, donné à l'avance, de l'espace des polynômes homogènes de degré au plus d.

Corollaire 9. *Le nombre de composantes connexes d'une hypersurface algébrique de degré d de $\boldsymbol{P}^n(R)$, $n > 1$, est borné par*

$$\alpha(n, d) = \frac{1}{2}\left(\frac{(d+1)^{n+1} - (-1)^{n+1}}{d} + n - (-1)^n\right).$$

D'après le corollaire 8 on peut ne considérer que des hypersurfaces projectives non singulières de degré d, et même dont les complexifiées sont non singulières. Le nombre de composantes connexes est borné par la moitié de la somme des nombres de Betti (à coefficients dans $\boldsymbol{Z}/2$). La somme des nombres de Betti est elle même inférieure à la somme des nombres de Betti de la complexifiée, d'après la théorie de Smith (voir par exemple [1], appendix C). Or cette dernière vaut

$$\frac{(d-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}}{d} + n - (-1)^n$$

d'après [3].

On pourrait aussi calculer une borne en utilisant les mêmes idées que pour le corollaire 5 (en coupant cette fois par l'hyperplan à l'infini), mais la borne obtenue ainsi est un peu moins bonne que celle donnée ci-dessus, tout en ayant le même comportement asymptotique en $d^n/2$ quand d tend vers l'infini.

Références

[1] R. Benedetti and J-J. Risler: Real algebraic and semi-algebraic sets. Hermann, Paris (1990).
[2] J. Bochnak, M. Coste and M-F. Roy: Géométrie algébrique réelle. Springer, Berlin, Heidelberg (1987).
[3] I. Fary: Cohomologie des variétés algébriques. Ann. Math., **65**, 21–73 (1957).