59. *Sur le principe de Duhamel*

Par Keiichiro KITAGAWA
Département de Mathématiques, à la Faculté des Sciences, de l'Université d'Ehimé

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1990)

§ 1. Nous considérons le problème de Cauchy *non homogène* $(PC)_s$ et le problème de Cauchy *homogène* $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$:

$$(PC)_s \qquad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)U(t, x; s)=F(t, x) & t\in[s, T],\ x\in \boldsymbol{R}^d \\ U(s, x; s)=\Phi(x) \end{cases}$$

$$(PCH)_s \qquad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)U(t, x; s)=0 & t\in[s, T],\ x\in \boldsymbol{R}^d \\ U(s, x; s)=\Phi(x) \end{cases}$$

pour un opérateur différentiel linéaire aux dérivées partielles

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x)\equiv\partial_t I-A(t, x; \partial_x)$$

où $A(t, x; \partial_x)$ est une $N\times N$-matrice carrée.

Le fait suivant qu'on appelle le principe de Duhamel [1], [2], [6] est bien connu et souvent utilisé.

La solution $U(t, x; s)$ du $(PC)_s$ à données $(F(t, x), \Phi(x))$ est donnée par la formule

$$(D) \qquad U(t, x; s)=U(t, x; s, \Phi)+\int_s^t U(t, x; \tau, F(\tau, \circ))d\tau$$

où $U(t, x; s, \Phi)$ est la solution du $(PCH)_s$ à donnée $\Phi(x)$.

Au cas où l'opérateur L est l'opérateur différentiel ordinaire, la formule de Duhamel (D) est toujours valable. Mais il n'est pas toujours ainsi au cas où L est l'opérateur différentiel aux dérivées partielles.

Au cas où les coefficients de L ne dépendent que de t, I. G. Petrowsky [4] et L. Schwartz [5] ont montré, par la transformation de Fourier, que, si les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont uniformément bien posés, alors (D) donne la solution du $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$, et par conséquent, les $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés. L. Schwartz *y* a simplement remarqué que, si les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés, mais non uniformément, alors on ne peut rien conclure sur les $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$.

Pour la simplicité, nous traitons les problèmes dans le cadre de l'espace de Sobolev H^∞. Nous démontrons que, pour que les $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$ soient bien posés, il faut et il suffit que les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ soient uniformément bien posés. La suffisance est grâce au principe de Duhamel. A propos de cette remarque de L. Schwartz, nous donnons un exemple de l'opérateur simple pour lequel les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés, mais non uniformément.

Nous témoignons ici notre gratitude à Prof. S. Mizohata de ses précieux conseils.

§ 2. Nous précisons les notions "*bien posé*" et "*uniformément bien posés*". Soit $X \equiv (H^\infty)^N$. Soit $\Omega \equiv \{(t, s); 0 \leq s \leq t \leq T, s < T\} \subset \boldsymbol{R}^2$.

Nous convenons, à la définition de $C^1([0, T], X)$, que la valeur de la dérivée au point à l'extrémité de $[0, T]$ est définie par sa valeur limite de l'intérieure.

Supposons que les coefficients de L sont de $C^0([0, T], \mathscr{B})$.

Définition 1. Le $(PC)_s$ est dit *bien posé*, si, pour $\forall F(t, x) \in C^0([s, T], X)$, $\forall \Phi(x) \in X$, il existe une solution unique $U(t, x) \in C^1([s, T], X)$ du $(PC)_s$ à données $(F(t, x), \Phi(x))$.

Définition 2. Le $(PCH)_s$ est dit *bien posé*, si, pour $\forall \Phi(x) \in X$, il existe une solution unique $U(t, x; s, \Phi) \in C^1([s, T], X)$ du $(PCH)_s$ à donnée initiale $\Phi(x)$.

Les $(PCH)_s$ $(0 \leq s < T)$ sont dits *uniformément bien posés*, si les $(PCH)_s$ $(0 \leq s < T)$ sont bien posés et que l'ensemble des applications $H \equiv \{\Phi(x) \to U(t, x; s, \Phi): X \to X; (t, s) \in \Omega\}$ est équicontinue.

Celle-ci veut dire qu'étant donnée une semi-norme q de X, il existe une constante positive C et une semi-norme p de X telles que l'on a $q(U(t, \circ; s, \Phi)) \leq Cp(\Phi)$ uniformément par rapport à $(t, s) \in \Omega$.

Proposition. *Let trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *Les* $(PC)_s$ $(0 \leq s < T)$ *sont bien posés.*

(2) *Les* $(PCH)_s$ $(0 \leq s < T)$ *sont uniformément bien posés.*

(3) *Les* $(PCH)_s$ $(0 \leq s < T)$ *sont bien posés et la formule de Duhamel* (D) *donne la solution du* $(PC)_s$ $(0 \leq s < T)$.

Démonstration. (1)$\Rightarrow$(2) Considérons le $(PCH)_s$ à donnée initiale $\Phi(x)$. Soit $U(t, x; s)$ sa solution. Nous ramenons le $(PCH)_s$ à un $(PC)_0$, et en y appliquant le théorème du graphe fermé de Banach, nous obtenons une estimation uniforme par rapport à $(t, s) \in \Omega$ de $U(t, x; s)$. Soient en effet $V_s^0(t, x) \equiv \Phi(x) + (t-s)A(s, x; \partial_x)\Phi(x)$ et $G_s(t, x) \equiv L(t, x; \partial_t, \partial_x)V_s^0(t, x)$. Alors $V_s(t, x) \equiv V_s^0(t, x) - U(t, x; s)$ est la solution du $(PC)_s$ à données $(G_s(t, x), 0)$ telle que $\partial_t V_s(s, x) = G_s(s, x) = 0$. Nous pouvons alors prolonger $V_s(t, x)$ ($G_s(t, x)$ resp.) par 0 dans $[0, s] \times \boldsymbol{R}^d$ en $V^\sim(t, x) \in C^1([0, T], X)$ ($G^\sim(t, x) \in C^0([0, T], X)$ resp.) de sorte que $V^\sim(t, x)$ est la solution du $(PC)_0$ à données $(G^\sim(t, x), 0)$. Grâce au théorème du graphe fermé de Banach, on a l'estimation de $V^\sim(t, x)$ par la donnée $G^\sim(t, x)$. Vu la forme de $V^\sim(t, x)$, $G^\sim(t, x)$, on a l'estimation de $U(t, x; s)$ uniformément par rapport à $(t, s) \in \Omega$.

(2)$\Rightarrow$(3) Il suffit de montrer le cas où $s=0$ et $\Phi(x) \equiv 0$. Soit $F(t, x) \in C^0([0, T], X)$. Soit $U(t, x; s, F(s, \circ))$ la solution de $(PCH)_s$ à donnée initiale $F(s, x)$. Nous pouvons confirmer que, grâce à l'uniformité des $(PCH)_s$ $(0 \leq s < T)$, $U(t, x; s, F(s, \circ))$ est continue et bornée en fonction de $(t, s) \in \Omega$ à valeur dans X. Alors la fonction définie par

$$(D_0) \qquad U(t, x) = \int_0^t U(t, x; s, F(s, \circ))ds$$

est de $C^0([0, T], X)$ et satisfait à $U(0, x) \equiv 0$. On montre encore que $U(t, x)$ est dérivable par rapport à t dans $(0, T) \times \boldsymbol{R}^d$ et que

$$\partial_t U(t,x)=F(t,x)+\int_0^t \partial_t U(t,x;s,F(s,\circ))ds\in C^0([0,T],X).$$

La dérivation par rapport à x étant continue de X dans X, on a

$$\partial_x U(t,x)=\int_0^t \partial_x U(t,x;s,F(s,\circ))ds.$$

$U(t,x)$ est bien la solution du $(PC)_0$ à données $(F(t,x),0)$.

(3)$\Rightarrow$(1) Clair. C.Q.F.D.

Remarque. On peut la généraliser au cas dégénéré [3]

$$L(t,x;\partial_t,\partial_x)\equiv t^k\partial_t I-A(t,x;\partial_x)\qquad(k\geq 0).$$

et ceci dans la catégorie de fonctions C^∞ par rapport à t.

§ 3. Nous considérons l'exemple $(N=d=1)$

$$L_0(t;\partial_t,\partial_x)\equiv\partial_t-\partial_x^6(t^2\partial_x^4+2t\partial_x^2+1)-t^2\partial_x^8\qquad(x\in\boldsymbol{R}).$$

Soit $F_0(t,x)\in C^0(\boldsymbol{R},X)$ telle que sa transformée de Fourier par rapport à x est

$$\hat{F}_0(t,\xi)\equiv\sum_{n\geq 1}\exp(-\sqrt{n})\chi_n(t)\phi_n(\xi)$$

où

$$\chi_n(t)\equiv\begin{cases}1 & \left|t-\dfrac{1}{n(n+1)}\right|\leq n^{-6}\\ \geq 0 & \text{continue}\\ 0 & \left|t-\dfrac{1}{n(n+1)}\right|\geq 2n^{-6},\end{cases}\qquad \phi_n(\xi)=\begin{cases}1 & |\xi-n|\leq n^{-3}\\ \geq 0 & \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})\\ 0 & |\xi-n|\geq 2n^{-3}.\end{cases}$$

Alors, pour L_0, les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés mais non uniformément; Le $(PC)_0$ à données $(F_0(t,x),0)$ n'a pas de solution de $C^1([0,T],X)$; La fonction $U_0(t,x)$ définie par (D_0) pour $F_0(t,x)$ est la solution de $L_0(t;\partial_t,\partial_x)$ $U_0(t,x)=F_0(t,x)$ $(0<t)$, mais non la solution du $(PC)_0$ à données $(F_0(t,x),0)$.

En effet la solution $\hat{K}(t,\xi;s)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases}L_0(t;\partial_t,i\xi)\hat{K}(t,\xi;s)=0\\ \hat{K}(s,\xi;s)=1\end{cases}$$

est donnée par

$$\hat{K}(t,\xi;s)=\exp\left(\int_s^t(-\xi^6(\tau\xi^2-1)^2+\tau^2\xi^8)d\tau\right).$$

Elle satisfait à

$$(E)\qquad \hat{K}\left(\frac{1}{\xi(\xi-1)},\xi;\frac{1}{\xi(\xi+1)}\right)=\exp\left(\frac{4}{3}\frac{\xi^5}{(\xi^2-1)^2}\right)\qquad\forall\xi>1.$$

On voit que $\hat{K}(t,\xi;s)$ est bornée dans $\{(t,\xi);s\leq t\leq T\}$ pour tout s $(0\leq s<T)$ fixé. Ceci montre que les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés.

Pour que les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ soient uniformément bien posés, il faut et il suffit que $\hat{K}(t,\xi;s)$ soient majorées par un polynôme en $|\xi|$ dans $\{(t,\xi,s);(t,s)\in\Omega\}$. Celle-ci est violée par (E).

Grâce à ce que les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés, (D_0) pour $F_0(t,x)$ s'écrit, par la transformée de Fourier,

$$(\tilde{D_0})\qquad U_0(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t ds\int e^{ix\xi}\hat{K}(t,\xi;s)\hat{F}_0(s,\xi)d\xi$$

Puisque $\hat{K}(t, \xi ; s)$ est bornée dans $\{(t, \xi, s) ; 0 \leq s \leq t \leq T, s < T, \delta \leq t\}$ pour tout $\delta > 0$ fixé, $U_0(t, x)$ satisfait à $L_0(t ; \partial_t, \partial_x) U_0(t, x) = F_0(t, x)$ $(t > 0)$. Mais à cause de (E), $U_0(t, x)$ a l'estimation

$$U_0\left(\frac{1}{n(n-1)}, 0\right) \geq {}^{\exists} C n^{-9} \exp\left(\frac{2}{3} n - \sqrt{n}\right) \qquad (n \gg 1).$$

Donc, ayant la singularité à $t=0$, elle n'est plus la solution du $(PC)_0$ à données $(F_0(t, x), 0)$.

S'il y avait la solution du $(PC)_0$ à données $(F_0(t, x), 0)$, elle serait représentée par le deuxième membre de $(D_0^{\sim})$. Il n'y a donc pas de solution du $(PC)_0$ à données $(F_0(t, x), 0)$.

Références

[1] Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik. Springer-Verlag (1968).

[2] G. F. D. Duff-D. Taylor: Differential Equations of Applied Mathematics. John Wiley and Sons Inc. (1966).

[3] K. Kitagawa: Principe de Duhamel et Problèmes de Cauchy uniformément bien posés (en préparation).

[4] I. G. Petrowsky: Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen. Bull de l'Université d'Etat de Moscou. **2** (7), 1–74 (1938).

[5] L. Schwartz: Les équations d'évolution liées au produit de composition. Ann. Inst. Fourier, **2**, 19–49 (1950).

[6] E. Zauderer: Partial Differential Equations of Applied Mathematics. John Wiley and Sons Inc. (1983).