26. *Deux résultats sur les suites limite-périodiques*

Par Jean Loup MAUCLAIRE
The Institute for Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., March 12, 1987)

1er Problème. Un résultat de Radoux ([2]) dit que, si f est continue sur $[0,1]$, et si φ est l'indicateur d'Euler, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}f\left(\frac{k}{N}\right)\varphi(k)=\frac{6}{\pi^2}\int_0^1 uf(u)du.$$

Récemment, Hlawka a repris la question et étendu ce résultat à la classe des fonctions intégrables sur [0, 1] au sens de Riemann ([1]). Cependant, il ne semble pas que l'on ait souligné le fait qu'un résultat de ce genre relève essentiellement de l'indépendance statistique. En effet, on a :

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}f\left(\frac{k}{N}\right)\varphi(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)\right)\times\frac{\varphi(k)}{k}$$

et le passage à la limite donne

$$\frac{6}{\pi^2}\int_0^1 uf(u)du.$$

Or

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)=\int_0^1 uf(u)du,$$

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^2},$$

ce qui montre bien qu'il s'agit de l'indépendance statistique entre fonctions intégrables sur [0, 1] au sens de Riemann et suites limite-périodiques ($\varphi(k)/k$ est en effet un exemple bien connu d'une telle suite), i.e. : fonctions intégrables sur le groupe compact G produit de tous les entiers p-adiques muni de sa mesure de Haar normalisée dm. Par conséquent, on va donner un résultat général en s'appuyant sur l'argumentation ci-dessus présentée.

Théorème. *Si f est intégrable au sens de Riemann sur* [0, 1], *si $a(n)$ est une suite limite-périodique au sens de Besicovitch pour un exposant* ≥ 1, *alors :*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}f\left(\frac{n}{N}\right)a(n)=\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}f\left(\frac{n}{N}\right)\right)\times\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}a(n)\right)$$

$$=\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\times\left(\int_G A\,dm\right),$$

où A est un élément de $\mathscr{L}(G, dm)$ associé à $a(n)$. (*Voir* [4] *pour les détails relatifs à cette association.*)

Preuve du Théorème. On pose

$$f'=f-\int_0^1 f(t)dt,$$

et on démontre le théorème pour le couple (f', a). Pour cela, on approche f' par des "sommes de Fejer" S_η, telles que: $\int_0^1 |S_\eta(t)-f'(t)|dt \leq \eta$, et on choisit une suite d'entiers N_ε telle que N_ε : divise $N_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon'$, et pour tout p premier, la valuation p-adique de N_ε tend vers $+\infty$ quand ε tend vers 0. Dans ce cas, on sait que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} |P_\varepsilon(n)-a(n)|=0$$

où

$$P_\varepsilon(n)=\sum_{q|N_\varepsilon} \sum_{(h,q)=1} \hat{a}\left(\frac{h}{q}\right) e^{2i\pi(h/q)n},$$

$\hat{a}\left(\frac{h}{q}\right)$ dénotant le (h/q)-ième "coefficient de Fourier de a (voir [4], page 30). On écrit alors que, pour N donné, on a:

$$a(n)f'\left(\frac{n}{N}\right)=(a(n)-P_\varepsilon(n))f'\left(\frac{n}{N}\right)+P_\varepsilon(n)\left(f'\left(\frac{n}{N}\right)-S_\eta\left(\frac{n}{N}\right)\right)+P_\varepsilon(n)S_\eta\left(\frac{n}{N}\right),$$

d'où:

$$\left|a(n)f'\left(\frac{n}{N}\right)-P_\varepsilon(n)S_\eta\left(\frac{n}{N}\right)\right| \leq |a(n)-P_\varepsilon(n)|\times\|f'\|_\infty+\|P_\varepsilon\|_\infty\times\left|f'\left(\frac{n}{N}\right)-S_\eta\left(\frac{n}{N}\right)\right|,$$

et par conséquent,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \left|a(n)f'\left(\frac{n}{N}\right)-P_\varepsilon(n)S_\eta\left(\frac{n}{N}\right)\right|$$
$$\leq \left(\|f'\|_\infty \times \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} |P_\varepsilon(n)-a(n)|\right)+\|P_\varepsilon\|_\infty\times\eta,$$

car

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \left|f'\left(\frac{n}{N}\right)-S_\eta\left(\frac{n}{N}\right)\right|=\int_0^1 |f'-S_\eta| \leq \eta.$$

On fait alors tendre η vers 0, ce qui supprime le deuxième terme du deuxième membre, puis ε vers 0; on calcule donc, pour vérifier le résultat,

$$\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} P_\varepsilon(n) S_\eta\left(\frac{n}{N}\right),$$

que l'on écrit:

$$\frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \left(\sum_{q|N_\varepsilon} \sum_{(h,q)=1} \hat{a}\left(\frac{h}{q}\right) e^{2i\pi(h/q)n}\right) \times \left(\sum_{\nu} \hat{S}_\eta(\nu) e^{2i\pi(\nu/N)n}\right)$$
$$=\sum_{q|N_\varepsilon} \sum_{(h,q)=1} \sum_{\nu} \hat{S}_\eta(\nu)\hat{a}\left(\frac{h}{q}\right) \times \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} e^{2i\pi(h/q+\nu/N)n}.$$

(i) Si $(\nu/N+h/q) \notin \boldsymbol{Z}$, $q>1$, alors, le module de la somme est égal à

$$\frac{1-\exp 2i\pi(h/q)N}{1-\exp 2i\pi(h/q+\nu/N)}=O(q), \qquad N\to+\infty,$$

car $|\nu|$ est borné. Par conséquent, dans ce cas,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} e^{2i\pi(h/q+\nu/N)n}=0,$$

car $q>1$ décrit un ensemble fini, puisque q divise N_ε.

(ii) Si $(\nu/N+h/q)\in \boldsymbol{Z}$, et $q>1$, alors, comme $0<(h/q)<1$ et $|\nu|$ est borné, dès que N est assez grand, on a :

$$(\nu/N+h/q)=0$$

ou

$$(\nu/N+h/q)=1$$

i.e. :

$$|\nu|/N=h/q \quad \text{ou} \quad \nu/N=(q-h)/q.$$

Comme $(h, q)=1$, on voit que l'on a $N=mq$, $\nu\equiv 0 \bmod m$, et par conséquent, comme q est borné tandis que N ne l'est pas, on voit que $m\to+\infty$, donc $\nu\to+\infty$. Mais ν est borné. Par conséquent, dans ce cas, si $q>1$, on a encore

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} e^{2i\pi(h/q+\nu/N)n}=0.$$

Si $q=1$, alors $(\nu/N)\notin \boldsymbol{Z}$ dès que N est assez grand. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi(\nu/N)n}=0.$$

De ceci on déduit que :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_\varepsilon(n)S_\eta\left(\frac{n}{N}\right)=0,$$

ce qui suffit pour conclure.

2ème Problème. Il s'agit d'une question de W. Schwarz. (Voir [3].) On sait que : si $f(n)$ est une fonction multiplicative B^2-presque-périodique, elle a une série de Fourier

(A) $$\sum_{q\in N^*} a_q(f)c_q(n).$$

$a_q(f)$ est appelé "coefficient de Ramanujan" de f, les $c_q(n)$ sont les "sommes de Ramanujan". Voici le problème :

En faisant appel à un théorème de Kronecker de la théorie des fonctions de variable complexe, on peut montrer que :

Si une infinité de coefficients a_q sont non-nuls, alors les déterminants de Hankel

$$H_n=\text{dét}\begin{bmatrix} f(1) & f(2) & \cdots f(n) \\ f(2) & f(3) & \cdots f(n+1) \\ \vdots & & \vdots \\ f(n) & f(n+1) & \cdots f(2n) \end{bmatrix}$$

sont non-nuls pour une infinité de n.

La question posée, c'est de donner une démonstration élémentaire de ce résultat.

On va donc répondre à cette question, dans un cas d'ailleurs plus général.

Soit f une suite limite-périodique au sens de Besicovitch pour un exposant ≥ 1, dont la série de Fourier est de la forme (A). Supposons que $H_n=0$ dès que $n\geq N_0$. Alors, il existe k, un entier positif, tel que les déterminants de Sylvester

$$S_k(n) = \text{Dét}\begin{bmatrix} f(n) & \cdots f(n+k) \\ \vdots & \vdots \\ f(n+k) & \cdots f(n+2k) \end{bmatrix}$$

sont identiquement nuls, pour $n \geq N_0$, k ne dépendant pas de n. (C'est un fait élémentaire et bien connu ; voir, par exemple [5], page 28.) De ceci, on déduit qu'il existe des nombres complexes $t_0, t_1, \cdots, t_k$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=0}^{k} t_j f(n+j) = 0, \qquad \text{pour tout } n \geq N_0.$$

Mais la suite $n \mapsto \sum_{j=0}^{k} t_j f(n+j)$ est B-presque périodique, et sa série de Fourier est donnée par

$$\sum_{q=1}^{+\infty} a_q(f) \times \sum_{(h,q)=1} [(\exp 2i\pi(h/q)n) \times \sum_{j=0}^{k} t_j \exp 2i\pi(h/q)j].$$

On en déduit que pour tout q, on a :

$$a_q(f) \times \sum_{j=0}^{k} t_j \exp 2i\pi(h/q)j = 0, \qquad (h, q) = 1.$$

Si $a_q(f)$ est non-nul pour une infinité de q, alors, l'ensemble des rationnels (h/q), où $(h, q)=1$, $0<h<q$, $a_q(f) \neq 0$, est dense dans [0, 1], et par conséquent, la fonction

$$x \mapsto \sum_{j=0}^{k} t_j \exp 2i\pi jx$$

est identiquement nulle, et donc, tous les t_j sont nuls, ce qui contredit la prémisse.

Références

[1] Hlawka, E.: Über einen Satz von C. Radoux. Zbl. 585–10035 (Novembre 1986).

[2] Radoux, C.: Note sur le comportement asymptotique de l'indicateur d'Euler. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I., **91**, 13–18 (1977, Zbl. 347–41022).

[3] Schwarz, W.: Remarks on the theorem of Elliott and Daboussi, and applications... (extended version of two survey lectures, 1982) (preprint).

[4] Mauclaire, J.-L.: Intégration et théorie des nombres. Collection Travaux en Cours, Hermann, Paris (1986).

[5] Pisot, Ch.: Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. Séminaire de Math. Sup., Presses de l'Université de Montréal.