55. *Sur certaines fonctions définies par les chiffres des entiers*

Par Jean-Loup MAUCLAIRE
The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., June 9, 1987)

1. Introduction. q étant un entier >1, une application $f: N^* \to C$ est dite *q-multiplicative* si quelque soit $r \geq 1$, on a ;

$f(aq^r+b)=f(aq^r)\cdot f(b)$ pour $1 \leq a \leq q-1$ et $0 \leq b < q^r$, et $f(0q^r)=1$.

Cette espèce de fonction a été considérée par A. O. Gelfond ([1]), et dans le cas $|f| \leq 1$, etudiée par H. Delange ([2]). Par la suite, la notion de q-multiplicativité a été étendue (voir, à ce sujet, [3]). Toutes ces études cependant portent essentiellement sur le cas où f est de module au plus égal à 1. En examinant avec attention les problèmes standard qui se posent dans le cas général, on se rend compte très vite qu'il suffit d'avoir un résultat relatif aux fonctions q-multiplicatives positives pour pouvoir en résoudre un certain nombre, par exemple, étudier la presque-périodicité, l'existence d'une moyenne non-nulle sous certaines conditions, etc.

L'objet de cette note est de fournir un tel résultat.

2. Enoncé du résultat. Etant donné un couple (a, q^k) où $0 \leq a < q^k$, $k \geq 1$, on définit I_{a,q^k}: $N \to \{0, 1\}$ par

$$I_{a,q^k}(n)=1 \quad \text{si} \quad n \equiv a \bmod q^k,$$
$$=0 \quad \text{sinon.}$$

On note Γ l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) à coefficients réels d'éléments I_{a,q^k}. Si tous les coefficients peuvent être choisis ≥ 0, on notera Γ^+ l'ensemble ainsi défini.

On remarquera que:

$$\text{Si} \quad \gamma \in \Gamma, \quad \gamma \geq 0 \quad \text{alors,} \quad \gamma \in \Gamma^+.$$

En effet: Si $\gamma \in \Gamma$, γ est défini sur une réunion finie de progressions arithmétiques (a, q^k), et une telle réunion s'écrit de façon unique comme réunion finie disjointe de progressions arithmétique; comme $\gamma \geq 0$, γ est ≥ 0 sur chacune de ces progressions ; donc, γ est dans Γ^+.

De ceci, on peut tirer la conclusion que tout γ de Γ s'écrit de façon unique:

$$\gamma=\gamma^+-\gamma^-, \quad \gamma^+ \in \Gamma^+, \quad \gamma^- \in \Gamma^+,$$

tels que: $|\gamma|=\gamma^+ + \gamma^-$.

Par conséquent, pour définir une forme linéaire positive sur Γ vérifiant une condition de continuité, il suffira de la définir sur Γ^+. Nous pouvons énoncer le résultat:

Théorème 1. *Soit f une fonction q-multiplicative positive. On définit sur Γ^+ une forme linéaire par*

$$\langle f, I_{a,q^r}\rangle = \frac{1}{\prod_{k<r} \sum_{a'=0}^{q-1} f(a'q^k)} \cdot f(a).$$

La condition suivante:

C: *La forme linéaire* $\langle f, \gamma\rangle$ *vérifie*:

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \eta>0$ *tel que pour tout* $\gamma \in \Gamma^+$, $\langle 1, \gamma\rangle \leq \eta$ *entraîne que* $\langle f, \gamma\rangle \leq \varepsilon$ *a pour conséquence*:

C′: *La série*

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{a=0}^{q-1} (1-f(aq))^2$$

est convergente.

Remarques. 1) $\langle f, \gamma\rangle$ est bien définie, quelque soit $f \geq 0$ q-multiplicative, car $f(0q^r)=1$ entraîne que $\sum_{a=0}^{q-1} f(aq^k)>0$.

2) $N^* \to \{1\}$ est q-multiplicative positive, et par conséquent, $\langle 1, \gamma\rangle$ existe bien.

3) On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'une condition comme: "Il existe une suite x_i, $x_i<x_{i+1}<1$, $\lim_{i\to+\infty} x_i=1$ pour laquelle $\lim_{i\to+\infty} (1-x_i)\cdot \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)x_i^n$ existe et est non-nulle", permet de définir $\langle f, \gamma\rangle$ sur Γ^+.

3. Démonstration du résultat. i) L'idée de départ est de remarquer que la famille $\{q^k N\}_{k\geq 0}$, définit une topologie sur $\boldsymbol{Z}$ au voisinage de 0 et par conséquent, on écrit que

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{proj} \boldsymbol{Z}/q^k\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_q,$$

anneau des entiers q-adiques, et de voir qu'en tant qu'espace compact, $\boldsymbol{Z}_q$ s' identifie à

$$E=\{0, 1, \cdots, q-1\}^N = \prod_{i=0}^{+\infty} E_i.$$

On remarque que I_{a,q^r} induit naturellement une fonction continue sur E, que Γ s' identifie à une algèbre réelle dense dans $\mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$ pour la topologie uniforme, $\mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$ étant l'espace des fonctions continues sur E à valeurs réelles. Comme $\langle 1, I_{a,q^r}\rangle = 1/q^r$, on munit E de la measure naturelle $d\mu = \otimes_{i\in N} d\mu_i$, où $d\mu_i$ est la fonction de dénombrement normalisée, i.e. $\int_{E_i} d\mu_i = 1$, $d\mu_i(a_i) = 1/q$. On voit que $\gamma \mapsto \langle f, \gamma\rangle$ définit sur $\mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$ une forme linéaire continue, et que la mesure borélienne positive qui lui est associée est absolument continue par rapport à $d\mu$. Le théorème de Radon Nikodym donne que l'on a $\langle f, \gamma\rangle = \int_E F\gamma d\mu$, $F \in \mathcal{L}^1(E, d\mu)$, $F \geq 0$; de plus, $\int_E F=1$ par construction. Si $t \in E$, on écrit $t=(a_r q^r)_{r\in N}$, $t_{y-}=(a_r q^r)_{r<y}$, $(y \in N)$, $t_{y+}=(a_r q^r)_{r\geq y}$, et l'on définit $f_{y-}(t)$ par $f_{y-}(t)=f(t_{y-})$. On remarque alors que:

$$\begin{aligned}\langle f, I_{t_{y-},q^y}\rangle &= \int_{t_{y-} \prod_{r\geq y} E_r} F(t_{y-}, t_{y+}) d\mu(t)\\ &= \frac{1}{q^y} \int F(t_{y-}, t_{y+}) \bigotimes_{i\geq y} d\mu_i(t_{y+}),\end{aligned}$$

et un théorème classique de Jessen nous donne que $q^y \cdot \langle f, I_{t_{y-},q^y}\rangle$ converge

$d\mu$-presque-partout et dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$ vers $F(t)$. Comme

$$\langle f, I_{t_{y-}, q^y}\rangle = \int \frac{1}{q^y \prod_{r<y}((1/q)\sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r))} \cdot f(t_{y-}),$$

on en déduit que :

$\dfrac{1}{\prod_{r<y}(1/q)\sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r)} \cdot f(t_{y-}) = F_{y-}(t)$ converge $d\mu$-presque-partout et dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$ vers $F(t)$, où $\int_E f d\mu = 1$.

ii) On remarque alors que, pour presque tout $t=(a_r q^r)_{r\in N}$,

$$\lim_{y\to+\infty} \prod_{r\geq y} \frac{f(aq^r)}{(1/q)\sum_{b=0}^{q-1} f(bq^r)} = 1.$$

De ce fait, il résulte que l'intégrale de la fonction caractéristique de l'ensemble des t pour lesquels $F(t)\neq 0$ est égale à

$$\lim_{y\leftarrow+\infty} \prod_{r<y} \frac{1}{q} \sum_{\substack{a \\ f(aq^r)\neq 0}} 1 = \lim_{y\to+\infty} \prod_{r<y} \left(1-\frac{1}{q} \sum_{\substack{a \\ f(aq^r)=0}} 1\right).$$

Par conséquent, l'ensemble étant de mesure >0, on en déduit que $f(aq^r) \neq 0$, sauf pour un nombre fini de termes. On peut éliminer ces termes en se restreignant à $q^k N$. On va donc désormais supposer que $f\neq 0$.

iii) Comme $\dfrac{f_{y-}(t)}{\prod_{r<y}(1/q)\sum_{q=0}^{q-1} f(aq^r)}$ converge $d\mu$-p-p et n'est pas nul (par ii), on passe au logarithme, auquel on applique le "théorème des trois séries". On voit que pour tout $c>0$, on a, en posant $\pi_r = (1/q)\sum_{a=1}^{q-1} f(aq^r)$,

$$\sum_{\substack{a,r \\ |\log(f(aq^r)/\pi_r)|>c}} \frac{1}{q} < +\infty.$$

Comme $f(0q^r)=1$, on voit que $|\log \pi_r|<c$ sauf pour un nombre fini de termes ; puis, en jouant sur la valeur de c, que $|\log f(aq^r)|<c$ sauf pour un nombre fini de termes. Par conséquent, quitte à se restreindre à $q^k N$, on peut supposer que :

Pour tout r et tout a, on a :

$$1/2 \leq f(aq^r) \leq 3/2,$$

(et π_r vérifie la même condition).

iv) On applique alors le "théorème de Kakutani" à $F_{y-}(t)$ et par conséquent :

$$\prod_{r<y} \frac{((1/q)\sum_{a=0}^{q=1} \sqrt{f(aq^r)})^2}{(1/q)\sum_{a=0}^{q=1} f(aq^r)} \quad \text{converge} \quad (y\to+\infty), \text{ i.e. :}$$

$$\sum_{r\geq 0} \frac{1}{(1/q)\sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r)} \left(\left(\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r)\right) - \left(\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} \sqrt{f(aq^r)}\right)^2\right)$$

converge, puisque chaque terme du produit est inférieur à 1. Mais le dénominateur est compris entre 1/2 et 3/2. Par conséquent, comme chaque terme est ≥ 0, on doit avoir :

$$\sum_{r\geq 0} \left(\left(q\sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r)\right) - \left(\sum_{a=0}^{q-1} \sqrt{f(aq^r)}\right)^2\right) < +\infty,$$

ce qui s'écrit aussi, d'après une formule classique de Lagrange,

$$\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{\substack{0\le a\le q-1\\0\le b\le q-1}}(\sqrt{f(aq^r)}-\sqrt{f(bq^r)})^2<+\infty.$$

Comme $f(0q^r)=1$, on a :

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{a=0}^{q-1}(1-\sqrt{f(aq^r)})^2<+\infty,$$

et comme $1<1+\sqrt{f(aq^r)}<1+\sqrt{3/2}$, on en déduit :

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{a=1}^{q-1}(1-f(aq^r))^2<+\infty.$$

4. Applications. On va en donner deux, particulièrement simples, en restant dans les limites du sujet.

La première est la suivante :

Théorème 2. *Si f vérifie les hypothèses du Théorème 1, alors :*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\sum_{n\le x}f(n)\right)\cdot\left(\prod_{r\le\log x/\log q}\left(\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1}f(aq^r)\right)^{-1}\right)=1.$$

La seconde :

Théorème 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction q-multiplicative vérifiant les hypothèses du Théorème 1 ait une moyenne non-nulle est que les deux séries*

$$\sum_{r\ge0}\sum_{a=0}^{q-1}(f(aq^r)-1),$$

$$\sum_{r\ge0}\sum_{a=0}^{q-1}(f(aq^r)-1)^2$$

soient convergentes.

Commentaire. 1) Le Théorème 3 montre que si f vérifie les hypothèses de ce théorème, alors, pour tout $a\ge0$, f^a les vérifie aussi.

2) Les démonstrations de ces deux résultats seront données ultérieurement.

Références

[1] A. O. Gelfond: Sur les nombres qui ont des propriétés multiplicatives et additives données. Acta Arithmetica, **13**, 259–265 (1968).

[2] H. Delange: Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives. ibid., **21**, 285–298 (1972).

[3] M. Queffelec: Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques. Bull. Soc. Math. France, **107**, 385–421 (1979) (voir aussi, dans la bibliographie de cet article: [6], [10]).