64. *Sur la notion de fonction multiplicative et quelques problèmes qui lui sont associés*

By Jean-Loup MAUCLAIRE
Centre National de la Recherche Scientifique, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1985)

1. En théorie probabiliste des nombres, une fonction multiplicative est une application $f: \boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{C}$ vérifiant $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$ quand $(m, n)=1$. On a énoncé dans [5] des résultats relatifs à des fonctions de ce type, déduits du comportement de certaines séries de Dirichlet qui leur sont naturellement associées, soulignant que ce genre de question ne relève que de méthodes de théorie de la mesure appliquée congrûment sur les espaces idoines. On élargit ici le sujet.

2. Généralisation de quelques concepts classiques. Soit T_u, $u \in \boldsymbol{N}^*$, une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. Pour un u fixé, on considère une application $N: T_u \to [1, +\infty[$, définie par $t_u^{(n)} \to N(t_u^{(n)})$ et *l'on supposera pour simplifier l'exposé*, que l'on a $N(t_u^{(n)})=N(t_u^{(1)})^n$, $N(t_u^{(0)})=1$, $N(t_u^{(1)})>1$. Si t_u est un élément générique de T_u, il s'écrit $t_u^{(n)}$ et l'on définit la valuation v_u de t_u par $v_u(t_u)=n$ si $t_u=t_u^{(n)}$; ce qui nous permet d'écrire $t_u=t_u^{v_u(t_u)}$; on a $v_u(t_u^{(0)})=0$.

Soit Λ l'ensemble défini par $\Lambda=\{\lambda=(t_u)_{u\in \boldsymbol{N}^*} \mid \sum_u v_u(t_u)<+\infty\}$. Λ est l'ensemble des éléments de $T=\prod_u T_u$ dont les composantes t_u sont égales à $t_u^{(0)}$, sauf pour un nombre fini de u. On notera par $v_u(\lambda)$, la valuation sur u de λ où λ est un élément de Λ, l'entier défini par $v_u(\lambda)=v_u$ (projection de λ sur T_u).

Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors, l'expression $N(\lambda)=\prod_u N(t_u^{(1)})^{v_u(\lambda)}$ a un sens, et l'on considère l'expression formelle

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{N(\lambda)^s}, \qquad s \in \boldsymbol{C}.$$

On va supposer que pour $\operatorname{Re} s>s_0>0$, cette série converge; on notera $\zeta_T(s)$ sa somme, et on supposera aussi que son abscisse de convergence ρ est strictement positive; quitte à effectuer l'homothétie $s\to\rho s$, on peut supposer que ρ est égale à 1, ce que l'on fera donc. On a donc défini ainsi une fonction ζ_T, la fonction Zêta de Λ, d'abscisse de convergence 1. De même que dans le cas de la fonction ζ de Riemann, on peut écrire que, pour $\operatorname{Re} s>1$,

$$\zeta_T(s)=\prod_u \frac{1}{1-\dfrac{1}{N(t_u^{(1)})^s}}.$$

On remarque maintenant que, quitte à réordonner la suite $u\to N(t_u^{(1)})$, indexée par u, on peut supposer que $N(t_u^{(1)})$, $u \in \boldsymbol{N}^*$, est croissante au sens large. En effet, comme ζ_T a une abscisse de convergence égale à 1, pour tout λ_0 de Λ, l'égalité $N(\lambda)=N(\lambda_0)$ n'a qu'un nombre fini de solutions λ sur Λ. On considère donc le produit (ordonné) $T=\prod_u T_u$, où les u sont ordonnés de façon à ce que $N(t_u^{(1)})$ soit croissante au sens large, l'ordre pour les indices tels que $N(t_u^{(1)})=N(t_{u+1}^{(1)})=\cdots$ étant choisi une fois pour toute. T est donc défini sans ambiguité comme un produit ordonné, et on va maintenant le "probabiliser" de la façon suivante.

On affirme d'abord que T_u est discret et

$$\mu_u(t_u^{(n)})=\frac{1}{N(t_u^{(1)})^n}\times\left(1-\frac{1}{N(t_u^{(1)})}\right).$$

On compactifie alors T_u, et le compactifié sera noté $\bar{T}_u$, en ajoutant le "point à l'infini" noté (t_u^{∞}). $\bar{T}=\prod_u \bar{T}_u$ est compact, et comme $\mu_u(T_u)=1$, il est immédiat que μ_u s'étend à $\bar{T}_u$ et que $\mu_u(\bar{T}_u)=1$. La mesure $d\mu=\otimes_u d\mu_u$ définie sur $\bar{T}$ existe (par un théorème classique de Kolmogorov,) et l'on note $\mathcal{L}^\alpha(\bar{T}, d\mu)$ l'espace des fonctions sur $\bar{T}$ de puissance α-ieme $d\mu$-intégrable.

Remarque. Il s'agit ici d'une construction déjà utilisée sur les entiers strictement positifs par un certain nombre d'auteurs pour étudier certaines fonctions arithmétiques ([1]). L'intérêt de "compactifier" est que l'on demeure dans des structures sans surprises depuis les travaux de Kolmogorov et, surtout, de Jessen (1933). On peut aussi "ne pas compactifier", utiliser le fait que T est polonais, etc. ([2]). *De toute façon, en ce qui concerne le problème présent, les deux formulations mènent identiquement à utiliser la théorie de la dérivation sur* $\mathcal{L}^\alpha(\bar{T}, d\mu)$.

3. Position du problème et énoncé des résultats.

Définition. On appelle *fonction multiplicative sur* Λ une application $f\colon \Lambda\to \boldsymbol{C}$ définie par $f(\lambda)=\prod_u f(t_u^{v_u(\lambda)})$ et $f(t_u^{(0)})=1$ pour tout u. A tout élément δ de Λ on associe une fonction $I_\delta\colon \Lambda\to\{0, 1\}$ définie par: $I_\delta(\lambda)=1$ si pour tout u, $v_u(\delta)\le v_u(\lambda)$, et $=0$ sinon. On désignera par Γ l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions I_δ à coefficients réels.

Soit f une fonction multiplicative sur Λ. On suppose que $G(s)=\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|/N(\lambda)^s$ converge pour $\mathrm{Re}\, s>1$; on notera alors par $F(s)$ l'expression $\sum_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)/N(\lambda)^s$. On considère les conditions

($\mathcal{T}_0$): $\limsup_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathcal{S}_0}}|\zeta_T(s)^{-1}\tilde{F}(s)|=A_0$ existe et est non-nulle, où $\mathcal{S}_0$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{C}$ tel que:

Si $z\in\mathcal{S}_0$, alors $\mathrm{Re}\, z>1$, 1 est adhérent à $\mathcal{S}_0$ et

$$\limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\mathcal{S}_0}}\left|\frac{\zeta_T(\mathrm{Re}\, z)}{\zeta_T(z)}\right|\le k<+\infty.$$

($\mathcal{T}_2$): $\limsup_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}}\zeta_T(\sigma)^{-1}G(\sigma)=B$ est finie.

($\mathcal{T}_3$): Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que, si $\gamma\in\Gamma$ et vérifie

$$\lim_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}}\zeta_T(\sigma)^{-1}\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{|\gamma(\lambda)|}{N(\lambda)^\sigma}<\eta,$$

on a:

$$\limsup_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}} \zeta_T(\sigma)^{-1} \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{|\gamma(\lambda)f(\lambda)|}{N(\lambda)^\sigma} < \varepsilon.$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème 1. *Les conditions $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ ont pour conséquence: Pour tout $c>1$, les trois séries*

$$\sum_{|f(t_u^{(1)})|<c} \frac{|1-f(t_u^{(1)})|^2}{N(t_u^{(1)})}, \qquad \sum_{|f(t_u^{(1)})|>c} \frac{|f(t_u^{(1)})|}{N(t_u^{(1)})}, \qquad \sum_u \sum_{k\geq 2} \frac{|f(t_u^{(k)})|}{N(t_u^{(k)})},$$

sont convergentes.

On va maintenant introduire une condition $H(\Lambda)$ portant sur Λ qui se révèle, en fait, vérifiée fréquemment en théorie des nombres.

Soit $S(x)$ la fonction réelle définie par

$$S(x) = \sum_{N(t_u^{(1)})<e^x} \frac{1}{N(t_u^{(1)})}.$$

La condition $H(\Lambda)$ est la suivante:

$(H(\Lambda))$: Pour tout $t>0$, fixe, $\sup_{x\geq 0}|S(tx)-S(x)|$ est fini.

On supposera désormais que Λ vérifie l'hypothèse $H(\Lambda)$ ci-dessus.

f étant une fonction multiplicative sur Λ, pour un α réel positif, on définit un ensemble $A(\alpha)$ de conditions, de la façon suivante.

$A(\alpha)$: Pour tout $c>1$, les quatre séries

$$\sum_u \frac{f(t_u^{(1)})-1}{N(t_u^{(1)})}, \qquad \sum_{|f(t_u^{(1)})|\leq c} \frac{|f(t_u^{(1)})-1|^2}{N(t_u^{(1)})},$$

$$\sum_{f(t_u^{(1)})>c} \frac{|f(t_u^{(1)})|^\alpha}{N(t_u^{(1)})}, \qquad \sum_u \sum_{k\geq 2} \frac{|f(t_u^{(k)})|^\alpha}{N(t_u^{(k)})}$$

sont convergentes, et pour tout u l'expression $\prod_u = \sum_{k\geq 0} f(t_u^{(k)})/N(t_u^{(k)})$ est non-nulle. On considère alors un ensemble de conditions:

$(\mathcal{T}_0^{(\alpha)})$: la série $G_\alpha(s)=\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^\alpha/N(\lambda)^s$ converge pour $\operatorname{Re} s>1$.

$(\mathcal{T}_1)$: $\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathcal{S}}} \zeta_T(s)^{-1}F(s)=A$ existe et est non-nulle, où $F(s)=\sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)/N(\lambda)^s$ est définie pour $\operatorname{Re} s>1$, et où $\mathcal{S}$ est un chemin de $\boldsymbol{C}$ tel que:

Si $z\in\mathcal{S}$, alors $\operatorname{Re} z>1$, 1 est adhérent à $\mathcal{S}$, et

$$\limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\mathcal{S}}} \left|\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z-1}\right| \leq C < +\infty.$$

$(\mathcal{T}_2)$: $\limsup_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}} \zeta_T(\sigma)^{-1}G(\sigma)=B$ est finie, où

$$G(\sigma) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{|f(\lambda)|}{N(\lambda)^\sigma} \quad \text{existe pour } \sigma>1.$$

$(\mathcal{T}_3^{(1)})$: Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que si $\gamma\in\Gamma$ et vérifie

$$\lim_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}} \zeta_T(\sigma)^{-1} \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{|\gamma(\lambda)|}{N(\lambda)^\sigma} < \eta,$$

on a:

$$\limsup_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}} \zeta_T(\sigma)^{-1} \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{|\gamma(\lambda)f(\lambda)|}{N(\lambda)^\sigma} < \varepsilon.$$

Les résultats sont les suivants:

Théorème 2. *L'ensemble de conditions* $(\mathcal{T}_0^{(1)}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3^{(1)})$ *équivaut à* $A(1)$.

Théorème 3. *Pour tout* $\alpha>1$, *l'ensemble de conditions* $(\mathcal{T}_0^{(\alpha)}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ *équivaut à* $A(\alpha)$.

4. Application. On se contentera d'en donner une, en citant un résultat que ni la méthode de [4] ni celle de [3] ne paraît pouvoir fournir facilement.

Théorème 4. *Soit* f *une fonction multiplicative sur* N^*. *On considère l'ensemble de conditions* A :

(A_1) :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} < +\infty \qquad \text{si } \sigma>1.$$

(A_2) : *Il existe deux entiers* k *et* l *tels que*
$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathcal{S}}} \zeta(s)^{-1} \sum_{n\equiv l \bmod k} \frac{f(n)}{n^s}$$
existe et est non-nulle où le chemin $\mathcal{S}$ *vérifie*:
$$\mathcal{S}\subset\{z \mid \operatorname{Re} z>1\},$$
1 *est adhérent à* $\mathcal{S}$ *et*
$$\sup_{\substack{z\in\mathcal{S}\\ z\to 1}} \left|\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z-1}\right| < +\infty.$$

(A_3) ; *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\eta>0$ *tel que*: *si* γ *est périodique et*
$$\lim_{\sigma\to 1+} \zeta(\sigma)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\gamma(n)|}{n^\sigma} < \eta,$$
alors:
$$\limsup_{\sigma\to 1+} \zeta(\sigma)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|\cdot|\gamma(n)|}{n^\sigma} < \varepsilon.$$

Ces conditions $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ *impliquent*: *il existe un caractère de Dirichlet* $\chi(n)$ *tel que* $f(n)\chi(n)$ *est presque-périodique au sens de Besicovitch par l'exposant* 1, *et à moyenne non-nulle.*

N.B.: La réciproque peut aussi s'étudier dans le contexte précédent. Les méthodes de démonstration utilisées sont essentiellement une forme plus élaborée de celle présentée dans [5], et l'ensemble paraîtra prochainement.

Références

[1] Schwartz, W. and J. Spilker: Eine Anwendung des Approximationssatzes von Weierstrass-Stone auf Ramanujan-Summen. Nieuw Archiev voor Wiskunde (3) 19 (1971).

[2] Bourbaki, N.: Intégration, chapitre IX. Hermann (1969).

[3] Daboussi, H.: Sur les fonctions multiplicatives ayant une valeur moyenne non-nulle. Bull. Soc. Math. France, **109**, 183–206 (1981).

[4] Indlekofer, K. H.: A mean value theorem for multiplicative functions. Math. Z., **172**, 255–271 (1980).

[5] Mauclaire, J.-L.: Suites limite-périodiques et théorie des nombres IX. Proc. Japan Acad., **60A**, 130–133 (1984).