# 52. Sur la théorie des suites presque-périodiques. II

Par Jean-Loup MAUCLAIRE
Centre National de la Recherche Scientifique, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., June 11, 1985)

On poursuit ici l'exposé de résultats commencé dans la note I de même titre.

8. Soit $f$ un élément de $B.p.p.$ et $F$ un élément de $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$ qui lui est associé (par l'isométrie décrite dans le théorème 2 de (I)). Il est connu que l'on peut construire une suite de polynômes de Bochner-Fejer $\mathcal{K}_\nu$ telle que: $F*\mathcal{K}_\nu$ tend vers $F$ dans $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$, ([1]), $*$ représentant l'opérateur de convolution. En terme de $B.p.p.$, ceci s'énonce: il existe une suite de polynômes trigonométriques à fréquences appartenant à l'ensemble des fréquences de $f$, qui tend vers $f$ dans $B.p.p.$

Un examen de la méthode pour établir ce résultat montre qu'elle se ramène en fait à considérer $G_f$, le groupe associé à $f$ (voir (I)-3), et le dual de $G_f$, $\hat{G}_f$, qui s'identifie à $\oplus_{\lambda\in\Lambda(f)} \boldsymbol{Z}\lambda$, de plonger $\hat{G}_f$ dans $\oplus_{\lambda\in\Lambda(f)} \boldsymbol{Q}\lambda$ dont on extrait une base dénombrable $C$. A $C$, on associe $K_C=\prod_{\gamma\in C} P_\gamma$, où $P_\gamma$ est le dual de $\boldsymbol{Q}_\gamma$, compact, et $K_C$ est aussi compact. Dans $K_C$, on approche la fonction caractéristique d'une suite de voisinages de l'élément neutre, décroissante, par des polynômes de Bochner-Fejer; on régularise $F$ par le moyen de cette suite d'approximations, et il est connu que la suite des régularisées converge vers $F$ dans $\mathcal{L}(K_C, dm_{K_C})$ ([2]), ($dm_{K_C}$ étant la mesure de Haar induite sur $K_C$ par $dm$), ce qui en fait revient à une convergence dans $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$.

Le fait que $G=\prod_p \boldsymbol{Z}_p$ soit profini permet d'améliorer nettement la procédure; en effet, à toute suite de voisinages ouverts et fermés de l'élément neutre correspond une suite de polynômes trigonométriques, qui sont les fonctions caractéristiques de ces voisinages, et le fait de régulariser par les fonctions caractéristiques d'une suite décroissante de tels voisinages va définir une martingale sur $\mathcal{L}(G, dm_G)$. Comme on l'a déjà vu, ([3], par exemple), les suites de $B.p.p.$ associées à $\mathcal{L}(G, dm_G)$ sont les suites limite-périodiques. D'où, par exemple:

Théorème 8. *Soit $f$ une suite limite-périodique, et $N_k$ une suite d'entiers vérifiant:*

(a) *$N_k$ divise $N_{k+1}$, ($k\in \boldsymbol{N}^*$),*

(b) *Pour tout $p$ premier, $\lim_{k\to+\infty} v_p(N_k)=+\infty$, où $v_p$ est la $p$-valuation.*

*Soit alors $t$ un élément de $G$; on définit $t_k$ par: $t_k$ est le seul entier vérifiant*

$$0\le t_k<N_{k+1},$$

$$t-t_k \in N_{k+1}G.$$

*Alors, la suite de fonctions continues définie sur G par:*

$$f_k(t)=f_k(t_k)=M_{(m)}f(t_k+N_{k+1}m)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{m\leq x}f(t_k+N_{k+1}m)$$

*converge $dm_G$-presque-partout et dans $\mathcal{L}(G, dm_G)$ vers une fonction F de $\mathcal{L}(G, dm_G)$ associée à f.*

9. On appelle, de façon habituelle, "somme de Ramanujan d'ordre $q$", notée $C_q$, la fonction $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}$ définie par

$$C_q(n)=\sum_{(h,q)=1}e^{2i\pi(h/q)n}.$$

On sait que les suites limite-périodiques dont la série de Fourier ne comporte que des sommes de Ramanujan, sont associées à des fonctions de $\mathcal{L}(G, dm_G)$ invariantes par $G^*=\prod_p \boldsymbol{Z}_p^*$, où $\boldsymbol{Z}_p^*$ est l'ensemble des unités de $\boldsymbol{Z}_p$, et ce sous-espace de $\mathcal{L}(G, dm_G)$ s'identifie à un espace $\mathcal{L}(E, d\mu)$ (voir [3], [4]), cadre naturel pour l'étude de certains problèmes de théorie des nombre ([5]). Ces remarques nous mènent à:

**Théorème 9.** *Les hypothèses étant celles du théorème* 8, *on suppose en outre que la série de Fourier de f ne comporte que des sommes de Ramanujan. Alors, si (u, v) dénote le plus grand diviseur des entiers u et v, on a:*

$$f_k(t)=f_k(t'_k)=f_k((t_k, N_k)),\quad \text{où } t'_k \text{ est l'image de } (t_k, N_k) \text{ dans } E,$$

*converge $d\mu$-presque-partout dans E et dans $\mathcal{L}(E, d\mu)$ vers une fonction de $\mathcal{L}(E, d\mu)$ associée* à *f.*

**Remarque.** Les propriétés de limite-périodicité, qui apparaissent dans l'étude de certains problèmes relatifs aux fonctions multiplicatives et additives en théorie probabiliste des nombres, proviennent essentiellement des phénomènes de structure ci-dessus expliqués. Ce merveilleux hasard disparaît dès que l'on remplace $N^*$ par le semi-groupe des idéaux entiers d'un corps de nombres.

10. Le théorème 8 est intéressant pour résoudre le problème de la synthèse harmonique dans $G$. En effet:

**Théorème 10.** *Soit f une suite limite-périodique, et $\hat{f}(h/q)$, $(h, q)=1$, $0\leq h\leq q$, $q\in N^*$, la suite de ses coefficients de Fourier. Alors, la fonction $F(t)$ qui lui est associée dans $\mathcal{L}(G, dm_G)$ est définie $dm_G$-presque partout par:*

$$F(t)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{q\mid N_k}\sum_{(h,q)=1}\hat{f}\left(\frac{h}{q}\right)e^{2i\pi(h/q)t_k},$$

*($N_k$, $t_k$ étant ici définis comme précédemment dans le théorème* 8.)

Comme $\hat{F}=\hat{f}$, le problème de la synthèse est ainsi résolu.

11. On revient ici au problème de la complétion des suites limite-périodiques. On sait depuis longtemps que l'espace des suites limite-périodiques au sens de Besicovitch pour un exposant $\alpha\geq 1$, est complet (Marcinkievicz). En théorie des nombres, deux types de moyenne se pré-

sentent: la moyenne arithmétique $M$, et la moyenne analytique définie par

$$M'(f)=\lim_{\sigma\to 1}\left(\zeta(\sigma)^{-1}\cdot\sum_{n\in N^*}\frac{f(n)}{n^\sigma}\right).$$

Il est facile de voir que, si $f$ est uniformément limite-périodique, alors $M'(f)$ existe et $M'(f)=M(f)$.

Par conséquent, si $f_r, r\in N$, est une suite de Cauchy dans $B.p.p.$ de fonctions uniformément limite-périodiques, c'est aussi une suite de Cauchy pour la "métrique analytique" définie par $(f_r, f_s)\mapsto M'(|f_r-f_s|)$.

La complétion pour la moyenne arithmétique implique, via la sommation par le lemme d'Abel, la complétion pour la moyenne analytique. On tient à signaler que les deux espaces complétés ne sont pas identiques. En effet:

Théorème 11. *Il existe une suite à valeurs* 0 *ou* 1 *approchée en moyenne par des suites périodiques pour la distance définie par la moyenne analytique, qui n'a pas de moyenne arithmétique.*

Les démonstrations des résultats énoncés précédemment dans la note (I) et ci-dessus dans cette note (II) paraîtront prochainement.

## Références

[1] Følner, E.: On the dual spaces of the Besicovitch almost periodic spaces. Mat. fysiske Medd., **29**, 1, 1–27 (1954).

[2] Dieudonné, J.: Eléments d'analyse, vol. 2 (ch. XIV, § 11). Cahiers scientifiques, Fasc. XXXI, Paris, Gauthier-Villars (1974).

[3] Novoselov, V.: A new method in probabilistic number theory. Izv. Akad. Nauk SSSR., ser. Mat., **28**, 307–364 (1964).

[4] Mauclaire, J.-L.: Suites limite-périodiques et théorie des nombres. I. Proc. Japan Acad., **56**A, 180–182 (1980).*)

[5] ——: Suites limite-périodiques et théorie des nombres. IX. ibid., **60**A, 130–133 (1984).

*) Voir aussi Schwarz, W.: Remarks on the theorem of Elliott and Daboussi, and applications (extended version of two survey lectures given at the Warszawa International Banach Center, on September 6, 1982 and September 8, 1982) preprint. On trouve à la fin du texte une bibliographie d'une centaine de titres, où ne figurent pas les références [1], [3], [4].