41. *Représentations l-adiques associées aux invariants cyclotomiques*

Par Jean-François JAULENT
Université de Franche-Comté, Faculté des Sciences

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 13, 1985)

1. Introduction. On sait qu'il existe des relations précises entre certaines représentations galoisiennes données par la théorie du corps de classes, la théorie de Kummer, ou la K-théorie des corps de nombres. Le but de cette note est de comparer les caractères des représentations l-adiques attachées aux invariants cyclotomiques de divers modules classiques intervenant dans ces théories: groupes de classes, de radicaux, ou de symboles. Les identités obtenues reposent sur la notion de suite paramétrée, qui permet d'en ramener la démonstration à l'étude de modules finis, définis à chaque étage fini de la tour cyclotomique. Les détails paraîtront dans [2].

2. Notations. Nous notons l un nombre premier impair, K un corps de nombres algébriques contenant les racines l-ièmes de l'unité, $K_\infty = \bigcup_{n\in N} K_n$ la tour cyclotomique sur K (avec la convention $[K_n : K] = l^n$), $\Gamma = \gamma^{Z_l}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, et $\Lambda = Z_l[[\gamma-1]]$ l'algèbre d'Iwasawa associée. Nous supposons que K est abélien sur un sous-corps F, de degré $d=[K:F]$ étranger à l, et nous notons Δ le groupe abélien $\mathrm{Gal}(K/F)$ ou plutôt son relèvement canonique $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/F)$. Tous les caractères considérés ici sont des caractères de Δ à valeurs dans Z_l, i.e. des éléments de l'anneau $R_{Z_l}(\Delta)$ des caractères l-adiques virtuels du groupe Δ.

L'ordre d de Δ étant pris inversible dans Z_l, l'anneau $R_{Z_l}(\Delta)$ est muni d'un produit scalaire

$$\langle\varphi, \psi\rangle = (1/d) \sum_{\tau\in\Delta} \varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})$$

(pour lequel les caractères irréductibles sont deux à deux orthogonaux, de carré scalaire $d_\varphi = \langle\varphi, \varphi\rangle = \deg\varphi$), et l'algèbre $Z_l[\Delta]$ est un produit direct d'anneaux locaux complets de valuation discrète $Z_l[\Delta]e_\varphi = Z_\varphi$: les idempotents primitifs $e_\varphi = (1/d)\sum_{\tau\in\Delta}\varphi(\tau)\tau^{-1}$ sont associés aux caractères l-adiques irréductibles de Δ, et chaque facteur isotypique Z_φ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension abélienne non ramifiée de Q_l, de degré $[Z_\varphi : Z_l] = \deg\varphi$.

3. Structure des $\Lambda[\Delta]$-modules. La décomposition semi-locale de l'algèbre de groupe $Z_l[\Delta]$ se propage à l'algèbre d'Iwasawa généralisée $\Lambda[\Delta]$, chaque facteur isotypique $\Lambda_\varphi = Z_\varphi[[\gamma-1]]$ étant un anneau local régulier de dimension 2, et un Λ-module libre de dimension d_φ. Si donc X est un

$\Lambda[\Delta]$-module noethérien (noté multiplicativement), les résultats de Serre [5] permettent d'affirmer que chaque composante isotypique $X_\varphi = X^{e_\varphi}$ est pseudo-isomorphe, en tant que Λ_φ-module noethérien, à une somme directe finie de Λ_φ-modules élémentaires

$$X_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus (\oplus_{i\in I_\varphi} \Lambda_\varphi / f_{\varphi,i}\Lambda_\varphi) \oplus (\oplus_{j\in J_\varphi} \Lambda_\varphi / l^{m_{\varphi,j}}\Lambda_\varphi),$$

où les $f_{\varphi,i}$ sont des polynômes distingués de l'anneau $\boldsymbol{Z}_l[\gamma-1]$, et les $m_{\varphi,j}$ des entiers naturels non nuls.

Les entiers $\rho_\varphi = \dim_{\Lambda_\varphi} X_\varphi$, $\lambda_\varphi = \sum_{i\in I_\varphi} \deg f_{\varphi,i}$, et $\mu_\varphi = \sum_{j\in J_\varphi} m_{\varphi,j}$ sont des invariants du Λ_φ-module X_φ, et nous disons que les caractères

$$\rho = \textstyle\sum_\varphi \rho_\varphi \varphi, \quad \lambda = \sum_\varphi \lambda_\varphi \varphi, \quad \text{et } \mu = \sum_\varphi \mu_\varphi \varphi$$

sont les *paramètres* du $\Lambda[\Delta]$-module X. Les invariants d'Iwasawa classiques sont les degrés de ces caractères.

4. Suites paramétrées de $\boldsymbol{Z}_p[\Delta]$-modules. Si $(u_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ et $(v_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ sont deux suites d'entiers, écrivons $u_n \sim v_n$ lorsque $(u_n - v_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est bornée.

Définition. Nous disons qu'une suite $(X_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de $\boldsymbol{Z}_l[\Delta]$-modules finis est paramétrée par les caractères l-adiques virtuels ρ, λ, et μ, lorsque les ordres respectifs $l^{x_n^\varphi}$ des composantes isotypique $X_n^{e_\varphi}$ sont donnés asymptotiquement par la formule:

$$X_n^\varphi \sim \langle \rho, \varphi\rangle n l^n + \langle \lambda, \varphi\rangle n + \langle \mu, \varphi\rangle l^n.$$

Donnons quelques exemples:

(i) Soit ω le *caractère cyclotomique* (i.e. le caractère du module de Tate $\boldsymbol{T}_l = \varprojlim \mu_n$). La suite $(\mu_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ des l-groupes des racines de l'unité des corps K_n est paramétrée par les caractères $\rho=0$, $\lambda=\omega$, $\mu=0$.

(ii) Soit χ_∞ *le caractère à l'infini* (i.e. la somme $\sum_{\mathfrak{p}|\infty} \chi_{\mathfrak{p}}$ des induits à Δ des caractères unité des sous-groupes de décomposition des places à l'infini de F). La suite $(E_n/E_n^{l^n})_{n\in\boldsymbol{N}}$, où E_n est le groupe des unités du corps K_n, est paramétrée par les caractères $\rho=\chi_\infty$, $\lambda=\omega-1$, $\mu=0$.

(iii) Soit χ_l le *caractère de la l-décomposition* (i.e. la somme $\sum_{\mathfrak{l}|l} g_{\mathfrak{l}}\chi_{\mathfrak{l}}$, sur les places de F au-dessus de l, où $g_{\mathfrak{l}}$ est l'indice de décomposition de la place $\mathfrak{l}$ dans la tour cyclotomique F_∞/F, et $\chi_{\mathfrak{l}}$ l'induit à Δ du caractère unité du sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{l}$ dans l'extension K/F). La suite $(E'_n/E'^{l^n}_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, où E'_n est le groupe des l-unités de K_n, est paramétrée par $\rho=0$, $\lambda=\chi_\infty+\omega+(\chi_l-1)$, $\mu=0$.

5. Théorème des paramètres. Pour chaque naturel n, notons ω_n le polynôme $(\gamma^{l^n}-1)$, et désignons par ∇_n l'idéal de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda=\boldsymbol{Z}_l[[\gamma-1]]$ engendré par l^n et ω_n (i.e. $\nabla_n = l^n\Lambda + \omega_n\Lambda$). Le résultat suivant ramène l'étude d'un $\Lambda[\Delta]$-module à celle de certains de ses quotients finis:

Théorème. *Si X est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien de paramètres ρ, λ, et μ, la suite $(X/\nabla_n X)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est paramétrée par les mêmes caractères.*

Les principaux modules X que nous considérons sont les suivants:

(i) Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C_\infty/K_\infty)$ de la l-extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞.

(ii) Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C'_\infty/K_\infty)$ de la l-extension abélienne non ramifiée l-décomposée maximale de K_∞.

Tableau I

Modules paramétrés	Définition de ce module	Paramètres		
		ρ	λ	μ
$\mathrm{Gal}\,(C'_n/K_n)$	C'_n/K_n: l-extension abélienne maximale non ramifiée,	0	λ_c	μ_c
$\mathrm{Rad}\,(C'_n/K_n)$	l-décomposée, d'exposant l^n	0	$\omega\lambda_c^{-1}$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Gal}\,(M_n/K_n)$	M_n/K_n: l-extension abélienne maximale l-ramifiée, d'ex-	$\omega\chi_\infty$	$\omega\lambda_c^{-1}+1+\omega(\chi_l-1)$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Rad}\,(M_n/K_n)$	posant l^n	χ_∞	$\lambda_c+\omega+(\chi_l-1)$	μ_c
$\mathrm{Gal}\,(H_n/K_n)$	H_n/K_n composé des l-extensions cycliques d'exposant l^n,	$\omega\chi_\infty$	$\omega\lambda_c^{-1}+1$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Rad}\,(H_n/K_n)$	arbitrairement plongeables	χ_∞	$\lambda_c+\omega$	μ_c
$\mathrm{Gal}\,(Z_n/K_n)$	Z_n/K_n sous-extension d'exposant l^n de la composée des	$\omega\chi_\infty$	$1+\delta$	0
$\mathrm{Rad}\,(Z_n/K_n)$	Z_l-extensions.	χ_∞	$\omega+\omega\delta^{-1}$	0
μ_n	noyau dans $K_n^\times/K_n^{\times l^n}$ des symboles $\{\zeta_{l^n},\cdot\}$	χ_∞	ω	0
$\mathrm{Gal}\,(M_n/Z_n)$	${}_{l^n}\mathcal{M}_2(K_n)$ son groupe de l^n-	0	$\omega\lambda_c^{-1}-\delta+\omega(\chi_l-1)$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Rad}\,(M_n/Z_n)$	torsion du noyau dans $K_2(K_n)$	0	$\lambda_c-\omega\delta^{-1}+(\chi_l-1)$	μ_c
${}_{l^n}\mathcal{M}_2(K_n)$	des symboles modérés	0	$\omega\lambda_c+\omega(\chi_l-1)$	$\omega\mu_c$
$\mathrm{Gal}\,(H_n/Z_n)$	${}_{l^n}\mathcal{H}_2(K_n)$ sous-groupe de l^n-	0	$\omega\lambda_c^{-1}-\delta$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Rad}\,(H_n/Z_n)$	torsion du noyau dans $K_2(K_n)$	0	$\lambda_c-\omega\delta^{-1}$	μ_c
${}_{l^n}\mathcal{H}_2(K_n)$	des symboles de Hilbert	0	$\omega\lambda_c$	$\omega\mu_c$

Tableau II

$\Lambda[\Delta]$-module étudié	Définition de ce module	Paramètres		
		ρ	λ	μ
$\mathrm{Gal}\,(M_\infty/K_\infty)$	M_∞/K_∞ abélienne maximale l-ramifiée	$\omega\chi_\infty$	$\omega\lambda_c^{-1}+\omega(\chi_l-1)$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Gal}\,(H_\infty/K_\infty)$	$H_\infty=\bigcup_{n\in N}H_n$	$\omega\chi_\infty$	$\omega\lambda_c^{-1}$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Gal}\,(Z_\infty/K_\infty)$	Quotient sans Λ-torsion de $\mathrm{Gal}\,(M_\infty/K_\infty)$	$\omega\chi_\infty$	0	0
$\mathrm{Gal}\,(K_\infty(E_\infty)^{1/l^\infty}/K_\infty)$	E_∞ groupes des unités de K_∞	$\omega\chi_\infty$	$\omega(\chi_l^+-1)$	0
$\mathrm{Gal}\,(C_\infty/K_\infty)$	C_∞/K_∞ abélienne maximale non ramifiée	0	$\lambda_c+\chi_l^-$	μ_c
$\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty[(E_\infty)^{1/l^\infty}])$	E_∞ groupe des unités de K_∞	0	$\omega(\lambda_c+\chi_l^-)^{-1}$	$\omega\mu_c^{-1}$
$\mathrm{Gal}\,(C'_\infty/K_\infty)$	C'_∞ sous-extension l-décomposée de C_∞	0	λ_c	μ_c
$\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty[(E'_\infty)^{1/l^\infty}])$	E'_∞ groupe des l-unités de K_∞	0	$\omega\lambda_c^{-1}$	$\omega\mu_c^{-1}$

(iii) Le groupe de Galois Gal (M_∞/K_∞) de la l-extension abélienne l-ramifiée maximale de K_∞.

(iv) Le groupe de Galois Gal (H_∞/K_∞) de la composée des l-extensions cycliques des corps K_n, qui se plongent dans une l-extension cyclique de degré arbitrairement grand.

Pour chacun de ces modules, l'étude du quotient X/X^{Γ_n} fait intervenir le groupe de Galois d'une extension abélienne d'exposant l^n sur le corps K_n; cette extension admet également une description kummerienne, les paramètres de son radical étant les reflets de ceux de son groupe de Galois dans l'involution du miroir $\chi \mapsto \omega\chi^{-1}$; enfin, plusieurs des radicaux obtenus s'interprètent comme noyaux de symboles classiques, ce qui précise les résultats de [4].

6. Tableau des paramètres. Outre les caractères ω, χ_∞, et χ_l déjà définis, notons S l'ensemble des places au-dessus de l, puis:

(i) δ le caractère de défaut de la conjecture de Leopoldt (i.e. le caractère du $Z_l[\Delta]$-module des unités infinitésimales de K_∞ (cf. [3])).

(ii) λ_c et μ_c les deux paramètres de la suite $(Cl'_n)_{n\in N}$ des l-groupes des S-classes d'idéaux des corps K_n. Nous obtenons le tableau I.

7. Appendice. Nous supposons ici que K/F admet une conjugaison complexe (i.e. que K est une extension quadratique imaginaire d'un sur-corps totalement réel de F), et que K vérifie la conjecture d'indépendance l-adique formulée dans [3] (ces deux conditions sont vérifiées par exemple si F est réel et K absolument abélien). Nous disons alors qu'un caractère l-adique irréductible est *réel* ou *imaginaire* selon qu'il agit trivialement ou non sur la conjugaison complexe, et nous écrivons $\chi=\chi^+ + \chi^-$ la décomposition canonique d'un caractère en ses composantes réelles et imaginaires.

Désignons par $\mathcal{L}_n$ le sous-groupe du l-groupe des classes d'idéaux Cl_n (au sens ordinaire) de K_n, engendré par les classes des idéaux au-dessus de l.

Théorème. *La suite* $(\mathcal{L}_n)_{n\in N}$ *est paramétrée* par $\rho=0$, $\lambda=\chi_l^-$, $\mu=0$.

L'identité $Cl'_n = Cl_n/\mathcal{L}_n$ conduit alors à la classification donnée dans le tableau II.

Remarque. Ces résultats contredisent la conjecture de Coates [1], qui postule l'égalité de $K_\infty[(E_\infty)^{1/l^n}]$ et de Z_∞.

Références

[1] J. Coates: Ann. of Math., **95**, 99–116 (1972).
[2] J.-F. Jaulent: Représentations l-adiques et invariants cyclotomiques. Pub. Math. Fac. Sci., Besançon (1983/84).
[3] ——: Sur l'indépendance l-adique de nombres algébriques. J. Numb. Th., **20** (1985).
[4] A. Kramer and R. Candiotti: Amer. J. of Math., **100**, 177–196 (1978).
[5] J.-P. Serre: Classes des corps cyclotomiques (d'après Iwasawa). Séminaire Bourbaki, vol. 174 (1958).