16. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* IV

Par J.-L. MAUCLAIRE
Institut de Mathématiques Statistiques

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Jan. 12, 1981)

§0. On garde les mêmes notations que dans les notes précédentes de même titre*), et on en introduit une nouvelle:

Si $\lambda \geqslant 1$, on définit B^{λ}_{inv} comme l'ensemble des fonctions de B^{λ} associées aux fonctions de $\mathcal{L}^{\lambda}(E, d\mu)$.

§1. **On a le théorème suivant. Théorème 5.0.** *Soit une suite positive indexée par N^* possédant la propriété suivante*:

Pour tout $n \in N^*$, il existe $y(n) > 0$, dépendant de n, tel que: pour tout $N \in N^*$ dont tous les diviseurs premiers sont $> y(n)$, on a $a(n) \leqslant a(nN)$.

Moyennant cette seule hypothèse; posons:

$$I_x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a(n) \leqslant x \\ 0 & \text{si } a(n) > x. \end{cases}$$

Alors:

1° $I_x(n) \in B^1_{\text{inv}}$.

2° $a(n) \cdot I_x(n) \in B^1_{\text{inv}}$.

Si de plus, $\limsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} a(n) < +\infty$, alors:

3° $a(n) \in B^1_{\text{inv}}$.

§2. Les résultats 5.1 et 5.2 dans la précédente note III se déduisent de ce théorème, et l'on remarquera que, dans ce cas, la fonction I_x est définie de façon différente; la raison en est que l'on n'utilise pas les méthodes usuelles pour ce genre de problème, qui plongent dans $\boldsymbol{R}$ des structures qui n'ont pas beaucoup d'affinité avec les réels, mais que l'on travaille sur des espaces différents.

Le Théorème 5.0 permet de résoudre des problèmes théoriques généraux relatifs aux espaces B^{λ}_{inv}, et je reviendrai sur cela dans des notes ultérieures.

Donnons maintenant des exemples d'application de ce résultat:

1° Soit $\alpha > 1$, et notons:

$$E_{\alpha} = \{n \in N^* \mid \exists d_1, d_2, d_1 \mid n, d_2 \mid n, d_1 < d_2 < \alpha d_1\}.$$

Alors, la fonction caractéristique de E_{α} est un élément de B^1_{inv}.

2° Considérons la classique fonction $\Omega(n) - \omega(n)$. Alors, si on

*) J.-L. Mauclaire, Suites limite-périodiques et théorie des nombres I 180, II 223, III 294, Proc. Japan Acad., 56A (1980).

note $E_k=\{n|\Omega(n)-\omega(n)=k\}$, E_k a une fonction caractéristique qui est dans B^1_{inv}.

3° Si (f_i), $i \in I$, est une famille de fonctions multiplicatives à valeurs entières, et (d_i), $i \in I$, une famille d'entiers strictement positifs, $\{n|f_i(n)\equiv 0 \bmod d_i\}$ a une fonction caractéristique qui est un élément de B^1_{inv}.

Mentionnons que dans de nombreux cas, il est possible de donner une formule explicite des séries de Fourier des fonctions caractéristiques considérées.

§ 3. Il n'est pas possible de donner ici une démonstration complète du résultat 5.0. En fait, il est une conséquence facile du résultat suivant :

Théorème fondamental. *Soit $F(t)$ une fonction positive semi-continue inférieurement sur E. Alors, si $F(t) \in \mathcal{L}(E, d\mu)$, on a :*

$F(n)$ est associée dans B^1_{inv} à $F(t)$ si $F(n)<+\infty$ pour tout $n>0$.

Le lien entre le Théorème 5.0 et le Théorème fondamental est le suivant : Si l'on définit $A(t)=\liminf_{n\to t} a(n)$, $A(t)$ est semi-continue inférieurement, et $A(n)=a(n)$.

Le reste de la démonstration est alors uniquement technique.