42. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* V

Par J.-L. MAUCLAIRE
Institut de Mathématiques Statistiques

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., March 12, 1981)

Cette note est un correctif à la note IV de même titre*⁾, où la proposition suivante est énoncée comme le "Théorème fondamental".

Soit $F(t)$ une fonction positive semi-continue inférieurement sur E, appartenant à $\mathcal{L}(E, d\mu)$. Si $F(n) < +\infty$ pour tout $n > 0$, $F(n)$ est associée dans B^1_{inv} à $F(t)$.

Il se trouve que cette proposition (P) est inexacte en général. Il est facile de voir, en effet, que (P) a pour conséquence la proposition suivante:

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E, et $I_{\mathcal{O}}$ sa fonction caractéristique. Alors la moyenne $MI_{\mathcal{O}}$ existe et est égale à l'intégrale $\int I_{\mathcal{O}}$.

Après un examen de la structure des ouverts de E, on va estimer la moyenne de $I_{\mathcal{O}}$, puis donner une condition nécessaire et suffisante pour que $MI_{\mathcal{O}} = \int I_{\mathcal{O}}$ soit valable. Enfin, on va montrer qu'il existe un $\mathcal{O}$ pour lequel $MI_{\mathcal{O}}$ n'existe pas.

Les résultats donnés dans les notes I, II, III ayant été établis indépendamment de la note IV, restent vrais. En revanche, ceux de la note IV qui dépendent de (P) se trouvent invalidés.

1. Structure des ouverts de E. On introduit les notations suivantes:

Si $t \in E$, t_{y-} est défini par $t_{y-} = \prod_{p \le y} p^{v_p(t)}$, et on l'identifie à $\{p^{v_p(t)}\}_{p \le y}$, avec la convention que $t_{y-} = 0$ si $v_p(t) = +\infty$ pour un $p \le y$.

On peut alors énoncer le résultat suivant:

Théorème 1. *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de E s'écrit sous la forme: $\mathcal{O} = \mathcal{O}^* \cup \mathcal{N}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{N}(\mathcal{O})$ est un ensemble de mesure nulle et $\mathcal{O}^*$ est une réunion disjointe dénombrable au plus d'ouverts de la forme $\theta_{y-} \times \prod_{p>y} E_p$, avec $\theta_{y-} \neq 0$; de plus, $I_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}^*}$ sur N^*.*

2. Estimation de la moyenne sur N* de I. On écrit que:

$\mathcal{O} = (\bigcup_{\theta_{y-}} \theta_{y-} \cdot \prod_{p>y} E_p) \cup \mathcal{N}(\mathcal{O})$, d'après 1, et l'on voit que $I_{\mathcal{O}}(n) = \sum_{\theta_{y-}} I_{\theta_{y-}}(n)$, $n \in N^*$, où $I_{\theta_{y-}}$ est la fonction caractéristique de $\theta_{y-} \prod_{p>y} E_p$.

On a alors le résultat suivant:

*⁾ J.-L. Mauclaire, Suites limite-périodiques et théorie des nombres I 180, II 223, III 294, Proc. Japan Acad., **56A** (1980); IV 72, ibid., **57A** (1981).

Théorème 2. *Il existe une constante absolue c telle que:*

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} I_{\mathcal{O}}(n)-\frac{1}{x}\sum_{x/c_1y\leq\theta_{y-}\leq x} 1\right|\leq c\mu(\mathcal{O}),$$

où c_1 est une constante absolue, la somme $\sum_{x/c_1y\leq\theta_{y-}\leq x} 1$ signifiant que l'on compte le nombre de θ_{y-} vérifiant les inégalités ci-dessus.

On remarque que cette quantité est pratiquement incalculable, ce qui ôte tout espoir d'obtenir un résultat général satisfaisant.

3. Conditions nécessaires et suffisantes pour que $M(I_{\mathcal{O}})=\int I_{\mathcal{O}}$. Comme $\mu(\mathcal{O})=\sum_{\theta_{y-}} 1/\theta_{y-}\times\prod_{p\leq y}(1-1/p)$, un calcul simple donne que, pour $y>Y$ ou $\theta_{y-}>T$ et $y\leq Y$,

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} I_{\mathcal{O}}(n)-\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\sum_{\substack{y\leq Y\\ \theta_{y-}\leq T}} I_{\theta_{y-}}(n)-\frac{1}{x}\sum_{\substack{x/c_1y\leq\theta_{y-}\leq x\\ y>Y \text{ ou } (\theta_{y-}>T,\, y\leq Y)}} 1\right|$$

$$\leq c\sum_{\substack{y>Y \text{ ou}\\ (\theta_{y-}>T,\, y\leq Y)}}\frac{1}{\theta_{y-}}\times\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

qui peut être rendu aussi petit qu'on le veut en choisissant T et Y assez grands.

Comme $I_{\theta_{y-}}$ est continue, il est immédiat que $M(I_{\theta_{y-}})=\int I_{\theta_{y-}}$ et donc que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} I_{\mathcal{O}}(n)=\int I_{\mathcal{O}}$$

si et seulement si

$$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ T\to+\infty}}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\sum_{\substack{x/c_1y\leq\theta_{y-}\leq x\\ y>Y \text{ ou } (\theta_{y-}>T,\, y\leq Y)}} 1=0,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\sum_{x/c_1y\leq\theta_{y-}\leq x} 1=0.$$

On a donc obtenu le résultat:

Théorème 3. $M(I_{\mathcal{O}})=\int I_{\mathcal{O}}$ *si et seulement si* $\overline{\lim}_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{x/c_1y\leq\theta_{y-}\leq x} 1=0.$

Dans ce cas, $I_{\mathcal{O}}\in B^1_{\text{inv}}$.

La condition est impossible à vérifier en général; il suffit, par exemple, d'essayer de traiter le cas où $\mathcal{O}=E\setminus\prod_p\{1, p\}$, dont la fonction caractéristique $(1-|\mu(n)|)$ vérifie toutes les condition requises, pour se rendre compte de la difficulté.

4. Un contre-exemple. Soit a_n une suite primitive (i.e. $a_m\nmid a_n$ si $m\neq n$), vérifiant:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\sum_{a_n\leq x} 1\geq\frac{1}{4}.$$

On sait que $\underline{\lim}_{x\to+\infty} 1/x\sum_{a_n\leq x} 1=0$. (Pour cela, voir référence.) On considère l'ouvert de E défini par $\mathcal{O}=\bigcup_n a_n.\quad\prod_{p>a_n} E_p$. Alors,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\sum_{x/c_1a_n\leq a_n\leq x}1\geq\frac{1}{4}.$$

Donc, comme $\underline{\lim}_{x\to+\infty} 1/x \sum_{a_n\leq x} 1=0$, on en déduit facilement que $M(I_{\mathcal{O}})$ n'existe pas.

Référence

[1] Halberstam and Roth: Sequences I. p. 245, Th. 3 et Th. 4, Oxford University Press (1966).