19. *Remarques sur la Théorie de Développement Asymptotique en Plusieurs Variables. I*

Par Hideyuki MAJIMA
Département de Mathématiques, Université de Tokyo

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., March 13, 1978)

0. Introduction. Les théorèmes suivants sont fondamentals dans la théorie de développement asymptotique en une variable.

"Etant donnée une série formelle $\hat{f}$ en l'origine à une variable, il existe, pour tout secteur ouvert S en 0, des fonctions f holomorphes dans S et asymptotique à $\hat{f}$ en 0 dans S."

"Si une fonction f holomorphe dans un secteur ouvert S en 0 est asymptotique à une série formelle $\hat{f}$ en 0 dans S, alors la dérivée ∂f est asymptotique à $\partial \hat{f}$ en 0 dans S, où $\partial \hat{f}$ est la série formelle obtenue de $\hat{f}$ par différentiation terme à terme. Donc, pour tout entier positif α, $\partial^\alpha f$ sont asymptotiques à $\partial^\alpha \hat{f}$ en 0 dans S."

Le premier théorème est établi de même au cas de plusieurs variables (M. Hukuhara [1]). Mais le second théorème cesse d'être vrai pour des fonctions holomorphes à plusieurs variables. On donne un contre-exemple: la fonction $x_1^{1/2} \exp(-\sum_2^n x_i^{-1})$ dans un polysecteur convenable en $0 \in \boldsymbol{C}^n$.

Le but de cette note est de démontrer que pour une série formelle $\hat{f}$ à n variables $(x_1, \cdots, x_n)$ et pour un polysecteur ouvert S en $0 \in \boldsymbol{C}^n$, on trouve une fonction f holomorphe dans S telle que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\partial^\alpha f$ soient asymptotiques à $\partial^\alpha \hat{f}$ en 0 dans S, où $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, puis de donner des propositions analogues à celles de B. Malgrange [3] et d'énoncer un remarque sur un résultát de R. Gérard et Y. Sibuya [2].

1. Définitions et propriétés fondamentalles. On désigne par T^n un tore de dimension réele n qui est identifié avec $\prod_1^n \Delta_i \subset \boldsymbol{C}^n$, où $\Delta_i = \{x_i \in \boldsymbol{C}; |x_i| = 1\}$. En posant

$$C_i(a_i, b_i) = \{x_i \in \Delta_i; a_i < \arg x_i < b_i\}$$
$$\bar{C}_i(a_i, b_i) = \{x_i \in \Delta_i; a_i \leqslant \arg x_i \leqslant b_i\}$$
$$S_i(a_i, b_i; r_i) = \{x_i \in \boldsymbol{C}; \arg x_i \in C_i(a_i, b_i),\ 0 < |x_i| < r_i\}$$
$$\bar{S}_i(a_i, b_i; r_i) = \{x_i \in C; \arg x_i \in C_i(a_i, b_i),\ 0 < |x_i| \leqslant r_i\}$$

on définit

$$C(a, b) = \prod_1^n C_i(a_i, b_i), \qquad \bar{C}(a, b) = \prod_1^n \bar{C}_i(a_i, b_i),$$
$$S(a, b; r) = \prod_1^n S_i(a_i, b_i; r_i), \qquad \bar{S}(a, b; r) = \prod_1^n \bar{S}_i(a_i, b_i; r_i).$$

Un polysecteur fermé $S(a', b'; r')$ est appelé sous-polysecteur fermé d'un polysecteur ouvert $S(a, b\,; r)$ lorsque $r_i' < r_i$ et $a_i < a_i' < b_i' < b_i$. Autant qu'on ne risque pas de les confondre, on écrit par abréviation C (resp. S) au lieu de $C(a, b)$ (resp. $S(a, b\,; r)$).

On dit qu'une fonction f holomorphe dans un polysecteur fermé $\bar{S}$ est asymptotique à la série formelle $\hat{f} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=p} c_\alpha x^\alpha$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, et on note $f \sim \hat{f}$ ($x \to 0$ dans $\bar{S}$), lorsque pour tout entier non-négatif N, il existe des constantes positives K_N telles que

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{N} \sum_{|\alpha|=p} c_\alpha x^\alpha \right| \leqslant K_N \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{N+1} \qquad \text{dans } S.$$

Une fonction f holomorphe dans un polysecteur ouvert $S \subset \boldsymbol{C}^n$ est asymptotique à une série formelle $\hat{f}$ en 0 dans S, noté $f \sim \hat{f}$ ($x \to 0$ dans S), lorsque pour tout sous-polysecteur fermé $\bar{S}$ de S, $f \sim \hat{f}$ ($x \to 0$ dans S).

Une fonction f holomorphe dans un polysecteur ouvert $\hat{S}$ est dite d'être asymptotique fortement à une série formelle $\hat{f}$ en 0 dans S, noté $f \approx \hat{f}$ ($x \to 0$ dans S), si on a, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\partial^\alpha f \sim \partial^\alpha \hat{f}$ ($x \to 0$ dans S).

Proposition 1.1.

(1) $f \approx \hat{f}_1$ *et* $f \approx \hat{f}_2$ ($x \to 0$ *dans* S) $\Rightarrow \hat{f}_1 = \hat{f}_2$.

(2) $f \approx \hat{f}$ *et* $g \approx \hat{g}$ ($x \to 0$ *dans* S)
$\Rightarrow f + g \approx \hat{f} + \hat{g}$, $fg \approx \hat{f}\hat{g}$ ($x \to 0$ *dans* S)

(3) $f \approx \hat{f}$ ($x \to 0$ *dans* S), $f(x) \neq 0$ ($x \in S$) *et* $\hat{f}(0) \neq 0$
$\Rightarrow 1/f \approx 1/\hat{f}$ ($x \to 0$) *dans* S)

(4) $f \approx \hat{f}$ ($x \to 0$ *dans* S) *et* $G \approx \hat{G}$ ($z \to 0$ *dans* T) *et* $f(S) \subset T$
$\Rightarrow G \circ f \approx \hat{G} \circ \hat{f}$ ($x \to 0$ *dans* T)

(5) $f \sim \hat{f}$ ($x \to 0$ *dans* $U = \prod_1^n \{x_i \in \boldsymbol{C}\,; 0 < |x_i| < 1\}$)
$\Rightarrow \hat{f}$ *converge vers* f *dans* U.

(6) f *est holomorphe dans* S *et* $\partial^\alpha f \to c_\alpha$ ($x \to 0$ *dans* S) *pour tout* α
$\Rightarrow f \approx \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0} x^\alpha c_\alpha / \alpha!$ ($x \to 0$ *dans* S)

(7) $f \sim \hat{f}$ *et* $\partial^\alpha f \sim \hat{g}_\alpha$ ($x \to 0$ *dans* S) *pour tout* α
$\Rightarrow f \sim \hat{f}$ ($x \to 0$ *dans* S) *et* $\partial^\alpha \hat{f} = \hat{g}_\alpha$.

(8) $f \approx \hat{f}$ ($x \to 0$ *dans* $\{x_i \in \boldsymbol{C}\,; 0 < |x_i| < r_i\} \times \prod_{j \neq i} S_j(a_j, b_j\,; r_j)$)
$\Rightarrow f(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)$ *et* $\partial^\alpha f(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)$ *sont holomorphes pour tout* α.

2. Existence d'une fonction holomorphe asymptotique fortement à une série formelle donnée. Nous avons la théorème suivante.

Théorème 2.1. *Pour toute série formelle* $\hat{f}$ *et pour tout polysecteur ouvert* $S(a, b\,; r)$, *on trouve une fonction* f *holomorphe dans* S *et asymptotique fortement à* $\hat{f}$ *en* 0 *dans* S.

En effect, soit $\hat{f} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=q} c_\alpha x^\alpha$. D'abord, choisissons une suite $\{d_\alpha\}$ telle que

$$d_\alpha = \begin{cases} \min\{1/|c_\alpha| r^\alpha, 1\} & c_\alpha \neq 0 \\ 0 & c_\alpha = 0. \end{cases}$$

En suite, prenons des constantes positives θ_i, p_i, et des constantes réeles δ_i de manière que l'on ait, pour $(x_1, \cdots, x_n) \in S(a, b; r)$, $\mathrm{Re}\,(\exp(\sqrt{-1}\theta_i)x_i^{-p_i}) \leqslant -\delta_i$ et $\sum p_i < 1$. Posons

$$f(x)=\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=q} c_{|\alpha|} x^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} (1-\exp(d_{\alpha} x_i^{-p_i} \exp(\sqrt{-1}\theta_i))).$$

Si l'on remarque les inégalités

$$|1-e^z|<|z| \quad \text{et} \quad |1-e^z|<2 \quad (\mathrm{Re}\, z<0),$$

on peut facilement démontrer que cette série définie ci-dessus et les séries obtenues de la série par différentiation terme à terme convergent dans tout sous-ensemble compact de S, et que f est asymptotique fortement à $\hat{f}$ en 0 dans S.

On peut démontrer de même la théorème suivante.

Théorème 2.2. *Soit $\hat{f}$ une série formelle telle que $\hat{f}(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)$ et $\bar{\partial}^{\alpha}\hat{f}(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)$ soient holomorphes dans $U_i=\{x_i \in \boldsymbol{C}; 0<|x_i|<r_i\}$. Alors, il existe, pour tout $S_j(a_j, b_j; r_j)$ $(j \neq i)$, une fonction f holomorphe dans $U_i \times \prod_{j \neq i} S_j$ et asymptotique fortement à $\hat{f}$ en 0 dans $U_i \times \prod_{j \neq i} S_j$:*

3. Propositions analogues à celles de B. Malgrange [3]. On introduit plusieurs notations suivantes:

$\mathcal{O}=\boldsymbol{C}\{x_1, \cdots, x_n\}$, l'ensemble des série convergentes
$=$l'ensemble des germes de fonction holomorphe en 0.

$\hat{\mathcal{O}}=\boldsymbol{C}[x_1, \cdots, x_n]$, l'ensemble des séries formelles.

$\mathcal{E}=$l'ensemble des germes de fonction de classe C^{∞} en $0 \in \boldsymbol{C}^n$

$\hat{\mathcal{E}}=\boldsymbol{C}[x_1, \bar{x}_1, \cdots, x_n, \bar{x}_n]$, l'ensemble des séries formelles à $2n$ variables $(x_1, \bar{x}_1, \cdots, x_n, \bar{x}_n)$.

$\boldsymbol{P}=$l'ensemble des germes de fonction plate de classe C^{∞} en $0 \in \boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{R}^{2n}$.

Pour $X=\mathcal{E}, \hat{\mathcal{E}}$, ou $\boldsymbol{P}$, on désigne par ${}_cX$ l'ensemble

$$\{(f_1, \cdots, f_n) \in X^n; \bar{\partial}_i f_j=\bar{\partial}_j f_i, \ 1 \leqslant i<j \leqslant n\}.$$

Proposition 3.1. *Le module $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ est isomorphe au module ${}_c\boldsymbol{P}/\bar{\partial}\boldsymbol{P}$ où $\bar{\partial}f=(\bar{\partial}_1 f, \cdots, \bar{\partial}_n f)$.*

Cette proposition est une conséquence du diagramme commutatif suivant dont toutes les suites sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{O}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \boldsymbol{P} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & \hat{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\partial}"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & {}_c\boldsymbol{P} \arrow[r] \arrow[d] & {}_c\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & {}_c\hat{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & {}_c\boldsymbol{P}/\bar{\partial}\boldsymbol{P} \arrow[d] & 0 & 0 & & \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $C(a, b)$ un ouvert de T^n, et soient f et g des fonctions de classe C^∞ (ou holomorphes) dans $S(a, b; r_f)$ et $S(a, b; r_g)$ respectivement. On dit que f et g sont équivalentes du côté de $C(a, b)$, lorsque $f=g$ dans $S(a, b; r_f) \cap S(a, b; r_g)$. Une classe d'équivalence est appelée germe en 0 du côté de $C(a, b)$. On désigne par $[f]$ la classe d'équivalence contenant f.

On fabrique trois faisceaux ${}_f\mathcal{A}_0$, $\mathcal{P}$, et ${}_c\mathcal{P}$ sur T^n comme suit. Soit ${}_f\mathcal{A}_0(C)$ (resp. $\mathcal{P}(C)$) l'ensemble des germes $[f]$ en 0 du côté de $C(a, b)=C$ de fonction holomorphe (resp. de classe C^∞) qui est asymptotique fortement à 0 en l'origine dans $S(a, b; r_f)$ (N. B. la conception de développement asymptotique est généralisée aux fonctions de classe C^∞), et soit ${}_c\mathcal{P}(C)$ l'ensemble des éléments $([f_1], \cdots, [f_n]) \in \mathcal{P}(C)^n$ tels que pour tout $\bar{C} \subset C$, il existe $[g_i] \in \mathcal{P}(T^n)$ satisfaisants $[g_j|_{\bar{C}}]=[f_j|_{\bar{C}}]$ et $\bar{\partial}_j g_i = \bar{\partial}_i g_j$. Les applications $C \to {}_f\mathcal{A}_0(C)$, $C \to \mathcal{P}(C)$, $C \to {}_c\mathcal{P}(C)$ définissent des préfaisceaux sur T^n. Les faisceaux ${}_f\mathcal{A}_0$, $\mathcal{P}$, ${}_c\mathcal{P}$ sont définis comme ceux associés à ces préfaisceaux.

Proposition 3.2. *La suite*

$$0 \longrightarrow {}_f\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\bar{\partial}} {}_c\mathcal{P} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Il résulte du Théorème 2.1 et du fait que ${}_c\mathcal{P}$ est un faisceau mou que la suite $\mathcal{P} \xrightarrow{\bar{\partial}} {}_c\mathcal{P} \longrightarrow 0$ est exacte. Les autres parts sont vérifiés aisément.

Proposition 3.3. *Le module $H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_0)$ est isomorphe au module ${}_cP/\bar{\partial}P$.*

Cette proposition découle de $\Gamma(T^n, \mathcal{P})=P$, $\Gamma(T^n, {}_c\mathcal{P})={}_cP$ et du fait que $\mathcal{P}$ est mou.

On obtient, des Propositions 3.1 et 3.3, la proposition suivante.

Proposition 3.4. *Le module $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ est isomorphe au module $H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_0)$.*

On voit que l'isomorphisme $\mu: \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_0)$ est donnée comme suit: prenons un recouvrement $\{C_\sigma\}$ de T^n où C_σ sont connexes et $\neq T^n$, étant donné une série formelle $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, on peut trouver un système des fonctions holomorphes $\{f_\sigma\}$ tel que chaque f_σ soit asymptotique fortement à $\hat{f}$ dans un polysecteur correspondant à C_σ, alors μ ($\hat{f}$ mod. $\mathcal{O}$) est égale à la classe de cohomologie de $\{f_\sigma - f_\tau\}$.

Soit ${}_f\mathcal{A}_I(C)$ l'ensemble des germes $[T]$ de matrices T carrés d'ordre m inversibles qui sont holomorphes et asymptotiques fortement à la matrice I en 0 dans $S(a, b; r_T)$. On définit ${}_f\mathcal{A}_I$ comme le faisceau associé au préfaisceau défini par l'application $C \to {}_f\mathcal{A}_I(C)$.

4. Application pour des systèmes de Pfaff. Considérons la système de Pfaff, complètement intégrable de la forme

$$(*) \qquad dZ=\sum_{i=1}^{n}(A_i(x)x_i^{-p_i-1}Z)dx_i$$

avec $p_i \geqslant 0$ (entiers), les matrices $A_i(x)$ *holomorphes en* $0 \in \boldsymbol{C}^n$, $Z={}^t(z_1, \cdots, z_m)$.

Pour les matrices A_i et les entiers non-négatifs p_i, on désigne par $M_{A,p}$ l'ensemble des éléments $(B_1(x), \cdots, B_n(x); T)$ où $B_i(x)$ sont des matrices holomorphes en 0 d'ordre m et $T \in GL(m, \hat{\mathcal{O}})$ telles que $B_i(x) = T^{-1}(A_i(x)T - x_i^{p_i+1}T/x_i) := T((A_i))$. On dit que les éléments $(B_1(x), \cdots, B_n(x); T)$ et $(C_1(x), \cdots, C_n(x); T')$ sont équivalents, noté $(B(x); T) \sim (C(x); T')$, s'il existe une matrice $W \in GL(m, \mathcal{O})$ telle que $T=T'W$ et $B_i = W((C_i))$.

On désigne par ${}_f\mathcal{A}_I^{A,p}(C(a,b))$ l'ensemble des germes $[T] \in {}_f\mathcal{A}_I(C(a,b))$ de manière que $A_i = T((A_i))$.

Proposition 4.1. Si $(B(x); T) \in M_{A,p}$, alors il existe une application bijective de $H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_I^{A,p})$ à $H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_I^{B,p})$, où ${}_f\mathcal{A}_I^{A,p}$ (resp. ${}_f\mathcal{A}_I^{B,p}$) est le faisceau associé au préfaisceau défini par l'application $C \to {}_f\mathcal{A}_I^{A,p}(C)$ (resp. ${}_f\mathcal{A}_I^{B,p}(C)$).

Si, de plus, on suppose que $A_i(0)$ *aient des valeurs propres distinctes*, grâce à la théorie de développement asymptotique des solutions du système de Pfaff avec singularités irrégulières établie par K. Takano [6], on peut définir l'application

$$\nu : M_{A,p}/\sim \to H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_I^{A,p})$$

de la manière analogue à l'application μ de Proposition 3.4.

Proposition 4.2. *L'application ν est injective.*

Proposition 4.3. *Soient $\Lambda_i(x_i) = \mathrm{diag.}\ (\lambda_1^i(x_i), \cdots, \lambda_m^i(x_i))$ où $\lambda_j^i(x_i) = \sum_{h=2}^{p_i+1} \lambda_{j,h}^i x_i^{-h}$, et soient $R_i = \mathrm{diag.}\ (\zeta_1^i, \cdots, \zeta_m^i)$. Posons $B_i(x) = \Lambda_i(x) + R_i x_i^{-1}$. Alors on a $H^1(T^n, {}_f\mathcal{A}_I^{B,p}) = \{(1)\}$, si $n \geqslant 2$.*

Trois propositions ci-dessus concluent le théorème suivant. Il a été démontré par R. Gérard et Y. Sibuya [2], et par Y. Sibuya [7].

Théorème 4.4. *Supposons que $n \geqslant 2$. Si les matrices $A_i(x)$ sont holomorphes en $0 \in \boldsymbol{C}^n$, et que $A_i(0)$ ont des valeurs propres dintinctes, alors, une solution formelle de système $(*)$ est convergente, en particulier, il n'apparaît pas de phénomène de Stokes dans ce cas.*

Références

[1] M. Hukuhara: Sur les points singuliers d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. IV. Proc. Phys.-Math. Soc. Japon., Ser. III, **20**, 865–907 (1938).

[2] R. Gérard et Y. Sibuya: Etude de certains systèmes de Pfaff au voisinage d'une singularité. C.R.A.S. Paris, **284**, Ser. A, 57–60 (1977).

[3] B. Malgrange: Remarques sur les équations différentielles ordinaires avec points singuliers irréguliers (manuscrit).

[4] Y. Sibuya: Les équations linéaires différentielles ordinaires dans un champ complex. Kinokuniya, Tokyo (1976) (en japonais).

[5] Y. Shibuya: Global Theory of a Second Order Linear Ordinary Differential Equation with a Polynomial Coefficient. North-Holland, New York (1975).
[6] ——: Storkes phenomena. Bull. A.M.S., **83**, 1075–1077 (1977).
[7] ——: Convergence of power series solutions of a linear Pfaffian system at an irregular singularity (preprint).
[8] K. Takano: Asymptotic solutions of a linear Pfaffian system with irregular singular points. Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **24**, 381–404 (1977).
[9] W. Wasow: Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. Interscience Publ. (1965).