

63. Zur Theorie der algebraischen Korrespondenzen II. Multiplikation der Korrespondenzen.

Von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokio.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1945.)

In dieser Note wollen wir die Multiplikation der algebraischen Korrespondenzen auf algebraischen Kurven definieren und einige Sätze darüber herleiten. Der Multiplikatorenmodul und der Multiplikatorenring der algebraischen Kurve sollen auch eingeführt werden. Die Bezeichnungen wie $k, P_1, P_m, P_{1,m}, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$ u.s.w. mögen dieselbe Bedeutungen haben wie im Teil I¹⁾, wenn nicht das Gegenteil angemerkt wird.

Zunächst führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Für eine irreduzible Korrespondenz C auf Γ_{12} und einen beliebigen Punkt a in Γ_1 definieren wir eine Punktgruppe $C^{(2)}(a)$ in Γ_2 mit

$$C^{(2)}(a) = \{b^{(a)}; (a, b^a) \in [(a) \times \Gamma_2, C]\}^2 \quad \text{falls } C \cong (a) \times \Gamma_2,$$

$$C^{(2)}(a) = \text{die Nullgruppe, falls } C = (a) \times \Gamma_2.$$

Allgemein setze man für eine beliebige Korrespondenz $C = \sum \lambda_i C_i$ (C_i : irreduzibel) auf Γ_{12} und eine beliebige Punktgruppe $G_1 = \sum \mu_j a^{(j)}$ in Γ_1

$$C^{(2)}(G_1) = \sum \lambda_i \mu_j C_i^{(2)}(a^{(j)}).$$

Analog definieren wir $C^{(1)}(b)$ bzw. $C^{(1)}(G_2)$ für einen Punkt b bzw. eine Punktgruppe G_2 in Γ_2 . Es gilt dann offenbar

$$C^{(2)}(G_1) \rightarrow C^{(2)}(G_1'), \quad C^{(1)}(G_2) \rightarrow C^{(1)}(G_2'),$$

wenn man G_i ($i=1, 2$) in G_i' spezialisiert.

Nun beweisen wir den

Satz 1. Es gilt für jeden Punkt a in Γ_1

$$C^{(2)}(a) = D^{(2)}(a)$$

genau dann, wenn die Korrespondenzen C, D bis auf Korrespondenzen der Form $(a^{(a)}) \times \Gamma_2$ mit einander zusammenfallen. Analoges gilt für $C^{(1)}, D^{(1)}$.

Beweis. Es sei

$$C = \sum \lambda_i C_i, \quad D = \sum \mu_j D_j$$

und es gelte für einen allgemeinen Punkt ξ von Γ_1

$$\sum \lambda_i C_i^{(2)}(\xi) = \sum \mu_j D_j^{(2)}(\xi).$$

1) Zur Theorie der algebraischen Korrespondenzen I, Proc. Imp. Acad. Jap. Vol. (1945), zitiert im folgenden mit I.

2) $[C, D]$ bedeutet die Schnittpunktgruppe von C, D , vgl. I. ($\alpha; E$) bedeutet die Menge von α , welches die Eigenschaft E besitzt.

Wenn C_i nicht die Form $(\alpha^{(i)}) \times \Gamma_2$ hat, so wird C_i nach Satz 3 in I durch $C_i^{(3)}(\xi) = [(\xi) \times \Gamma_2, C_i]$ eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt natürllich auch für D_j und daraus folgt offenbar die Behauptung.

Nun sei Γ_3 eine singularitätenfreie irreduzible Kurve in einem n -dimensionalen projektiven Raum P_n über k . Wir setzen

$$P_{i,n} = P_i \times P_n, \quad P_{m,n} = P_m \times P_n, \\ \Gamma_{1,3} = \Gamma_1 \times \Gamma_3, \quad \Gamma_{2,3} = \Gamma_2 \times \Gamma_3.$$

Für eine beliebige Korrespondenz $C = C_{12}$ auf Γ_{12} und ein $D = D_{23}$ auf Γ_{23} wollen wir eine solche Korrespondenz $E = E_{13}$ auf Γ_{13} suchen, so dass es für beliebige Punkte a, c in Γ_1 bzw. Γ_3 immer

$$(1) \quad E_{13}^{(3)}(a) = D_{23}^{(3)}(C_{12}^{(3)}(a)), \quad E_{13}^{(1)}(c) = C_{12}^{(1)}(D_{23}^{(3)}(c))$$

gilt. Es gibt, wie wir zeigen werden, eine einzige solche Korrespondenz E_{13} und wir heissen diese Korrespondenz das Produkt von C und D :

$$E_{13} = C_{12} \times D_{23}$$

Die Eindeutigkeit folgt ohne Weiters aus Satz 1. Beim Beweis der Existenz kann man C, D als irreduzibel annehmen, denn für allgemeine $C = \sum \lambda_i C_i, D = \sum \mu_j D_j$ hat man nur zu setzen

$$E = C \times D = \sum \lambda_i \mu_j (C_i \times D_j),$$

wenn $C_j \times D_j$ schon bestimmt ist. Wenn eines von C, D ausgeartet ist, so können wir ohne Weiters ein solches E angeben. Z.B. setze man für $C = \Gamma_1 \times (b)$

$$E = C \times D = \Sigma(\Gamma_1 \times (c^{(j)})),$$

wobei $c^{(j)}$ alle Punkte in $D^{(3)}(b)$ durchläuft. Man bemerke dabei, dass E in diesem Fall immer nur aus ausgearteten irreduziblen Korrespondenzen besteht und dass in gewissen Fällen die Nullkorrespondenz θ_{13} auftritt; es gilt z.B.

$$((a) \times \Gamma_2) \times (\Gamma_2 \times (c)) = \theta_{13}.$$

Wir nehmen also an, dass C, D beide irreduzible nicht ausgeartete Korrespondenzen sind und beweisen die Existenz von $E = C \times D$. Wir bezeichnen mit $f(x, y, u) = 0$ diejenige Hyperfläche in $P_{1,n}$, die C mit einem allgemeinen linearen Raum $L_{i-2}^{(1)} \times L_{m-2}^{(2)}$ verbindet und mit $g(u, z, v') = 0$ die Hyperfläche in $P_{m,n}$, die D mit einem ebensolchen Raum $L_{m-2}^{(2)} \times L_{n-2}^{(3)}$ verbindet. Es gilt dann

$$[\Gamma_{12}, f(x, y, u')] = C + \sum_{i=2}^a \lambda_i C_i, \quad [\Gamma_{23}, g(x, y, v')] = D + \sum_{j=2}^b \mu_j D_j,$$

wobei $C_i (i \geq 2), D_j (j \geq 2)$ je von $L_{i-2}^{(1)} \times L_{m-2}^{(2)}$ bzw. $L_{m-2} \times L_{n-2}^{(3)}$ abhängige irreduzible Korrespondenzen sind.³⁾ Wir schneiden nun in P_m die Hyperflächen

3) Vgl. I. Wir bezeichnen die Unbestimmten in P_n mit $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$.

4) Vgl. I.

$f(x, y, u')=0, g(y, z, v')=0$, wobei f, g als Form von y betrachtet werden sollen, mit der Kurve Γ_2 . Es sei

$$(2) \quad \begin{aligned} [\Gamma_2, f(x, y, u')] &= \{\eta^{(\lambda)}; \lambda=1, \dots, \gamma\}, \\ [\Gamma_2, g(y, z, v')] &= \{\eta'^{(\mu)}; \mu=1, \dots, \delta\}. \end{aligned}$$

Mit normierten Koordinaten gilt dann⁵⁾

$$\prod_{\mu=1}^{\delta} f(x, \eta'^{(\mu)}, u') = \prod_{\lambda=1}^{\gamma} g(\eta^{(\lambda)}, z, v')$$

und dies ist eine Form von x, z , welche wir mit $h(x, z, w')$ bezeichnen wollen. Es sei E' der von $L_{i-2}^{(1)} \times L_m^{(2)}, L_{m-2}^{(2)} \times L_n^{(3)}$ unabhängige Teil von $[\Gamma_{13}, h(x, z, w')]$ und E'' der Rest:

$$[\Gamma_{13}, h(x, z, w')] = E' + E''.$$

Wir wollen nun aus der Annahme, dass $[\Gamma_{13}, h(x, z, w')]$ eine ausgeartete irreduzible Korrespondenz enthält, einen Widerspruch ableiten. Es sei also z.B. $(a') \times \Gamma_3$ in $[\Gamma_{13}, h(x, z, w')]$ enthalten und es gelte $\eta^{(\lambda)} \rightarrow \bar{\eta}^{(\lambda)}$ bei der Spezialisierung $x \rightarrow a'$. Es gilt dann

$$h(a', z, w') = \Pi g(\eta^{(\lambda)}, z, w')$$

und eines von $g(\bar{\eta}^{(\lambda)}, z, v')=0$ muss Γ_3 enthalten, d.h. eines von $(\bar{\eta}^{(\lambda)} \times \Gamma_3)$ muss in $[\Gamma_{23}, g(y, z, v')]$ liegen, was aber unmöglich ist, wie wir in I bemerkt haben. $[\Gamma_{13}, h(x, z, w')] = E' + E''$ enthält also keine ausgeartete Korrespondenz und folglich wird nach Satz 1 durch das Bild $E'^{(3)}(\xi) + E''^{(3)}(\xi)$ von einem allgemeinen Punkt ξ von Γ_1 völlig bestimmt. $E'^{(3)}(\xi)$ ist dabei offenbar von $L_{i-1}^{(1)} \times L_m^{(2)}, L_m^{(2)} \times L_n^{(3)}$ unabhängig, während jeder Punkt von $E''^{(3)}(\xi)$ wirklich von einem solcher Räume abhängt. Wenn nun $\eta^{(\lambda)}$ bei der Spezialisierung $x \rightarrow \xi$ relationstreu in $\eta^{*(\lambda)}$ übergeht, so ist

$$[\Gamma_2, f(\xi, y, u')] = \{\eta^{*(\lambda)}; \lambda=1, \dots, \gamma\}, \quad h(\xi, z, w') = \Pi g(\eta^{*(\lambda)}, z, v').$$

Es gilt andererseits nach Satz 4 in I

$$\begin{aligned} E'^{(3)}(\xi) + E''^{(3)}(\xi) &= [\Gamma_{13}, h(x, z, w')]^{(3)}(\xi) = \{\zeta^{(\omega)}; (\xi, \zeta^{(\omega)}) \in [(\xi) \times \Gamma_3, \\ & \quad h(x, z, w')]\} = [\Gamma_3, h(\xi, z, w')], \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned} [\Gamma_{23}, g(y, z, v')]^{(3)}(\eta^{*(\lambda)}) &= [\Gamma_3, g(\eta^{*(\lambda)}, z, v')], \\ [\Gamma_{12}, f(x, y, u')]^{(3)}(\xi) &= [\Gamma_2, f(\xi, y, u')]. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$E'^{(3)}(\xi) + E''^{(3)}(\xi) = [\Gamma_3, h(\xi, z, w')] = [\Gamma_3, \prod_{\lambda=1}^{\gamma} g(\eta^{*(\lambda)}, z, v')]$$

5) Vgl. W.-L. Chow, Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper, Math. Ann. 114 (1937).

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda=1}^r [\Gamma_{\lambda}, g(\eta^{*(\lambda)}, z, v')] = \sum_{\lambda=1}^r [\Gamma_{2\lambda}, g(y, z, v')]^{(3)} (\eta^{*(\lambda)}) \\
&= [\Gamma_{2s}, g(y, z, v')]^{(3)} \left(\sum_{\lambda=1}^r \eta^{*(\lambda)} \right) \\
&= [\Gamma_{2s}, g(y, z, v')]^{(3)} ([\Gamma_2, f(\xi, y, u')]) \\
&= [\Gamma_{2s}, g(y, z, v')]^{(3)} ([\Gamma_{12}, f(x, y, u')]^{(2)}(\xi)) \\
&= (D + \sum_{j=2}^{\beta} \eta_j D_j)^{(3)} (C + \sum_{i=2}^{\alpha} \lambda_i C_i)^{(3)}(\xi).
\end{aligned}$$

Mithin haben wir

$$\begin{aligned}
(3) \quad E^{(3)}(\xi) + E'^{(3)}(\xi) &= D^{(3)}(C^{(3)}(\xi)) + \sum_{i=2}^{\alpha} \lambda_i D^{(3)}(C_i^{(3)}(\xi)) + \sum_{j=2}^{\beta} \mu_j D_j^{(3)}(C^{(3)}(\xi)) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{\alpha} \sum_{j=2}^{\beta} \lambda_i \mu_j D_j^{(3)}(C_i^{(3)}(\xi)).
\end{aligned}$$

Offenbar hängen die Punkte in $D^{(3)}(C^{(3)}(\xi))$ nicht von $L_{i-2}^{(1)} \times L_{m-2}^{(2)}$, $L_{m-2}^{(2)} \times L_{n-2}^{(3)}$ ab. Wir zeigen nun, dass jeder Punkt von $D^{(3)}(C_i^{(3)}(\xi))$, $D_j^{(3)}(C^{(3)}(\xi))$, $D_j^{(3)}(C_i^{(3)}(\xi))$ von einem solcher linearen Räume wirklich abhängt. Z.B. nehme man einem Punkt $\zeta^{(\omega)}$ in $D^{(3)}(C_i^{(3)}(\xi))$. Nach Konstruktion gibt es einem Punkt $\eta^{*(\lambda)}$, so dass $(\xi, \eta^{*(\lambda)})$ ein allgemeiner Punkt von C_i und $(\eta^{*(\lambda)}, \zeta^{(\omega)})$ ein allgemeiner Punkt von D ist. $(\xi, \eta^{*(\lambda)})$ und $\eta^{*(\lambda)}$ hängen also nicht von $L_{m-2}^{(2)} \times L_{n-2}^{(3)}$ ab, während $(\eta^{*(\lambda)}, \zeta^{(\omega)})$ wirklich von diesem Raum abhängt. $\zeta^{(\omega)}$ muss folglich von $L_{m-2}^{(2)} \times L_{n-2}^{(3)}$ abhängen. Aus (3) erhält man also

$$E'^{(3)}(\xi) = D^{(3)}(C^{(3)}(\xi)).$$

Genau so beweist man

$$E^{(3)}(\zeta) = C^{(1)}(D^{(3)}(\zeta))$$

für einen allgemeinen Punkt ζ in Γ_3 . $E' = E$ genügt also der Bedingung (1). Zusammenfassend haben wir

Satz 2. Für beliebige Korrespondenzen C, D auf Γ_{12} bzw. Γ_{23} gibt es eine und nur eine Korrespondenz E auf Γ_{13} , so dass es für beliebige Punkte a, c in Γ_1 bzw. Γ_3

$$E^{(3)}(a) = D^{(3)}(C^{(3)}(a)), \quad E^{(1)}(c) = C^{(1)}(D^{(3)}(c))$$

gilt. Wir nennen E das Produkt von C und D :

$$E = C \times D.$$

Wenn eines von C, D nur aus ausgearteten irreduziblen Korrespondenzen besteht, so gilt dasselbe auch für $E = C \times D$ und wenn C und D keine ausgeartete Korrespondenz enthalten, so enthält auch $E = C \times D$ keine solche Korrespondenz.

Nun bildet bekanntlich die Gesamtheit aller Korrespondenzen auf $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ einen Modul, den Korrespondenzenmodul $\mathfrak{C}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ von Γ_1, Γ_2 . In $\mathfrak{C}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ erzeugen die Korrespondenzen der Form $(a) \times \Gamma_2$ bzw. $\Gamma_1 \times (b)$ je

einen Teilmodul $\mathfrak{A}_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$ bzw. $\mathfrak{A}_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Die Summe von $\mathfrak{A}_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$, $\mathfrak{A}_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Ebenso erzeugen alle nicht ausgeartete irreduzible Korrespondenzen einen Teilmodul $\mathfrak{G}(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Es gilt offenbar die Zerlegungen in direkte Summen:

$$\mathfrak{G}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \mathfrak{G}(\Gamma_1, \Gamma_2) + \mathfrak{A}(\Gamma_1, \Gamma_2),$$

$$\mathfrak{A}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \mathfrak{A}(\Gamma_1, \Gamma_2) + \mathfrak{A}_2(\Gamma_1, \Gamma_2).$$

Diese Moduln haben ersichtlich birational invariante Bedeutungen, d.h. das Bild von einem solchen Moduln, z.B. das von $\mathfrak{G}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ bei einer birationalen Transformation, welche $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ auf $\Gamma'_{12} = \Gamma'_1 \times \Gamma'_2$ abbildet, fällt mit $\mathfrak{G}(\Gamma'_1, \Gamma'_2)$ zusammen. Wir bezeichnen ferner den von \mathfrak{A} und von der Korrespondenzen der Form $[\Gamma_{12}, f(x, y, u')]$ ($f(x, y, u')$ = beliebige Form über k) erzeugten Teilmodul mit $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ und den Restklassenmodul $\mathfrak{G}(\Gamma_1, \Gamma_2) / \mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ mit $\mathfrak{M}(\Gamma_1, \Gamma_2)$. $\mathfrak{M}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ nennt man den Multiplikatorenmodul von Γ_1, Γ_2 . Dass $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ und somit auch $\mathfrak{M}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ birational invariante Moduln sind, sieht man unmittelbar aus Satz 6 in I ein.

Späterer Anwendung wegen schalten wir hier einige Hilfssätze ein.

Hilfssatz 1. In jeder Restklasse von $\mathfrak{M}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ gibt es eine solche Korrespondenz

$$C = \sum_{i=1}^{\alpha} C_i,$$

welche folgende Bedingungen erfüllt:

- i) C_i sind von einander verschieden,
- ii) der allgemeine Punkt $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ von C_i ist so beschaffen, dass $k(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}) / k(\xi^{(i)})$ separabel ist,
- iii) C_i ($i=1, \dots, \alpha$) fallen mit keiner von den von vornherein angegebenen endlichvielen irreduziblen Korrespondenzen D_j ($j=1, \dots, \beta$) zusammen: $C_i \not\cong D_j$ ($i=1, \dots, \alpha, j=1, \dots, \beta$).

Beweis. Es sei C^* eine beliebige Korrespondenz in einer Restklasse von $\mathfrak{M}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ und ξ ein allgemeiner Punkt von Γ_1 . Wir wählen eine Punktgruppe $G = \{b^{(\rho)}; \rho=1, \dots, \gamma\}$ in Γ_2 mit genügend grosser Ordnung γ . Wir nehmen an dass jedes $b^{(\rho)}$ in k liegt und dass die Ordnung δ von $G + C^{*(\delta)}(\xi)$ zu p prim ist. Wir bezeichnen mit A_λ die allgemeine Punktgruppe der Vollschar der mit $G + C^{*(\delta)}(\xi)$ äquivalenten effektiven Divisoren und setzen

$$A_\lambda + B = [\Gamma_2, \lambda_0 g_0(y) + \lambda_1 g_1(y) + \dots + \lambda_r g_r(y)],$$

wobei B einen geeigneten festen Divisor und $g_r(y)$ Formen in $k(\xi)[y]$ bedeuten. Wenn γ genügend gross gewählt ist, so folgt nach dem Riemann-Rochschen Satz,

class A_λ genau der von λ abhängige Teil von $[\Gamma_2, \Sigma \lambda_i g_i(y)]$ ist. Nach dem verallgemeinerten Satz von Bertini⁶⁾ sind also die Punkte $\eta^{(\mu)}$ ($\mu=1, \dots, \delta$) von A_λ einander konjugiert über $k(\xi, \lambda)$ und fallen je p^e zusammen, falls der Exponent von $k(\xi, \lambda, \eta^{(\mu)})/k(\xi, \lambda)$ p^e ist. Da aber δ zu p prim ist, so folgt $p^e=1$, d.h. dass $\eta^{(\mu)}$ alle voneinander verschieden sind. Durch geeignete Spezialisierung $\lambda \rightarrow \lambda'$ ($\lambda' \in k(\xi)$) kann man also eine Punktgruppe $A_{\lambda'}$ erhalten, welche aus voneinander verschiedenen, über $k(\xi)$ algebraischen Punkten $\eta^{(\mu)}$ ($\mu=1, \dots, \delta$) besteht. Da

$$G + C^{*\text{②}}(\xi) \equiv A_{\lambda'} \text{?}$$

ist, gibt es andererseits Formen $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ von demselben Grad in $k(\xi)[y]$, so dass

$$[\Gamma_2, \varphi_1(y)] + G + C^{*\text{②}}(\xi) = [\Gamma_2, \varphi_2(y)] + A_{\lambda'}$$

gilt. Folglich gibt es zwei Formen $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ in $k[x, y]$, welche dieselben Grade in x und y besitzen und

$$\frac{\Phi_1(\xi, y)}{\Phi_2(\xi, y)} = \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}, \quad [\Gamma_2, \Phi_1(\xi, y)] + G + C^{*\text{②}}(\xi) = [\Gamma_2, \Phi_2(\xi, y)] + A_{\lambda'}$$

erfüllen. Setzt man also

$$C = C^* + \sum_{\rho=1}^r \Gamma_\rho \times (b^{(\rho)}) + [\Gamma_{12}, \Phi_1(x, y)] - [\Gamma_{12}, \Phi_2(x, y)],$$

so liegt C in derselben Restklasse in $\mathfrak{M}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ wie C^* und es gilt

$$(4) \quad C^{\text{②}}(\xi) = A_{\lambda'} = \{\eta^{(\mu)}; \mu=1, \dots, \delta\}.$$

Lässt man aus C irreduzible Korrespondenzen in $\mathfrak{A}_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$ weg und bezeichnet den Rest wieder mit C , so bleibt (4) noch gültig. Da aber $\eta^{(\mu)}$ alle voneinander verschieden sind, so folgt hieraus, dass die Bedingungen i), ii) erfüllt sind. Man bemerke dabei, dass ein $(\xi, \eta^{(\mu)})$ einen allgemeinen Punkt einer in C enthaltenen irreduziblen Korrespondenz darstellt. Spezialisiert man $\eta^{(\mu)}$ ausserdem so, dass $\eta^{(\mu)}$ mit keinem Punkt von $D_j^{\text{②}}(\xi)$ zusammenfällt, so wird auch die Bedingung iii) erfüllt.⁸⁾

Hilfssatz 2. Es sei C bzw. D eine Korrespondenz auf Γ_{12} bzw. Γ_{23} . Wenn C in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ oder D in $\mathfrak{K}(\Gamma_2, \Gamma_3)$ liegt, so liegt $C \times D$ in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_3)$.

Beweis. Man hat offenbar den Satz nur in dem Fall zu beweisen, wo C eine nicht ausgeartete irreduzible Korrespondenz auf Γ_{12} ist und $D = [\Gamma_{23}, g(y, z, v)]$ mit einer geeigneten Form $g(y, z, v)$ gilt. Es sei (ξ, η) ein allgemeiner Punkt

6) Vgl. l.c. 5).

7) $G \equiv F$ bedeutet, dass die Punktgruppen G, F äquivalent sind.

8) Dieser Hilfssatz lässt sich auch arithmetisch beweisen, vgl. M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper II, Crelle's Jour. 183 (1940). Siehe auch eine spätere Abhandlung des Verfassers.

von C und

$$C^{(2)}(\xi) = \{\eta^{(p)}\}, \eta^{(1)} = \eta.$$

$F(\xi, z) = Hg(\eta^{(p)}, z, v')$ ist dann offenbar eine Form in $k(\xi)[z]$. Durch geeignete Normierung von $\eta^{(p)}$ kann man sogar erreichen, dass es in $k[\xi, z]$ liegt. Wie oben oft gezeigt worden ist, gilt dann für $E = [\Gamma_{13}, F(x, z)]$

$$E^{(3)}(\xi) = D^{(3)}(C^{(2)}(\xi)) = (C \times D)^{(3)}(\xi).$$

Nach Satz 1 ist also

$$E \equiv C \times D \pmod{\mathfrak{A}_1(\Gamma_1, \Gamma_3)}.$$

Aus $E \in \mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_3)$ folgt dann $C \times D \in \mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_3)$, wie behauptet wurde.

Wir beweisen nun den folgenden wichtigen

Satz 3⁹⁾. Eine Korrespondenz C auf Γ_{12} liegt dann und nur dann in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, wenn für beliebige Punkte a, a' in Γ_1 immer

$$(5) \quad C^{(2)}(a) \equiv C^{(2)}(a')$$

gilt. Man sagt in diesem Fall, dass C die Wertigkeit Null besitzt¹⁰⁾. Es gilt dann für beliebige Punkte b, b' in Γ_2 immer

$$(6) \quad C^{(1)}(b) \equiv C^{(1)}(b').$$

Beweis. Wenn C in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ liegt, so gilt offenbar für beliebige Punkte a, a' in Γ_1

$$C^{(2)}(a) = C^{(2)}(a')$$

und wenn $C = [\Gamma_{12}, f(x, y, w')]$ ist, so ist

$$C^{(2)}(a) = [\Gamma_2, f(a, y, w')] \equiv [\Gamma_2, f(a', y, w')] = C^{(2)}(a')$$

Daraus folgt, dass (5) für eine beliebige Korrespondenz in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ gilt. Nun sei umgekehrt C eine Korrespondenz in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, für welche (5) gilt. Nach dem eben Bewiesenen kann man C durch eine andere Korrespondenz ersetzen, welche in der Restklasse von C in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ liegt, ohne die Gültigkeit von (5) zu verletzen. Nach Hilfssatz 1 können wir also annehmen, dass C die Bedingungen i), ii) in demselben Hilfssatz erfüllt. Nun gibt es nach (5) eine Schar $G(\lambda, y) = \lambda_0 g_0(y) + \lambda_1 g_1(y) + \dots + \lambda_r g_r(y)$ über k , so dass für einen beliebigen in k liegenden Punkt a auf Γ_1 immer

$$(7) \quad C^{(2)}(a) + B = [\Gamma_2, G(\lambda(a), y)], \quad B = \{b^{(\mu)}; \mu = 1, \dots, \beta\}$$

9) Dieser Satz entspricht Satz 8, $\bar{8}$ in M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I, Crelle's Jour. 177 (1937). Deuring hat diesen Satz aus seiner Sätzen 7, $\bar{7}$ abgeleitet, welche eine Verallgemeinerung des klassischen Additionstheorems (nebst Umkehrung) bilden. Man sieht aber leicht, dass auch umgekehrt das Additionstheorem nebst Umkehrung (Satz 7, $\bar{7}$) sich aus unserem Satz 3 unmittelbar ableiten lässt. Der Zusammenhang der Deuring'schen arithmetischen Theorie mit unserer geometrischen Theorie soll in einer späteren Abhandlung ausführlich dargestellt werden.

10) Vgl. z.B. Severi-Löffler, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Berlin (1921), S. 162. Allgemeine Wertigkeitskorrespondenzen werden wir nachher untersuchen.

gilt, wobei $\lambda(a)$ eine geeignete Spezialisierung von λ und B eine feste Punktgruppe in k ist. Da aber die Dimension einer Vollscher bei der Körpererweiterung $k(\xi)/k$ des Grundkörpers k invariant bleibt, so gilt (7) auch für einen allgemeinen Punkt ξ von F_1 . Setzt man also

$$C^{(\xi)}(\xi) = \{\eta^{(\rho)}; \rho=1, \dots, \alpha\},$$

so besitzt das lineare Gleichungssystem

$$(8) \quad G(\lambda(\xi), \eta^{(\rho)}) = \lambda_0(\xi)g_0(\eta^{(\rho)}) + \lambda_1(\xi)g_1(\eta^{(\rho)}) + \dots + \lambda_r(\xi)g_r(\eta^{(\rho)}), \\ \rho=1, \dots, \alpha$$

mindestens eine nicht triviale Lösung $\lambda(\xi) = (\lambda_0(\xi), \lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi))$ in $K = k(\xi, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(\alpha)})$. Nach Voraussetzung ist K eine separable galoissche Erweiterung von $k(\xi)$ und das Gleichungssystem (8) ist ersichtlich invariant gegenüber den Galoisautomorphismen von $K/k(\xi)$. Durch Spurbildung kann man also eine Lösung in $k(\xi)$ erhalten. Es gibt also Formen $\lambda(x) = (\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_r(x))$ in $k[x]$, so dass $G(\lambda(x), y)$ für $x = \xi, y = \eta^{(\rho)}$ verschwindet und

$$C^{(\xi)}(\xi) + D^{(\xi)}(\xi) = [\Gamma_2, G(\lambda(\xi), y)] \text{ mit } D = \Sigma \Gamma_1 \times (b^{(a)})$$

gilt. Daraus sieht man sofort, dass C mit $[\Gamma_2, G(\lambda(x), y)]$ bis auf Korrespondenzen in $\mathfrak{A}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ übereinstimmt, folglich in $\mathfrak{K}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ liegt, w.z.b.w.

Nun seien Γ_1, Γ_2 birational äquivalent. Wir können also annehmen,

$$P_1 = P_m, \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma.$$

Wendet man nun Satz 2 auf $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$ an, so sieht man sofort, dass $\mathfrak{G}(\Gamma, \Gamma)$ in diesem Fall einen Ring bildet: den "Korrespondenzenring" $\mathfrak{G}(\Gamma)$ von Γ . Es ist auch leicht zu sehen, dass $\mathfrak{G}(\Gamma) = \mathfrak{G}(\Gamma, \Gamma)$ einen Teilring und $\mathfrak{A}(\Gamma) = \mathfrak{A}(\Gamma_1, \Gamma)$, $\mathfrak{A}_1(\Gamma) = \mathfrak{A}_1(\Gamma_1, \Gamma)$, $\mathfrak{A}_2(\Gamma) = \mathfrak{A}_2(\Gamma_1, \Gamma)$ sogar Ideale in $\mathfrak{G}(\Gamma)$ bilden. Es gilt dann z.B.

$$\mathfrak{G}(\Gamma)/\mathfrak{A}(\Gamma) \cong \mathfrak{G}(\Gamma).$$

Aus Hilfssatz 2 folgt ferner, dass $\mathfrak{K}(\Gamma) = \mathfrak{K}(\Gamma, \Gamma)$ auch ein Ideal von $\mathfrak{G}(\Gamma)$ ist. Der Restklassenring $\mathfrak{R}(\Gamma) = \mathfrak{R}(\Gamma, \Gamma)$ nach diesem Ideal nennt man den "Multiplikatorenring" von Γ . $\mathfrak{R}(\Gamma)$ oder allgemeiner $\mathfrak{R}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ bildet eine Verallgemeinerung des Rings oder Moduls der klassischen komplexen Multiplikationen von Γ oder von Γ_1, Γ_2 ¹¹⁾. Die Struktur von $\mathfrak{R}(\Gamma)$ soll in einer späteren Arbeit ausführlich untersucht werden.

11) Vgl. M. Deuring, l.c. 9)