

## 59. Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes (II).

Von Ken-iti KOSEKI.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Kyoto.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1945.)

Als Phragmén'scher Satz<sup>1)</sup> ist es wohl bekannt, dass eine diskontinuierliche Menge<sup>2)</sup> nicht die Ebene zerschneidet.<sup>3)</sup> Aber andererseits, dafür, dass ein beschränktes und keine innere Punkte enthaltendes Kontinuum  $r$  die Ebene zerschneidet, ist es notwendig und hinreichend, dass  $r$  als Teilmenge eine gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete enthält. Hierbei natürliche steht die Struktur solcher gemeinsamen Begrenzung zweier Gebiete im Frage Die Ähnlichkeit solcher Menge mit einfach geschlossener Jordan-Kurve wurde von C. Kuratowski<sup>4)</sup> erörtert.

Im ersten Paragraphen dieser Note will ich die notwendige und hinreichende Bedingung aufstellen dafür, dass die gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete nicht „monostatique“<sup>5)</sup> ist. Im zweiten Paragraphen dieser Note will ich meine Untersuchungen über allseitige Erreichbarkeit für solcher Begrenzung nachrichten.

### § 1

Definition: Ein in einem Gebiete  $\mathfrak{G}$  verlaufender Streckenzug  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) heißt ein allgemeiner Querschnitt von  $\mathfrak{G}$ , wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n A_{n+1}}$  und  $\limsup_{n \rightarrow -\infty} \overline{A_n A_{n+1}}$  ganz zu der Begrenzung von  $\mathfrak{G}$  gehören. Wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n A_{n+1}}$  aus nur einem einzigen Punkte besteht, und wenn dasselbe gilt für  $\limsup_{n \rightarrow -\infty} \overline{A_n A_{n+1}}$  dann die allgemeine Querschnitt  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) heißt besonders ein Querschnitt von  $\mathfrak{G}$ .

Satz I. Sei  $\mathfrak{G}$  ein beschränktes Gebiet und sei  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) ein allgemeiner Querschnitt von  $\mathfrak{G}$ , dann muß die Menge der nicht zu  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) gehörenden Häufungspunkte von  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ein Kontinuum sein. Dasselbe gilt für  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n = -1, -2, \dots$ )

1) E. Phragmén. Über Die Begrenzungen Von Continua. Act, Math. 7. (1885).

2) Eine Menge heisst diskontinuierlich, wenn sie kein Kontinuum als Teilmenge enthält.

3) Eine Menge  $\alpha$  heisst ein Schnitt der Ebene, wenn die Komplementärmenge von  $\alpha$  nicht zusammenhängend ist.

4) C. Kuratowski. Sur la structure des frontières communes à deux régions. Fund. Math. 12. (1918).

5) C. Kuratowski. a.a.o.

6) K. Koseki. Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes. Proc. 20. (1944).

Satz II. Sei  $\mathcal{G}$  ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet, so zerlegt jeder allgemeine Querschnitt  $q$  des Gebietes  $\mathcal{G}$  das ganze Gebiet  $\mathcal{G}$  in zwei einfach zusammenhängende Gebiete  $\mathcal{G}'$  und  $\mathcal{G}''$ , und es gilt die Beziehung  $\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' + q$ .

Satz III. Sei  $\mathcal{G}$  ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet und sei  $r$  die Begrenzung von  $\mathcal{G}$ . Sei  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ein allgemeiner Querschnitt von  $\mathcal{G}$  derart, dass für die beiden Strecke-Folgen  $\{\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) $\}$  und  $\{\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n=-1, -2, \dots$ ) $\}$   $\limsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n A_{n+1}}$  und  $\limsup_{n \rightarrow -\infty} \overline{A_n A_{n+1}}$  in voneinander verschiedenen Primenden<sup>7)</sup> von  $\mathcal{G}$  enthalten sind, so bildet die Gesamtheit aller Primenden von  $\mathcal{G}$ , die zu einem der beiden, durch den allgemeinen Querschnitt  $\overline{A_n A_{n+1}}$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) bestimmten, Teilgebiete gehören, ein offenes Intervall<sup>8)</sup> von Primenden.

Definition: Ein Primende, das nur einfache Punkte enthält, heisst einfaches Primende. Ein Primende, das mindestens einen mehrfachen Punkt enthält, heisst mehrfaches Primende.

Satz IV. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$  und sei das Gebiet  $\mathcal{G}$  beschränkt. Wenn die zwei voneinander verschiedenen Primenden  $E_g$  und  $E_{g'}$  vom Gebiete  $\mathcal{G}$  mindestens einen Punkt von  $r$  gemeinsam enthalten, dann muß eines von den beiden durch  $E_g$  und  $E_{g'}$  bestimmten offenen Intervallen aus nur mehrfachen Primenden bestehen.

Für Beweisführung dieses Satzes habe ich Satz III und A. Rosenthalschen<sup>9)</sup> Satz benutzt.

Satz V. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$ , und sei das Gebiet  $\mathcal{G}$  beschränkt. Wenn es mehr als abzählbar viele einfache Primenden von  $\mathcal{G}$  gibt, dann läßt sich die Begrenzung  $r$  in „Tranches“<sup>10)</sup> zyklisch zerlegen.

Beweis. 1. Schritt: Nach C. Carathéodory gibt es eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Primenden des Gebietes  $\mathcal{G}$  auf die Punkte einer Kreisperipherie  $k$ . Es sei  $K$  ein Punkt auf  $k$ .  $K'$  sei ein Punkt auf  $k$  derart, daß im Kreisbogen  $\widehat{K'K}$  es höchstens abzählbar viele Punkte gibt, die den ein-

7) C. Carathéodory. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. 73. (1913).

8) Nach den Untersuchungen von C. Carathéodory, kann man alle Primenden des Gebietes  $\mathcal{G}$  umkehrbar eindeutig und stetig auf alle Punkte einer Kreisperipherie  $k$  abbilden. Dabei soll die Gesamtheit aller Primenden, die den Punkten eines Kreisbogens auf  $k$  entsprechen, ein Intervall der Primenden genannt werden.

9) A. Rosenthal. Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua. Sgb. Bay. Ak. Wiss. (1919).

10) C. Kuratowski. a.a.o.

fachen Primenden entsprechen, wobei im Kreisbogen  $\overleftarrow{K'K}$  der Punkt  $K'$  für den Punkt  $K$  im positiven Sinne liegt. Nun, da es eine einzige bestimmte obere Grenze der Menge vom solchen Punkte  $K'$  gibt, bezeichne ich diese obere Grenze mit  $K_1$ .<sup>11)</sup> Zweitens sei  $K''$  ein Punkt auf  $k$  derart, dass im Kreisbogen  $\overleftarrow{KK''}$  es höchstens abzählbar viele Punkte gibt, die den einfachen Primenden entsprechen, wobei im Kreisbogen  $\overleftarrow{KK''}$  der Punkt  $K''$  für den Punkt  $K$  im negativen Sinne liegt. Die untere Grenze der Menge vom solchen Punkte  $K''$  bezeichne ich mit  $K_2$ . Den Kreisbogen  $\overleftarrow{K_2K} + \overleftarrow{KK_1}$  bezeichne ich fortan als das fundamentale Intervall, dem der Punkt  $K$  angehört.<sup>12)</sup> Also jedem Punkt auf  $k$  entspricht ein fundamentales Intervall.

2. Schritt:  $A$  und  $B$  seien zwei Punkte auf  $k$ , und  $\overleftarrow{A_2A_1}$  und  $\overleftarrow{B_2B_1}$  seien die fundamentalen Intervalle, jedem von denen jeder von beiden Punkten  $A$  und  $B$  angehört. Dann müssen  $\overleftarrow{A_2A_1}$  und  $\overleftarrow{B_2B_1}$  miteinander identisch oder zueinander punktfremd sein.

3. Schritt: Von nun an bezeichne ich die Menge der Primenden von  $\mathfrak{G}$ , die einem fundamentalen Intervalle des Kreises  $k$  entsprechen, als fundamentales Intervall der Primenden von  $\mathfrak{G}$ .  $l$  sei ein fundamentales Intervall der Primenden und  $E_z$  sei irgendein Primende von  $l$ .  $m_z$  sei die Menge der in  $E_z$  enthaltenen Punkte und  $v$  sei die Vereinigung aller Mengen  $m_z$ , dann muss  $v$  ein Kontinuum sein.

4. Schritt: Zwei fundamentale Intervalle der Primenden, die den voneinander verschiedenen fundamentalen Intervallen des Kreises  $k$  entsprechen, können keine Punkte gemeinsam enthalten.

5. Schritt: Seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte der Kreisperipherie  $k$ , und seien  $a$  und  $b$  in den voneinander verschiedenen fundamentalen Intervallen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $k$  enthalten. Seien  $l$  und  $l'$  die beiden durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  bestimmten Intervalle von  $k$ . Dabei nehme ich an, dass auf  $l$  ein Punkt von dem Punkte  $A$  aus nach dem Punkte  $B$  im positiven Sinne läuft.

Wir führen nun folgende Relation zwischen den Punkten von  $l$  ein: Seien  $P$  und  $Q$  zwei Punkte von  $l$  und der Teilbogen  $\overleftarrow{PA}$  von  $\overleftarrow{AB}$  sei in dem Teilbogen  $\overleftarrow{QA}$  von  $\overleftarrow{AB}$  enthalten, dann sagen wir:  $P$  steht vor  $Q$ ,  $Q$  steht nach  $P$ , und schreiben wir

$$P \prec Q, Q \succ P$$

Ebenfalls führen wir folgende Relation zwischen den fundamentalen Inter-

11)  $K_1$  mag mit  $K$  übereinstimmen.

12)  $\overleftarrow{K_2K} + \overleftarrow{KK_1}$  mag mit  $K$  übereinstimmen.

vallen ein, die in  $l$  enthalten sind: Seien  $m$  und  $m'$  zwei fundamentalen Intervalle und ein Punkt von  $m$  stehe vor einem Punkt von  $m'$ , dann sagen wir:  $m$  steht vor  $m'$ ,  $m'$  steht nach  $m$ , und schreiben wir

$$m < m', \quad m' > m.$$

Fundamentales Intervall  $a$  steht vor den allen übrigen fundamentalen Intervallen und  $b$  steht nach den übrigen.

Die Beziehung  $<$  ist transitiv, d.h., wenn fundamentales Intervall  $l <$  fundamentalem Intervalle  $m$ ,  $m <$  fundamentalem Intervalle  $n$ , so ist  $l <$   $n$ .

Also bildet die Menge der fundamentalen Intervalle in  $l$ — $a$  und  $b$  eingeschlossen—eine geordnete Menge.  $a$  ist das erste Element und  $b$  ist das letzte Element. Diese Menge bezeichne ich mit  $G$ .

6. Schritt: In der im obigen gebildeten geordneten Menge, wenn  $l$  und  $m$  zwei verschiedene fundamentale Intervalle sind und  $l <$   $m$  ist, dann gibt es ein fundamentales Intervall  $n$  derart, dass  $l <$   $n <$   $m$  ist.

7. Schritt: Wir definieren in üblicher Weise als Schnitt in  $G$  eine Einteilung sämtlicher fundamentaler Intervalle von  $G$  in zwei nicht leeren Klassen, eine Oberklasse und eine Unterklasse, wobei jedes fundamentale Intervall der Unterklasse vor jedem fundamentalen Intervall der Oberklasse liegt. Wenn ein Schnitt in  $G$  gegeben ist, so gibt es entweder in der Unterklasse ein letztes oder in der Oberklasse ein erstes Element.

8. Schritt: Es gibt eine abgeschlossene Menge  $l_1, l_2, \dots$  von  $G$ , so dass zwischen je zwei fundamentalen Intervallen von  $G$  mindestens eines unserer fundamentalen Intervalle  $l_n$  liegt.

9. Schritt: Wir führen nun für die Menge  $G$  den Grenzbegriff ein durch folgende Definition:

Sei  $\{l_\nu\}$  eine Folge von fundamentalen Intervallen in  $G$  und  $m$  ein fundamentales Intervall in  $G$ , dann schreiben wir

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = m$$

und sagen wir, Folge  $\{l_\nu\}$  konvergiere gegen  $m$ , wenn für jedes fundamentale Intervall  $n$  vor  $m$  gilt:

$$n \text{ steht vor } l_\nu \text{ für fast alle } \nu.$$

und für jedes fundamentale Intervall  $p$  nach  $m$  gilt:

$$l_\nu \text{ steht vor } p \text{ für fast alle } \nu$$

Alsdann, nach den Schritten 6, 7 und 8, kann man umkehrbar eindeutig und stetig alle Elemente von  $G$  auf die Punkte der Strecke  $0 \leq t \leq 1$  abbilden.

In ganz analoger Weise kann man umkehrbar eindeutig und stetig alle

fundamentale Intervalle, die in  $l'$  enthalten sind, — fundamentale Intervalle  $a$  und  $b$  eingeschlossen — auf die Punkte der Strecke  $0 \leq s \leq 1$  abbilden.

Folglich schliesslich kann man umkehrbar eindeutig und stetig alle fundamentale Intervalle von  $k$  auf die Punkte einer Kreisperipherie abbilden.

Da die Menge aller fundamentalen Intervalle der Primenden von  $\mathcal{G}$  der Menge aller fundamentalen Intervalle von  $k$  umkehrbar eindeutig entsprechend ist, kann man umkehrbar eindeutig und stetig alle fundamentale Intervalle der Primenden von  $\mathcal{G}$  auf die Punkte einer Kreisperipherie abbilden.

10. Schritt: Wie in dem 9 Schritte gezeigt worden ist, kann man umkehrbar eindeutig und stetig alle fundamentalen Intervalle der Primenden von  $\mathcal{G}$  auf die Punkte einer Kreisperipherie  $k$  abbilden. Nun bezeichne ich einen Punkt von  $k$  mit  $x$  und das dem Punkte  $x$  entsprechende fundamentale Intervall der Primenden mit  $t_x$ . Dann aus der Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  folgt die Beziehung  $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_{x_n} < t_{x_0}$  folgt. Also lässt  $r$  sich in „Tranches“ zyklisch zerlegen.

Die Umkehrung des Satzes V auch gilt.

Satz VI. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$ , und sei das Gebiet  $\mathcal{G}$  beschränkt. Wenn  $r$  sich in „Tranches“ zyklisch zerlegen lässt, dann gibt es in der Menge der Primenden von  $\mathcal{G}$  mehr als abzählbar viele einfache Primenden.

Beweis. Nach Voraussetzung lässt sich  $r$  zerlegen, so dass  $r = \sum t_x$  ist. Dabei bedeutet  $t_x$  ein „Tranche“, und Suffix  $x$  durchschreitet eine Kreisperipherie  $k$ , und aus der Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  folgt die Beziehung  $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_{x_n} \leq t_{x_0}$

1. Schritt: Ein Intervall der „Tranches“  $\sum_{\alpha \leq x \leq \beta} t_x$  bildet ein Kontinuum.

2. Schritt: Ein Häufungskontinuum<sup>13)</sup> in  $r$  ist nur in einem „Tranche“ enthalten<sup>14)</sup>.

3. Schritt: Alle Punkte, die in demselben Primende enthalten sind, müssen nur in einem „Tranche“ enthalten sein.

4. Schritt:  $t_x$  sei ein „Tranche“, das die im mehrfachen Primende  $E_m$  enthaltenen Punkte enthält. Dann enthält  $E_m$  mindestens einen mehrfachen Punkt  $P$ . Da  $P$  ein mehrfacher Punkt ist, ist der Punkt  $P$  in einem von  $E_m$  verschiedenen Primende  $E_n$  enthalten.

Aus Satze IV folgt ohne weiteres, dass eines von der beiden durch  $E_m$  und  $E_n$  bestimmten offenen Intervallen von Primenden nur die Punkte enthält, die in „Tranche“  $t_x$  enthalten sind. Daher, wenn ein „Tranche“  $t_x$  die im mehrfachen

13) Ein Teilkontinuum  $r_1$  von  $r$  heisst Häufungskontinuum in  $r$ , wenn  $r - r_1$  in  $r$  dicht ist.

14) C. Kuratowski. a.a.o.

Primende enthaltenen Punkte enthält, dann muss  $t_x$  alle Punkte enthalten, die in einem abgeschlossenen Intervalle der Primenden enthalten sind.

Nun aber, da es höchstens abzählbar viele zueinander punktfremde Intervalle der Primenden gibt, ausser höchstens abzählbar viele „Tranches“ enthalten keine „Tranches“ die in einem mehrfachen Primende enthaltenen Punkte. Daher gibt es mehr als abzählbar viele einfache Primenden von  $\mathfrak{G}$ , wie behauptet.

Satz VII. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$ , und sei das Gebiet  $\mathfrak{G}$  beschränkt. Dann, dafür, dass ein „Tranche“ ein „Tranche fundamentale“ ist, ist es notwendig und hinreichend, dass es höchstens abzählbar viele einfache Primende von  $\mathfrak{G}$  gibt, in welchen enthaltene Punkte auch in  $t_x$  enthalten sind.

Aus Sätzen V und VI folgt der folgende Hauptsatz.

Satz VIII. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$ , und das Gebiet  $\mathfrak{G}$  beschränkt. Dafür, dass  $r$  nicht „monostratique“ ist, ist es notwendig und hinreichend, dass es mehr als abzählbar viele einfache Primenden von  $\mathfrak{G}$  gibt.

## § 2

Satz IX. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$ . Wenn  $r$  sich in „Tranches“ zyklisch zerlegen lässt, dann gibt es höchstens abzählbar viele „Tranches“, die mehr als einen Punkt enthalten, der von  $\mathfrak{G}$  aus erreichbar ist. Dasselbe gilt für  $\mathfrak{G}'$ .

Satz X. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$ . Lässt  $r$  sich in „Tranches“ zyklisch zerlegen derart, dass  $r = \Sigma t_x$  ist, dann, wenn ein „Tranche“  $t_p$  nur einen einzigen von  $\mathfrak{G}$  aus erreichbaren Punkt  $P$  enthält, ist der Punkt  $P$  allseitig erreichbar von  $\mathfrak{G}$  aus. Dasselbe gilt für  $\mathfrak{G}'$ .

Beweis. Sei  $q$  ein beliebiger Querschnitt von  $\mathfrak{G}$ , der zwei Punkte  $A$  und  $B$  von  $r$  verbindet. Durch  $q$  wird das Gebiet  $\mathfrak{G}$  in zwei Teilgebieten  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  zerlegt. Hierbei unterscheide ich zwei Fälle.

1. Fall: Weder  $A$  noch  $B$  ist mit  $P$  identisch. In diesem Falle, wenn ich das  $A$  enthaltende „Tranche“ mit  $t_a$  und das  $B$  enthaltende „Tranche“ mit  $t_b$  bezeichne, so nach Voraussetzung, ist weder  $t_a$  noch  $t_b$  mit  $t_p$  identisch.

Nun hat eines von beiden  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$ , etwa  $\mathfrak{G}_1$ , als Begrenzung den Querschnitt  $q$  und eine Teilmenge des Kontinuums  $\Sigma t_r$   $_{b \leq r \leq a}$  und das andere  $\mathfrak{G}_2$  hat als Begrenzung den Querschnitt  $q$  und eine Teilmenge des Kontinuums  $\Sigma t_r$   $_{a \leq r \leq b}$ .

Nun sei gesetzt, dass  $b < p < a$  ist, dann muss der Punkt  $P$  in der Begrenzung von  $\mathfrak{G}_1$  und nicht in der Begrenzung von  $\mathfrak{G}_2$  enthalten sein. Da der Punkt

$P$  erreichbar von  $\mathcal{G}$  aus ist, ist der Punkt  $P$  erreichbar von  $\mathcal{G}_1$  aus.

2. Fall: Entweder  $A$  oder  $B$ , etwa  $A$ , ist mit  $P$  identisch. • In diesem Falle ist  $P$  der gemeinsame Grenzpunkt zweier Gebiete  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$ . Der Punkt  $P$  ist erreichbar sowohl von  $\mathcal{G}_1$  aus als von  $\mathcal{G}_2$  aus. Aus Sätzen IX und X folgt ohne weiteres

Satz XI. Sei  $r$  die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}'$ . Lässt  $r$  sich in „Tranches“ zyklisch zerlegen, dann, wenn es mehr als abzählbar viele „Tranches“ gibt, welche die von  $\mathcal{G}$  aus erreichbaren Punkte enthalten, so gibt es in  $r$  mehr als abzählbar viele Punkte, die von  $\mathcal{G}$  aus allseitig erreichbar sind.