56. *Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete, IV.*

Von Yûsaku KOMATU.
Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1945.)

C. Extremaleigenschaften und Verzerrungen.

1. *Extremalität der Kreisbogenschlitzabbildung.*

WIR beginnen in der vorliegenden Note[1] mit einem Problem über Verzerrungen betreffs der gegenseitigen Lagebeziehungen zwischen Pol und Nullstelle sowie den Randkomponenten des Bildgebiets für eine gewisse Klasse von den in einem konzentrischen Kreisringe meromorphen Funktionen.[2] In den folgenden Überlegungen wird die Annahme der Regularität auf den Randperipherien für betreffende Funktionen bisweilen, aber lediglich, der eventuellen Einfachheit halber, gemacht. Sie läßt sich, wie man leicht übersehen kann, zwar wegfallen oder wenigstens durch eine weit schwächere ersetzen.

Satz 1. *Es sei $\Omega(z)$ eine im Kreisringe $(0\leqq)q\leqq|z|\leqq 1$ meromorphe Funktion, die daselbst, abgesehen von einem einfachen Pol z_∞ und einer einfachen Nullstelle z_0, regulär und nullstellenfrei sei. Sie braucht nicht notwendig dort schlicht zu sein, aber ihre Umlaufszahl um jede der Randkomponenten verschwinde.*[3] *Man setze ferner*

$$\operatorname{Max}|\Omega(z)|=\begin{cases} m_0^* & (|z|=q), \\ m_1^* & (|z|=1) \end{cases} \quad \text{und} \quad \operatorname{Min}|\Omega(z)|=\begin{cases} m_{*0} & (|z|=q), \\ m_{*1} & (|z|=1). \end{cases}$$

Für jede solche Funktion $\Omega(z)$ gelten dann stets die Ungleichungen

$$\frac{m_{*1}}{m_0^*}\leqq\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|\leqq\frac{m_1^*}{m_{*0}};$$

sogar tritt jedes Gleichheitszeichen hierbei nur dann, wenn die betreffende Funktion $\Omega(z)$, abgesehen von nur einem konstanten Faktor, mit der in **A**, *§ 2 bis § 4 betrachteten, Kreisbogenschlitzabbildung von $q<|z|<1$ vermittelnden Funktion $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$ übereinstimmt.*

Beweis. Es sei zuerst $q>0$. Wegen der Regularität nebst der Nullstel-

1) Die früheren Noten unter demselben Titel finden sich in I. Proc. **21** (1945), 285; II. Ibid. 296; III. Ibid. 337.

2) Über verwandte Eigenschaft für Parallelschlitzabbildung vgl. man: Y. Komatu, Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten. Proc. **21** (1945), 1–5.

3) Diese letztgenannte Bedingung ist aber beim ausgearteten Falle $q=0$ überflüssig, denn sie ist dann notwendigerweise erfüllt.

lenfreiheit sowie des Verschwindens sämtlicher Umlaufszahlen von $\dfrac{\Omega(z)}{\omega_k(z)}$ $(\omega_k(z) \equiv \omega_k(z; z_\infty, z_0))$ verhält sich jeder Zweig von $\lg \dfrac{\Omega(z)}{\omega_k(z)}$ in $q < |z| < 1$ regulär und sogar eindeutig. Demnach muß sie der Monodromiebedingung

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(e^{i\theta})}{\omega_k(e^{i\theta})}\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(qe^{i\theta})}{\omega_k(qe^{i\theta})}\right| d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(e^{i\theta})}{\Omega(qe^{i\theta})}\right| d\theta - \lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|$$

genügen; denn es gilt für $m_0 \equiv |\omega_k(qe^{i\theta})|$ und $m_1 \equiv |\omega_k(e^{i\theta})|$ eine schon am Ende von **A**, § **2** bemerkte Relation

$$\frac{m_1}{m_0} = \left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|.$$

Somit muß tatsächlich die im Satze behaupteten Ungleichungen bestehen. In bezug auf das Auftreten des Gleichheitszeichens ist es fast klar.

Der ausgeartete Fall $q=0$, d. h. der Fall, wobei die innere Randkomponente $|z| = q$ sich auf einen einzigen Punkt $z=0$ reduziert, läßt sich in ähnlicher Weise erledigen; dabei hat man natürlich $m_0^* = m_{*0} = |\Omega(0)|$ gesetzt zu denken. Die Funktion $\omega_k(z)$, welche für diesmal am Punkte $z=0$ nur eine hebbare Singularität aufweist und den vollen Einheitskreis $|z| < 1$ auf ein einfach zusammenhängendes Kreisbogenschlitzgebiet um den Ursprung derart abbildet, daß z_∞ und z_0 in ∞ bzw. 0 übergehen, stellt sich, wie auch in **B**, § **2** angegeben wurde, in der Gestalt

$$\omega_k(z) = c\frac{z-z_0}{z_\infty - z}\,\frac{1-\bar z_\infty z}{1-\bar z_0 z}$$

dar mit einer Konstante c. Sodann erhalten wir nämlich mittels des Gaußischen Mittelwertsatzes, angewandt auf die in $|z| < 1$ regulär harmonische Funktion $\lg\left|\dfrac{\Omega(z)}{\omega_k(z)}\right|$, die Beziehungen

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(e^{i\theta})}{\omega_k(e^{i\theta})}\right| d\theta - \lg\left|\frac{\Omega(0)}{\omega_k(0)}\right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(e^{i\theta})}{\Omega(0)}\right| d\theta - \lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{e^{i\theta}-z_0}{z_\infty - e^{i\theta}}\,\frac{1-\bar z_\infty e^{i\theta}}{1-\bar z_0 e^{i\theta}}\right| d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(e^{i\theta})}{\Omega(0)}\right| d\theta - \lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|,$$

woraus die Behauptung wieder ohne weiteres folgt.

Nun sollen wir uns auf einen zur konformen Charakterisierung der Kreisbogenschlitzgebiete dienenden Satz aufmerksam machen, der wirklich eine fast unmittelbare Folgerung aus dem soeben angegebenen Satze 1 ist.

Satz 2. *Gegeben sei ein beliebiges, in der w-Ebene gelegenes, zweifach zusammenhängendes Ringgebiet Δ, das beide Punkte $w=\infty$ und $w=0$ sicher im Inneren enthalte, und dessen Randkomponenten wir mit Γ_0 und Γ_1 bezeichnen sollen. Wir setzen darauf*

$$\operatorname*{Max}_{w_j\in\Gamma_j}|w|=m_j^* \quad \textit{und} \quad \operatorname*{Man}_{w\in\Gamma_j}|w|=m_{*j} \qquad (j=0,1).$$

Ferner sei D_k ein in der ω-Ebene liegendes, mit Δ konform (bei jeder beide Punkte ∞ und 0 fixierenden Abbildung) äquivalentes Kreisbogenschlitzgebiet, dessen beide zu Γ_0 und Γ_1 entsprechenden Randschlitzbogen auf $|\omega|=m_0$ bzw. $|\omega|=m_1$ liegen sollen. Dann gelten stets die Ungleichung

$$\frac{m_{*1}}{m_0^*}\leqq\frac{m_1}{m_0}\leqq\frac{m_1^*}{m_{*0}}.$$

Hierbei tritt jedes Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn das gegebene Gebiet Δ selbst von derselben Gestalt wie D_k ist, d. i. aus D_k durch eine Drehstreckung um den Ursprung entsteht.

Beweis. Wegen der üblichen Normalfamiliebetrachtungen bei Approximation für Δ können und wollen wir hier wiederum annehmen, daß das vorgegebene Ringgebiet Δ analytisch begrenzt ist. Sein konformer Modul sei $\lg\frac{1}{q}$, und eine ihm zugehörige Abbildungsfunktion von R: $q<|z|<1$, die $|z|=q$ und $|z|=1$ zu Γ_0 bzw. Γ_1 entsprechen läßt, sei

$$w=\Omega(z),\quad \Omega(z_\infty)=\infty,\quad \Omega(z_0)=0,$$

worin z_∞ und z_0 beide im Inneren von R enthaltenen Normierungspunkte bedeuten; nebenbei bemerkt bestimmen sich hierbei $|z_\infty|$, $|z_0|$, und $\arg\frac{z_\infty}{z_0}$ (mod. 2π) für Δ eindeutigerweise, und diese Abbildungsfunktion hängt im wesentlichen von nur einen einzigen reellen Parameter, etwa $\arg z_\infty$ oder $\arg z_0$, ab. Nun gelten nach dem Satze 1 jedenfalls die Ungleichungen

$$\frac{m_{*1}}{m_0^*}\leqq\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|\leqq\frac{m_1^*}{m_{*0}},$$

und jedes Gleichheitszeichen tritt hierbei nur dann auf, wenn Δ selbst dieselbe Gestalt wie ein Kreisbogenschlitzgebiet D_k besitzt. Andererseits definieren wir nun im Gebiete Δ eine Funktion $F(w)$ mittels einer Beziehung

$$\omega_k(z;z_\infty,z_0)=cF(\Omega(z)),$$

worin c irgendeine nötigenfalls geeignet wählbare Konstante ist, so bildet diese

Funktioh $\omega=F(w)$ das Gebiet $\varDelta$ auf ein Kreisbogenschlitzgebiet D_k ab, genügt sogar den Normierungsbedingungen $F(\infty)=\infty$ und $F(0)=0$, reduziert sich also nur beim eben genannten extremen Falle auf eine Drehstreckung um den Ursprung. Für die zusammengesetzte, eine Kreisbogenschlitzabbildung von R vermittelnde Funktion $\omega=\omega_k(z; z_\infty, z_0)$ gilt nun eine auch bei der Beweisführung des Satzes 1 benutzte Relation $\frac{m_1}{m_0}=\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|$, woraus der Satz ohne weiteres folgt.

Wie schon erwähnt wurde, kann man den soeben bewiesenen Satz verwenden, etwa um die Kreisbogenschlitzabbildung eines beliebig vogegebenen Ringgebiets zu charakterisieren. Man kann in der Tat den folgenden Satz sofort entnehmen:

Satz 3. *Dem Satze 2 in Bezeichnungen nachfolgend, läßt sich die Abbildungsfunktion von einem gegebenen Ringgebiet $\varDelta$ auf ein damit konform äquivalentes Kreisbogenschlitzgebiet D_k:*

$$\omega=F_k^*(z),\quad F_k^*(\infty)=\infty,\quad F_k^*(0)=0,$$

durch das Extremumproblem

$$\frac{m_1^*}{m_{*0}}=\text{Minimum}\quad \textit{oder}\quad \frac{m_{*1}}{m_0^*}=\text{Maximum},$$

abgesehen nur von einem konstanten Faktor, eindeutigerweise charakterisieren; hierbei sind zum Vergleiche solche in $\varDelta$ schlichte meromorphe Funktionen zugelassen, welche an den Punkten ∞ und 0 die Werte ∞ bzw. 0 nehmen. Man darf sogar die Voraussetzung „Schlichtheit" weglassen, indem man statt deren den Vergleichsfunktionen etwa, dem Satze 1 gemäß, eine Bedingung hinzuauferlegt, daß sie gewisse feste Umgebungen vom unendlichfernen Punkte und vom Koordinatenursprunge gerade einmal bedecken und verschwindende Umlaufszahl um jede Randkomponente besitzen sollen.

2. *Extremalität der Radialschlitzabbildung.*

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Satze besitzen sämtlich die Analoga, wenn wir anstatt der Kreisbogenschlitzabbildung die Radialschlitzabbildung betrachten. Auch die Beweisführungen lassen sich dabei fast wörtlich auf diesen Fall übertragen. Im folgenden sollen wir diese Sätze lauter skizzenweise aussprechen.

Satz 4. *Für eine im Satze 2 betrachtete Funktion $\Omega(z)$ seien für diesmal*[4]

4) Hierbei und im folgenden sollen die Zweige der Argumente jeweilig geeignet gewahlt werden.

$$\operatorname{Max}\arg \Omega(z)=\begin{cases}\chi_0^* & (|z|=q),\\ \chi_1^* & (|z|=1)\end{cases} \quad \textit{und} \quad \operatorname{Min}\arg \Omega(z)=\begin{cases}\chi_{*0} & (|z|=q),\\ \chi_{*1} & (|z|=1).\end{cases}$$

Dann gelten die Ungleichungen

$$\chi_{*1}-\chi_0^* \leqq \arg\frac{z_\infty}{z_0} \leqq \chi_1^*-\chi_{*0},$$

worin jedes Gleichheitszeichen nur dann auftritt, wenn die betreffenden Funktion $\Omega(z)$ bis auf einen konstanten Faktor mit der in **A**, § 5 *u.* § 6 *behandelten Radialschlitzabbildungsfunktion $\omega_r(z;z_\infty,z_0)$ ident sch ist.*

Satz 5. *Für ein im Satze* 2 *genanntes Grundgebiet Δ setze man*

$$\operatorname{Max}\arg w=\chi_j^* \quad \textit{und} \quad \operatorname{Min}\arg w=\chi_{*j} \qquad (j=0,1)$$

Ferner sei jetzt D_r ein mit Δ konform (bei Fixierung von ∞ und 0) äquivalentes Radialschlitzgebiet, dessen beide zu Γ_0 und Γ_1 entsprechenden Randschlitze auf $\arg\omega=\chi_0$ *bzw.* $\arg\omega=\chi_1$ *liegen sollen. Dann gelten die Ungleichungen*

$$\chi_{*1}-\chi_0^* \leqq \chi_1-\chi_0 \leqq \chi_1^*-\chi_{*0}$$

und jedes Gleichheitszeichen besteht hierbei nur dann, wenn Δ durch lauter Drehstreckung um den Ursprung aus D_r entstehen kann.

Satz 6. *Die Abbildungsfunktion*

$$w=F_r^*(z), \quad F_r^*(\infty)=\infty, \quad F_r^*(0)=0,$$

von Δ auf D_r läßt sich durch das Extremalproblem

$$\chi_1^*-\chi_{*0}=\text{Minimum} \quad \textit{oder} \quad \chi_{*1}-\chi_0^*=\text{Maximum},$$

abgesehen von nur einem konstanten Faktor, eindeutigerweise charakterisieren; dabei sollen die ***Klasse*** *von. Konkurrenzfunktionen dieselbe sein wie im Satze* 3.

3. *Extremalität sonstiger Spezialabbildungen.*

Wir können auch für verschiedene in **A** betrachtete spezielle Abbildungsfunktionen analoge Extremaleigenschaften wie oben herleiten. Wir sprechen beispielsweise nur den folgenden Satz bezüglich der Abbildung vom Grundgebiete R: $q<|z|<1$ auf ein Kreisinnere mit einem Kreisbogen- oder Radialschlitze aus:[5]

Satz 7. *Eine Funktion $\Omega(z)$ sei in R regulär, verschwinde daselbst außer einer einfachen Nullstelle z_0 $(q<|z_0|<1)$ nirgends, genüge dort $|\Omega(z)|<1$ und führe sogar die äußere Randperipherie $|z|=1$ auf die volle Einheitskreisperipherie. Man setze ferner auf $|z|=q$:*

$$\operatorname{Max}|(\Omega(z)|=m^*[\Omega], \qquad \operatorname{Min}|\Omega(z)|=m_*[\Omega];$$
$$\operatorname{Max}\arg\Omega(z)=\chi^*[\Omega], \qquad \operatorname{Min}\arg\Omega(z)=\chi_*[\Omega].$$

5) Sätze von verwandter Art finden sich mit anderartigen Beweisführungen in den seit um 1928 in *Leipzigen Berichten* hintereinander veröffentlichten Arbeiten von H. Grötzsch.

Dann werden die Variationsprobleme

$$m^*[\Omega] = \text{Minimum} \quad \textit{oder} \quad m_*[\Omega] = \text{Maximum}$$

und

$$\chi^*[\Omega] - \chi_*[\Omega] = \text{Minimum}$$

durch die in **A, § 8** *u.* **§ 9** *betrachteten Funktion* $\omega_b^{(1)}(z;z_0)$ *bzw.* $\omega_s(z;z_0)$ *bis auf einen konstanten Faktor mit dem Absolutbetrag Eins eindeutigerweise gelöst*

Beweis. In bezug auf das letzte Problem ist die Behauptung ganz selbstverständlich. Der übrige Teil des Satzes läßt sich entweder wegen der spiegelbildlichen analytischen Fortsetzbarkeit an der Einheitskreisperipherie der betreffenden Funktionen leicht etwa aus dem Satze 3 folgern. Oder man kann dies auch auf mehr direkte Weise daraus entnehmen, daß die Monodromiebedingung, angewandt auf das Quotient $\dfrac{\Omega(z)}{\omega_b^{(1)}(z;z_0)}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(e^{i\theta})}{\omega_b^{(1)}(e^{i\theta};z_0)}\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left|\frac{\Omega(qe^{i\theta})}{\omega_b^{(1)}(qe^{i\theta};z_0)}\right| d\theta \\ &= \lg|z_0| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|\Omega(qe^{i\theta})|\, d\theta \end{aligned}$$

bestehen muß; denn es gelten hierbei für alle reelle θ: $|\Omega(e^{i\theta})| = |\omega_b^{(1)}(e^{i\theta};z_0)| \equiv 1$ und $|\omega_b^{(1)}(qe^{i\theta};z_0)| \equiv |z_0|$, und daß man demnach die Ungleichungen

$$m^*[\Omega] \geqq |z_0| = |\omega_b^{(1)}(qe^{i\theta};\ z_0)| \geqq m_*[\Omega]$$

erhält, wo jedes Gleichheitszeichen nur bei $\Omega(z) \equiv c\omega_b^{(1)}(z;z_0)$ mit $|c| = 1$ auftritt.