40. *Sur la déformation infinitésimale des sous-espaces dans un espace affine.**

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1945.)

Depuis la publication du Mémoire célèbre de M.T. Levi-Civita sur l'écart géodésique, les déformations infinitésimales des courbes ont été étudiées par MM. J.L. Synge, A.J. MacConnell, V. Hlavatý, H.A. Hayden et E.T. Davies, et généralisées, pour celles des sous-espaces, par MM. E. Bortolotti, J.A. Schouten, A.G. Walker, H.A. Hayden, P. Dienes et E.T. Davies.

D'autre part, les déformations infinitésimales d'un espace lui-même surtout les collinéations affines et projectives ont été étudiées par MM. L.P. Eisenhart, M.S. Knebelman, W. Slebodzinski, D. van Dantzig, E.T. Davies, J.A. Schouten E.R. van Kampen et N. Coburn.

Dans une Note précédente[1] insérée dans ce Proceeding, nous avons donné une methode pour interpréter géométriquement les déformations infinitésimales d'un espace lui-même.

Nous allons donner, dans la présente Note, une autre méthode d'interprétation qui consiste à considérer les déformations infinitésimales tangentielles des sous-espaces dans un espace affine ou métrique et à les regarder comme déformations des espaces eux-mêmes.

Pour la bibliographie, on peut consulter la Note citée ci-dessus du présent auteur.

§ 1. *Les sous-espaces dans un espace affine.*

Soit $\mathfrak{x}$ le vecteur de position dans un espace affine A_m à m dimensions. Un sous-espace A_n à n $(<m)$ dimensions dans A_m se représente par une équation paramétrique de la forme

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(x^i), \qquad (i, j, k, \dots = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{1.1}$$

Si l'on se déplace le long du sous-espace, on aura

$$d\mathfrak{x}=dx^i\mathfrak{x}_i, \tag{1.2}$$

où

* La dépense de cette recherche fut réglée par le frais du Ministère de l'Instruction Publique pour les recherches scientifiques.

(1) K. Yano: Bemerkungen zur infinitesimalen Deformationen eines Raumes. Proc. **21** (1945).

$$\mathfrak{x}_i = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x^i}, \tag{1.3}$$

et les $\mathfrak{x}_i$ sont n vecteurs de A_m tangents à A_n et linéairement indépendants entre eux pourvu que les n paramètres x^i soient essentiels. Cela étant, nous prenons $m-n$ vecteurs $\mathfrak{x}_P$ $(P, Q, R, \ldots = n+1, \ldots, m)$ linéairement indépendants entre eux et de $\mathfrak{x}_i$ et les appelons les pseudonormales du sous-espace. Nous désignerons par A_m^{m-n} l'ensemble des espaces vectoriels definis par $\mathfrak{x}_P$ à chaque point de A_n. Or, m vecteurs $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_P)$ étant linéairement indépendants entre eux, les $\frac{1}{2}n(n+1)$ vecteurs $\mathfrak{x}_{j,k}$ de A_m peuvent se représenter sous la forme

$$\mathfrak{x}_{j,k} = \Gamma^i_{jk}\mathfrak{x}_i + H_{jk}^{\cdot\cdot P}\mathfrak{x}_P, \tag{1.4}$$

où la virgule désigne la dérivée ordinaire par rapport aux paramètres x^k, et, $\mathfrak{x}_{j,k}$ étant symétrique par rapport aux deux indices j et k, Γ^i_{jk} et $H_{jk}^{\cdot\cdot P}$ le sont aussi tous les deux.

Donc, si l'on a un vecteur $v^i\mathfrak{x}_i$ tangent à A_n, on a le long du sous-espace,

$$d(v^i\mathfrak{x}_i) = (dv^i + \Gamma^i_{jk}v^j dx^k)\mathfrak{x}_i + H_{jk}^{\cdot\cdot P}v^j dx^k \mathfrak{x}_P. \tag{1.5}$$

Par conséquent, la projection pseudonormale de $d(v^i\mathfrak{x}_i)$ sur l'espace tangent de A_n est donnée par $\delta v^i\mathfrak{x}_i = (v^i_{;k}dx^k)\mathfrak{x}_i$,

$$\delta v^i = dv^i + \Gamma^i_{jk}v^j dx^k \tag{1.6}$$

étant la différentielle covariante de v^i et

$$v^i_{;k} = v^i_{,k} + \Gamma^i_{jk}v^j \tag{1.7}$$

la derivée covariante de v^i. Nous désignerons ainsi par le point-virgule la derivée covariante par rapport à Γ^i_{jk}. Alors, la formule (1.4) peut être aussi écrite sous la forme

$$\mathfrak{x}_{j;k} = \mathfrak{x}_{j,k} - \Gamma^i_{jk}\mathfrak{x}_i = H_{jk}^{\cdot\cdot P}\mathfrak{x}_P. \tag{1.8}$$

De même, les dérivées $\mathfrak{x}_{P,k}$ de $\mathfrak{x}_P$ se représentent sous la forme

$$\mathfrak{x}_{P,k} = -L^i_{\cdot kP}\mathfrak{x}_i + \Gamma^Q_{Pk}\mathfrak{x}_Q. \tag{1.9}$$

Donc, si l'on a un vecteur $v^P\mathfrak{x}_P$ pseudonormal à A_n, on a, le long du sous-espace,

$$d(v^P\mathfrak{x}_P) = -L^i_{\cdot kP}v^P dx^k\mathfrak{x}_i + (dv^P + \Gamma^P_{Qk}v^Q dx^k)\mathfrak{x}_P. \tag{1.10}$$

Par conséquent, la projection de $d(v^P\mathfrak{x}_P)$ sur l'espace A_m^{m-n} pseudonormal à A_n est donnée par $\delta v^P\mathfrak{x}_P = (v^P_{;k}dx^k)\mathfrak{x}_P$,

$$\delta v^P = dv^P + \Gamma^P_{Qk}v^Q dx^k \tag{1.11}$$

étant la différentielle covariante de v^P et

$$v^P_{;k} = v^P_{,k} + \Gamma^P_{Qk}v^Q \tag{1.12}$$

la derivée covariante de v^P. D'après cette notation, la formule (1.9) peut être aussi écrite sous la forme

$$\mathfrak{x}_{P;k} = \mathfrak{x}_{P,k} - \Gamma^Q_{Pk}\mathfrak{x}_Q = -L^i_{\cdot kP}\mathfrak{x}_i. \tag{1.13}$$

La condition d'intégrabilite de (1.4) ou (1.8) est

(1.14) $$\mathfrak{x}_{j;k;h}-\mathfrak{x}_{j;h;k}=-R^{i}_{\cdot jkh}\mathfrak{x}_{i},$$

où

(1.15) $$R^{i}_{\cdot jkh}=\Gamma^{i}_{jk,h}-\Gamma^{i}_{jh,k}+\Gamma^{a}_{jk}\Gamma^{i}_{ah}-\Gamma^{a}_{jh}\Gamma^{i}_{ak}$$

est le tenseur de courbure de A_n et satisfait aux relations algébriques bien connues

(1.16) $$R^{i}_{\cdot jkh}=-R^{i}_{\cdot jhk} \quad \text{et} \quad R^{i}_{\cdot jkh}+R^{i}_{\cdot khj}+R^{i}_{\cdot hjk}=0.$$

En utilisant deux identites

$$\mathfrak{x}_{j;k;h;l}-\mathfrak{x}_{j;h;k;l}=-R^{i}_{\cdot jkh;l}\mathfrak{x}_{i}-R^{i}_{\cdot jkh}\mathfrak{x}_{i;l}$$

et

$$\mathfrak{x}_{j;k;h;l}-\mathfrak{x}_{j;k;l;h}=-R^{i}_{\cdot jhl}\mathfrak{x}_{i;k}-R^{i}_{\cdot khl}\mathfrak{x}_{j;i},$$

l'une obtenue par la différentiation covariante de la formule de Ricci (1.14) et l'autre par l'application de la formule de Ricci à $\mathfrak{x}_{j;k}$, et en tenant compte des relations algébriques (1.16), on peut facilement démontrer la formule bien connues de Bianchi

(1.17) $$R^{i}_{\cdot jkh;l}+R^{i}_{\cdot jhl;k}+R^{i}_{\cdot jlk;h}=0.$$

D'autre part, la condition d'intégrabilité de (1.9) ou (1.13) est

(1.18) $$\mathfrak{x}_{Q;k;h}-\mathfrak{x}_{Q;h;k}=-R^{P}_{\cdot Qkh}\mathfrak{x}_{P},$$

où

(1.19) $$R^{P}_{\cdot Qkh}=\Gamma^{P}_{Qk,h}-\Gamma^{P}_{Qh,k}+\Gamma^{R}_{Qk}\Gamma^{P}_{Rh}-\Gamma^{R}_{Qh}\Gamma^{P}_{Rk}$$

est le tenseur de courbure de A^{m-n}_{m}, et satisfait aux relations

(1.20) $$R^{P}_{\cdot Qkh}=-R^{P}_{\cdot Qhk} \quad \text{et} \quad R^{P}_{\cdot Qkh;l}+R^{P}_{\cdot Qhl;k}+R^{P}_{\cdot Qlk;h}=0.$$

Or, en substituant (1.8) dans (1.14), on trouve, en tenant compte de (1.13),

$$(R^{i}_{\cdot jkh}-H^{\cdot\cdot P}_{jk}L^{i}_{\cdot hP}+H^{\cdot\cdot P}_{jh}L^{i}_{\cdot kP})\mathfrak{x}_{i}+(H^{\cdot\cdot P}_{jk;h}-H^{\cdot\cdot P}_{jh;k})\mathfrak{x}_{P}=0,$$

d'où, $\mathfrak{x}_i$ et $\mathfrak{x}_P$ étant linéairement indépendants,

(1.21) $$R^{i}_{\cdot jkh}=H^{\cdot\cdot P}_{jk}L^{i}_{\cdot hP}-H^{\cdot\cdot P}_{jh}L^{i}_{\cdot kP}$$

et

(1.22) $$H^{\cdot\cdot P}_{jk;h}-H^{\cdot\cdot P}_{jh;k}=0.$$

D'une manière analogue, en substituant (1.13) dans (1.18) et en tenant compte de (1.8), on a

$$(L^{i}_{\cdot kQ;h}-L^{i}_{\cdot hQ;k})\mathfrak{x}_{i}+(R^{P}_{\cdot Qkh}-H^{\cdot\cdot P}_{ik}L^{i}_{\cdot hQ}+H^{\cdot\cdot P}_{ih}L^{i}_{\cdot kQ})\mathfrak{x}_{P}=0,$$

d'où, $\mathfrak{x}_i$ et $\mathfrak{x}_P$ étant linéairement indépendants,

(1.23) $$L^{i}_{\cdot kQ;h}-L^{i}_{\cdot hQ;h}=0$$

et

(1.24) $$R^{P}_{\cdot Qkh}=H^{\cdot\cdot P}_{ik}L^{i}_{\cdot hQ}-H^{\cdot\cdot P}_{ih}L^{i}_{\cdot kQ}.$$

Les équations (1.21) sont celles de Gauss, (1.22) et (1.23) celles de Minardi-Codazzi et (1.24) celles de Ricci-Kühne.

Si l'espace ambiant est métrique, on pose

(1.25) $$g_{jk}=\mathfrak{x}_{j}\cdot\mathfrak{x}_{k} \quad \text{et} \quad g_{PQ}=\mathfrak{x}_{P}\cdot\mathfrak{x}_{Q},$$

ce qui donnent les tenseurs métriques fondamentaux de A_n, et de A_m^{m-n} respectivement, et on prend les vecteurs $\mathfrak{x}_P$ orthogonaux à A_n, ce qui donne $\mathfrak{x}_j.\mathfrak{x}_Q=0$. Alors, en dérivant (1.25) et en y substituant (1.4) et (1.9) on trouve respectivement

$$(1.26) \qquad g_{jk;h}=g_{jk,h}-g_{ak}\Gamma^a_{jh}-g_{ja}\Gamma^a_{kh}=0\,,$$

et

$$(1.27) \qquad g_{PQ;h}=g_{PQ,h}-g_{RQ}\Gamma^R_{Ph}-g_{PR}\Gamma^R_{Qh}=0\,,$$

d'où on trouve que les Γ^i_{jk} co ncident avec les symboles de Christoffel

$$\{^{\,i}_{jk}\}=\frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k}+g_{ak,j}-g_{jk,a})\,,$$

où g^{ij} est le tenseur contrevariant métrique de A_n défini par $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$. Nous désignerons aussi par g^{PQ} le tenseur contrevariant métrique de A_m^{m-n}.

D'autre part, en derivant $\mathfrak{x}_j.\mathfrak{x}_Q=0$ et en y substituant (1.4) et (1.9) on trouve

$$(1.28) \qquad g_{ij}L^i_{\cdot kQ}=g_{PQ}H_{jk}^{\cdot\cdot P}\,.$$

§ 2. *La déformation infinitésimale d'un sous-espace.*

Nous allons considérer, dans ce Paragraphe, une déformation infinitésimale

$$(2.1) \qquad \bar{\mathfrak{x}}(x)=\mathfrak{x}(x)+\mathfrak{z}(x)dt$$

du sous-espace $\mathfrak{x}(x)$, où $\mathfrak{z}(x)$ est un vecteur défini sur le sous-espace et dt une quantité infinitésimale. On ne tiendra compte que des quantités du premir order par rapport à dt.

On a, de (2.1),

$$(2.2) \qquad \Delta\mathfrak{x}_j=\mathfrak{z}_j dt\,,$$

en posant

$$(2.3) \qquad \Delta\mathfrak{x}_j=\bar{\mathfrak{x}}_j-\mathfrak{x}_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{z}_j=\mathfrak{z}_{;j}\,.$$

Si l'on pose

$$(2.4) \qquad \mathfrak{z}=\xi^i\mathfrak{x}_i+\xi^P\mathfrak{x}_P\,,$$

on obtient, de (2.2),

$$(2.5) \qquad \Delta\mathfrak{x}_j=\mathfrak{z}_j dt=[(\xi^i_{;j}-L^i_{\cdot jP}\xi^P)\mathfrak{x}_i+(\xi^P_{;j}+H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i)\mathfrak{x}_P]\,dt\,.$$

En dérivant (2.1) deux fois, et en y substituant (1.4) et

$$\bar{\mathfrak{x}}_{j,k}=\bar{\Gamma}^i_{jk}\bar{\mathfrak{x}}_i+\bar{H}_{jk}^{\cdot\cdot P}\bar{\mathfrak{x}}_P\,,$$

on trouve

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(\mathfrak{x}_i+\mathfrak{z}_i dt)+\bar{H}_{jk}^{\cdot\cdot P}\bar{\mathfrak{x}}_P=\Gamma^i_{jk}\mathfrak{x}_i+H_{jk}^{\cdot\cdot P}\mathfrak{x}_P+\mathfrak{z}_{j,k}dt\,,$$

d'où

$$(2.6) \qquad (\Delta\Gamma^i_{jk})\mathfrak{x}_i+(\Delta H_{jk}^{\cdot\cdot P})\mathfrak{x}_P=[\mathfrak{z}_{j;k}-H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_P^{\cdot i}\mathfrak{x}_i-H_{jk}^{\cdot\cdot Q}\eta_Q^{\cdot P}\mathfrak{x}_P]\,dt\,,$$

où nous avons posé

$$(2.7) \qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=\bar{\Gamma}^i_{jk}-\Gamma^i_{jk}\,, \qquad \Delta H_{jk}^{\cdot\cdot P}=\bar{H}_{jk}^{\cdot\cdot P}-H_{jk}^{\cdot\cdot P}$$

et

$$(2.8)\qquad \Delta\mathfrak{x}_P=\overline{\mathfrak{x}}_P-\mathfrak{x}_P=[\eta_P^{\cdot i}\mathfrak{x}_i+\eta_P^{\cdot Q}\mathfrak{x}_Q]\,dt\,.$$

En substituant (2.5) dans (2.6) et en égalant les coéfficients de $\mathfrak{x}_i$ et de $\mathfrak{x}_P$ respectivement, on trouve

$$(2.9)\qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=[(\xi^i_{;j}-L^i_{\cdot jP}\xi^P)_{;k}-(\xi^P_{;j}+H_{aj}^{\cdot\cdot P}\xi^a)L^i_{\cdot kP}-H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_P^{\cdot i}]\,dt$$

et

$$(2.10)\qquad \Delta H_{jk}^{\cdot\cdot P}=[(\xi^i_{;j}-L^i_{\cdot jQ}\xi^Q)H_{ik}^{\cdot\cdot P}+(\xi^P_{;j}+H_{aj}^{\cdot\cdot P}\xi^a)_{;k}-H_{jk}^{\cdot\cdot Q}\eta_Q^{\cdot P}]\,dt\,,$$

D'autre part, en dérivant

$$\overline{\mathfrak{x}}_Q=\mathfrak{x}_Q+[\eta_Q^{\cdot i}\mathfrak{x}_i+\eta_Q^{\cdot R}\mathfrak{x}_R]\,dt$$

par rapport à x^k et en y substituant (1.4), (1.9) et

$$\overline{\mathfrak{x}}_{Q,k}=-\overline{L}^i_{\cdot kQ}\overline{\mathfrak{x}}_i+\overline{\Gamma}^R_{Qk}\overline{\mathfrak{x}}_R\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}&-\overline{L}^i_{\cdot kQ}(\mathfrak{x}_i+\mathfrak{z}_i dt)+\overline{\Gamma}^R_{Qk}[\mathfrak{x}_R+(\eta_R^{\cdot i}\mathfrak{x}_i+\eta_R^{\cdot s}\mathfrak{x}_s)\,dt]\\&=-L^i_{\cdot kQ}\mathfrak{x}_i+\Gamma^P_{Qk}\mathfrak{x}_P+[\eta_{Q,k}^{\cdot i}\mathfrak{x}_i+\eta_Q^{\cdot i}(\Gamma^a_{ik}\mathfrak{x}_a+H_{ik}^{\cdot\cdot P}\mathfrak{x}_P)+\eta_{Q,k}^{\cdot R}\mathfrak{x}_R\\&\qquad+\eta_Q^{\cdot R}(-L^i_{\cdot kR}\mathfrak{x}_i+\Gamma^P_{Rk}\mathfrak{x}_P)]\,dt\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(2.11)\qquad &-(\Delta L^i_{\cdot kQ})\mathfrak{x}_i+(\Delta\Gamma^P_{Qk})\mathfrak{x}_P\\&=[L^i_{\cdot kQ}\mathfrak{z}_i+(\eta_{Q;k}^{\cdot i}-L^i_{\cdot kP}\eta_Q^{\cdot P})\mathfrak{x}_i+(\eta_{Q;k}^{\cdot P}+H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_Q^{\cdot j})\mathfrak{x}_P]\,dt\,,\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$(2.12)\qquad \Delta L^i_{\cdot kQ}=\overline{L}^i_{\cdot kQ}-L^i_{\cdot kQ}\quad\text{et}\quad \Delta\Gamma^P_{Qk}=\overline{\Gamma}^P_{Qk}-\Gamma^P_{Qk}\,.$$

En substituant (2.5) dans (2.11) et en égalant les coéfficients de $\mathfrak{x}_i$ et de $\mathfrak{x}_P$ respectivement, on trouve

$$(2.13)\qquad \Delta L^i_{\cdot kQ}=[-(\xi^i_{;j}-L^i_{\cdot jP}\xi^P)L^j_{\cdot kQ}-(\eta_{Q;k}^{\cdot i}-L^i_{\cdot kP}\eta_Q^{\cdot P})]\,dt$$

et

$$(2.14)\qquad \Delta\Gamma^P_{Qk}=[(\xi^P_{;j}+H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i)L^j_{\cdot kQ}+(\eta_{Q;k}^{\cdot P}+H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_Q^{\cdot j})]\,dt\,.$$

La variation $\Delta R^i_{\cdot jkh}=\overline{R}^i_{\cdot jkh}-R^i_{\cdot jkh}$ de $R^i_{\cdot jkh}$ peut être calculée en substituant les composantes $\overline{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\Delta\Gamma^i_{jk}$ dans $\overline{R}^i_{\cdot jkh}$,

$$(2.15)\qquad \Delta R^i_{\cdot jkh}=(\Delta\Gamma^i_{jk})_{;h}-(\Delta\Gamma^i_{jh})_{;k}\,,$$

et de même la variation $\Delta R^P_{\cdot Qkh}=\overline{R}^P_{\cdot Qkh}-R^P_{\cdot Qkh}$ de $R^P_{\cdot Qkh}$ est donnée par

$$(2.18)\qquad \Delta R^P_{\cdot Qkh}=(\Delta\Gamma^P_{Qk})_{;h}-(\Delta\Gamma^P_{Qh})_{;k}\,.$$

§ 3. *Le cas où l'espace, ambiant est métrique.*

Si l'espace ambiant est métrique, on a

$$\begin{aligned}\overline{g}_{jk}=\overline{\mathfrak{x}}_j.\overline{\mathfrak{x}}_k&=(\mathfrak{x}_j+\Delta\mathfrak{x}_j)\cdot(\mathfrak{x}_k+\Delta\mathfrak{x}_k)\\&=g_{jk}+(\mathfrak{x}_j.\mathfrak{z}_k+\mathfrak{x}_k.\mathfrak{z}_j)\,dt\,,\end{aligned}$$

d'où

$$(3.1)\qquad \Delta g_{jk}=[\xi_{j;k}+\xi_{k;j}-2H_{jkP}\xi^P]\,dt\,,$$

où nous avons posé

$$\Delta g_{jk}=\bar{g}_{jk}-g_{jk} \quad \text{et} \quad \xi_i=g_{ij}\xi^j .$$

Donc, si l'on pose

$$\phi_{jk}=\xi_{j;k}+\xi_{k;j}-2H_{j;kP}\xi^P , \tag{3.2}$$

on obtient

$$\frac{d\bar{s}^2-ds^2}{ds^2}=\phi_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} ,$$

d'où

$$\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{1}{2}\phi_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} , \tag{3.3}$$

ce qui nous donne l'extension du sous-espace dans la direction de $\dfrac{dx^i}{ds}$.

Par conséquent, la direction h^i qui donne l'extrême de l'extension est donnée par

$$\left(\frac{1}{2}\phi_{ij}-\rho g_{ij}\right)h^j=0 , \tag{3.4}$$

où ρ est la racine de l'équation

$$\left|\frac{1}{2}\phi_{ij}-\rho g_{ij}\right|=0 . \tag{3.5}$$

Pour une déformation infinitésimale normale, on a $\phi_{ij}=-2H_{ijP}\,\xi^P$, donc, cette direction coïncide avec la direction principale de $H_{jkP}\xi^P$. L'extension dans la direction asymptotique est, dans ce cas, nulle.

D'autre part, en désignant par g le déterminant formé avec les g_{ij}, on a

$$\bar{g}=g+gg^{ij}\phi_{ij}dt$$

d'où

$$\sqrt{\bar{g}}=\sqrt{g}\left(1+\frac{1}{2}g^{ij}\phi_{ij}dt\right) , \tag{3.6}$$

et par conséquent

$$d\bar{V}=dV\left(1+\frac{1}{2}g^{ij}\phi_{ij}dt\right) , \tag{3.7}$$

où nous avons désigné par $d\bar{V}$ la volume élémentaire $d\bar{V}=\sqrt{\bar{g}}\,d\bar{x}^1d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^n$ et $dV=\sqrt{g}\,dx^1dx^2\ldots dx^n$. En posant $\Delta dV=d\bar{V}-dV$, on a de (3.7),

$$\frac{\Delta dV}{dV}=\frac{1}{2}g^{ij}\phi_{ij}dt , \tag{3.8}$$

ce qui nous donne la dilatation du sous-espace.

Par conséquent la dilatation est pour une déformation tangentielle donnée par

$$\frac{\Delta dV}{dV}=\xi^i{}_{;i}dt \tag{3.9}$$

et, pour une déformation normale, par

$$(3.10) \qquad \frac{\Delta dV}{dV} = -g^{ij}H_{ijP}\xi^P dt .$$

Cela étant prenons n vecteurs $h^{\;i}_{(a)}$ unitaires et orthogonaux entre eux. Alors la somme des extensions dans les directions $h^{\;i}_{(a)}$ est donnée par

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{1}{2}\phi_{ij}h^{\;i}_{(a)}h^{\;j}_{(a)}dt = \frac{1}{2}g^{ij}\phi_{ij}dt ,$$

c'est-à-dire, elle est égale à la dilatation et par conséquent est independante des n vecteurs choisis $h^{\;i}_{(a)}$.

Si les ϕ_{ij} définis par (3.2) s'annulent, l'extension est toujours nulle. Une telle déformation s'appelle le mouvement. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une déformation infinitésimale tangentielle soit un mouvement est que

$$(3.11) \qquad \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0 .$$

Ce sont les équations bien connues de Killing. Pour qu'une déformation infinitésimale normale soit un mouvement, il faut et il suffit que

$$(3.12) \qquad H_{ijP}\xi^P = 0 ,$$

ou

$$(3.13) \qquad \mathfrak{x}_{j;k\mathfrak{z}} = 0 ,$$

c'est-à-dire que le vecteur de déformation soit orthogonal au premier espace normal, ce qui n'est possible que quand $\frac{1}{2}n(n+1) < m-n$ ou $\frac{1}{2}n(n+3) < m$.

Si toutes les déformations normales sont mouvements, on doit avoir $H_{jk}^{\;\cdot\cdot\lambda} = 0$.

Les équations (3.12) montrent que si $m=n-1$, le mouvement n'est possible si $H_{jk}^{\;\cdot\cdot\lambda} = 0$.

Or, si $\phi_{ij} = \rho g_{ij}$, l'extension ne depend pas de la direction.

Une telle déformation infinitésimale s'appelle conforme. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une déformation infinitésimale tangentielle soit conforme est que

$$(3.14) \qquad \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = \rho g_{ij} .$$

Pour qu'une déformation infinitésimale normale soit conforme, il faut et il suffit que

$$(3.15) \qquad H_{jkP}\xi^P = \rho g_{jk} .$$

Donc si $m=n+1$ la deformation normale conforme n'est possible que si le sous-espace est totalement ombiliqué.

Si toutes les déformations infinitésimales normales sont conformes, on doit avoir $H_{jk}^{\;\cdot\cdot\lambda} = g_{jk}H^\lambda$.

Dans ce cas où l'espace ambiant est métrique, l'équation

$$\mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_P = 0$$

nous donne

$$(\Delta \mathfrak{x}_i)\mathfrak{x}_P + \mathfrak{x}_i(\Delta \mathfrak{x}_P) = 0 ,$$

d'où, en tenant compte de (2.5) et de (2.8),

(3.16) $$g_{PQ}(\xi^Q{}_{;j} + H_{ij}^{\cdot\cdot Q}\xi^i) + g_{ij}\eta_P^{\cdot i} = 0 .$$

Donc, en substituant (3.16) dans (2.9), on trouve

$$\Delta\{{}^{i}_{jk}\} = [(\xi^i{}_{;j} - H^i_{\cdot jP}\xi^P)_{;k} - (\xi^P{}_{;j} + H_{aj}^{\cdot\cdot P}\xi^a)H^i_{\cdot kP} + H_{jk}^{\cdot\cdot P}(\xi_{P;a} + H_{abP}\xi^b)g^{ai}]dt,$$

d'où

(3.17) $$\Delta\{{}^{i}_{jk}\} = [(\xi^i{}_{;j;k} + R^i_{\cdot jkh}\xi^h) - H^i_{\cdot jP;k}\xi^P - H^i_{\cdot jP}\xi^P{}_{;k} - H^i_{\cdot kP}\xi^P{}_{;j} + H_{jk}^{\cdot\cdot P}\xi_{P;a}g^{ai}]\, dt .$$

De l'équation (2.10) on trouve

(3.18) $$\Delta H_{jk}^{\cdot\cdot P} = [(\xi^i{}_{;j} - H^i_{\cdot jQ}\xi^Q)H_{ik}^{\cdot\cdot P} + (\xi^P{}_{;j} + H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i)_{;k} - H_{jk}^{\cdot\cdot Q}\eta_Q^{\cdot P}]dt .$$

En substituant (3.16) dans (2.13), on peut facilement vérifier que (2.13) coïncide avec (3.18).

En substituant (3.16) dans (2.14), on trouve

(3.19) $$\Delta \Gamma^P_{Qk} = [(\xi^P{}_{;j} + H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i)H^j_{\cdot kQ} + \eta_{Q;k}^{\cdot P} - (\xi_{Q;j} + H_{ijQ}\xi^i)H^{j\cdot P}_{\cdot k}]dt .$$

§ 4. *La déformation infinitésimale parallèle.*

Si les plans tangents des sous-espaces original et varié en deux points correspondants sont parallèles, la déformation infinitésimale est dite parallèle.

Pour cela, il faut et il suffit qu'on ait

$$\Delta \mathfrak{x}_j = \mathfrak{z}_j dt = b^i_{\cdot j} dt \mathfrak{x}_i ,$$

par conséquent

(4.1) $$\xi^P{}_{;j} + H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i = 0$$

et

(4.2) $$b^i_{\cdot j} = \xi^i{}_{;j} - L^i_{\cdot jP}\xi^P$$

Pour une telle déformation, on a de (2.9),

(4.3) $$\Delta \Gamma^i_{jk} = (\xi^i{}_{;j} - L^i_{\cdot jP}\xi^P)_{;k} - H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_P^{\cdot i} ,$$

ou, en y substituant (4.1),

(4.4) $$\Delta \Gamma^i_{jk} = [\xi^i{}_{;j;k} - L^i_{\cdot jP;k}\xi^P + L^i_{\cdot jP}H_{ak}^{\cdot\cdot P}\xi^a - H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_P^{\cdot i}]dt .$$

On peut facilement vérifier que le second membre de (4.4) est bien symétrique par rapport aux indices j et k.

De même on a des (2.10) (2.13) et (2.14),

(4.5) $$\Delta H_{jk}^{\cdot\cdot P} = (b^i_{\cdot j}H_{ik}^{\cdot\cdot P} - H_{jk}^{\cdot\cdot Q}\eta_Q^{\cdot P})dt ,$$

(4.6) $$\Delta L^i_{\cdot kQ} = [-b^i_{\cdot j}L^j_{\cdot kQ} - (\eta_{Q;k}^{\cdot i} - L^i_{\cdot kR}\eta_Q^{\cdot R})dt ,$$

(4.7) $$\Delta \Gamma^P_{Qk} = (\eta_Q^{\cdot P}{}_{;k} + H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_Q^{\cdot j})\, dt$$

respectivement. En substituant (4.3) dans (2.15), on trouve

(4.8) $$\Delta R^i_{\cdot jkh} = [(b^a_{\cdot j}R^i_{\cdot akh} - b^i_{\cdot a}R^a_{\cdot jkh}) - H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_{P;h}^{\cdot i} + H_{jh}^{\cdot\cdot P}\eta_{P;k}^{\cdot i}]\, dt .$$

De même, en substituant (4.7) dans (2.18), on a

(4.9) $$\Delta R^P_{\cdot Qkh} = [\eta_Q^{\cdot R}R^P_{\cdot Rkh} - \eta_R^{\cdot P}R^R_{\cdot Qkh} + H_{jk}^{\cdot\cdot P}\eta_{Q;h}^{\cdot j} - H_{jh}^{\cdot\cdot P}\eta_Q^{\cdot j}{}_{;k}]\, dt .$$

Pour une V_{n-1}, si l'on se donne ξ^n, ξ^i se determinent par (4.1) et par conséquent la déformation parallèle se détermine.

Pour qu'une déformation tangentielle soit parallèle, il faut et il suffit que $H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i=0$, donc, ce n'est possible que quand le rang de $H_{ij}^{\cdot\cdot P}$ est inferieur que n.

Pour qu'une déformation normale soit parallèle, il faut et il suffit que

$$\xi^P_{\ ;j}=0\,. \tag{4.10}$$

La condition d'intégrabilité complète de (4.10) est

$$R^{P\cdot}_{\cdot Qkj}=0\,, \tag{4.11}$$

où, d'après l'équation de Ricci-Kühne,

$$L^j_{\cdot kQ}H_{ij}^{\cdot\cdot P}-L^i_{\cdot hQ}H_{ik}^{\cdot\cdot P}=0\,, \tag{4.12}$$

ce qui est toujours valable pour un sous-espace totalement géodésique.

Si

$$\Delta(dx^j\mathfrak{x}_j)=b^i_{\cdot j}dx^j dt\mathfrak{x}_i \tag{4.13}$$

est proportionnel à $dx^j\mathfrak{x}_j$, les vecteurs $\mathfrak{x}_i$ ont été transportés parallèlement à eux-mêmes. On a, dans ce cas,

$$(b^i_{\cdot j}-\sigma\delta^i_j)dx^j=0\,,$$

où σ doit satisfaire à l'équation

$$|b^i_{\cdot j}-\sigma\delta^i_j|=0\,.$$

Si l'espace ambiant est métrique, on pose

$$b_{ij}=g_{ia}b^a_{\cdot j}=\xi_{i;j}-H_{ijP}\xi^P\,, \tag{4.14}$$

alors

$$\frac{1}{2}(b_{ij}+b_{ji})=\frac{1}{2}\phi_{ij}\,,$$

donc, si $b_{ij}=b_{ji}$ les directions transportées parallèlement par une déformation parallèle et les directions principales de l'extension coïncident. Dans ce cas, on trouve de $b_{ij}=b_{ji}$ que ξ_i est un vecteur gradient.

Les autres directions que celles données par $(b_{ij}-\sigma g_{ij})dx^j=0$ pivotent. Si toutes les directions se transportent parallèlement la déformation parallèle s'appelle irrotationnelle. Pour cela, il faut et il suffit que

$$b_{ij}=\sigma g_{ij} \tag{4.15}$$

donc, b_{ij} doit être symétrique par rapport aux i et j, et par conséquent ξ_i doit être un vecteur gradient. Une telle déformation infinitésimale s'appelle conforme.

Dans ce cas, l'espace ambiant étant métrique on a $\Delta(\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_P)=0$ d'où $\eta_P^{\cdot i}=0$, par conséquent on a de $b^i_{\cdot j}=\sigma\delta^i_j$,

$$\Delta\left\{{i \atop jk}\right\}=[\delta^i_j\sigma_{,k}]dt$$

d'où $\Delta\left\{{i \atop jk}\right\}$ étant symétrique par rapport aux indices inférieures,

$$\sigma_{,k}=0$$

donc,

$$(4.16) \qquad \Delta\left\{{}^{\,i}_{jk}\right\}=0\,,$$

et par conséquent, la déformation infinitésimale conserve les géodésiques.

Si la déformation parallèle est un mouvement, on a

$$(4.17) \qquad b_{ij}+b_{ji}=0\,.$$

Si de plus elle est irrotationnelle, on a

$$(4.18) \qquad b_{ij}=\sigma g_{ij}\,,$$

d'où $\sigma=0$ et par conséquent

$$(4.19) \qquad \Delta\mathfrak{x}_i=\mathfrak{z}_i dt=0\,,$$

donc, $\mathfrak{z}$ est un champ de vecteur parallèle défini sur A_n. Une telle déformation infinitésimale s'appelle translation. Si $m=n+1$ et $\xi^n=$ constante, la déformation normale est parallèle, si elle est irrotationnelle on doit avoir

$$H_{jk}=\sigma g_{jk}\,,$$

et par conséquent V_n doit être totalement ombiliquée. Si elle n'est pas irrotationnelle, les directions principales de H_{jk} seulement se transportent parallèlement.

§ 5. *La déformation infinitésimale tangentielle.*

Si le vecteur $\mathfrak{z}$ definissant la deformation infinitesimale peut s'ecrire sous la forme

$$(5.1) \qquad \mathfrak{z}=\xi^i\mathfrak{x}_i\,,$$

la déformation infinitésimale est dite tangentielle. Dans ce cas, chaque point du sous-espace étant transporté à un point du même sous-espace, le sous-espace lui-même ne change pas.

En substituant (5.1) dans (2.5) on trouve

$$(5.2) \qquad \Delta\mathfrak{x}_j=[\xi^i{}_{;j}\mathfrak{x}_i+H_{ij}^{\cdot\cdot P}\xi^i\mathfrak{x}_P]\,dt\,.$$

Pour une déformation infinitésimale tangentielle, on doit avoir

$$\Delta\mathfrak{x}_P=d\mathfrak{x}_P=\mathfrak{x}_{P;j}\xi^j dt\,,$$

d'où

$$(5.3) \qquad \eta_P^{\cdot i}=-L^i_{\cdot jP}\xi^j.$$

Donc, en substituant $\xi^P=0$ et (5.3) dans (2.9), on trouve

$$(5.4) \qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=[\xi^i{}_{;j;k}+H_{jk}^{\cdot\cdot P}L^i_{\cdot hP}\xi^h-H_{jh}^{\cdot\cdot P}L^i_{\cdot kP}\xi^h]\,dt\,,$$

ou, d'après l'équation de Gauss,

$$(5.5) \qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=[\xi^i{}_{;j;k}+R^i_{\cdot ikh}\xi^h]\,dt.$$

En substituant (5.5) dans (2.15), on trouve

$$\Delta R^i_{\cdot jkh}=[\xi^i{}_{;j;k;h}+R^i_{\cdot jka;h}\xi^a+R^i_{\cdot jka}\xi^a{}_{;h}-\xi^i{}_{;j;h;k}-R^i_{\cdot jha;k}\xi^a-R^i_{\cdot jha}\xi^a{}_{;k}]\,dt\,,$$

d'où

$$(5.6) \qquad \Delta R^i_{\cdot jkh}=[R^i_{\cdot jkh;a}\xi^a-R^a_{\cdot jkh}\xi^i{}_{;a}+R^i_{\cdot akh}\xi^a{}_{;j}+R^i_{\cdot jah}\xi^a{}_{;k}+R^i_{\cdot jka}\xi^a{}_{;h}]\,dt\,.$$

Les variations des quantités fondamentales de A_n étant ainsi déteminées, nous allons considérer la variation d'un vecteur $v^i\mathfrak{x}_i$ arbitraire de A_n.

Si l'on éffectue une déformation infinitésimale

$$\bar{\mathfrak{x}}(x)=\mathfrak{x}(x)+\xi^i dt\mathfrak{x}_i=\mathfrak{x}(x+\xi dt)\,, \tag{5.7}$$

on trouve, en $x^i+\xi^i dt$,

$$v^i\mathfrak{x}_i+[v^i_{;j}\xi^j\mathfrak{x}_i+H_{ij}^{\cdot\cdot p}v^i\xi^j\mathfrak{x}_p]dt\,.$$

D'autre part, le vecteur varié de $v^i\xi_i$ en $x^i+\xi^i dt$ est

$$v^i(\mathfrak{x}_i+\mathfrak{z}_i dt)=v^i\mathfrak{x}_i+[\xi^i_{;j}v^j\mathfrak{x}_i+H_{ij}^{\cdot\cdot p}\xi^i v^j]dt\,,$$

donc, la différence est

$$(v^i_{;j}\xi^j-\xi^i_{;j}v^j)dt\mathfrak{x}_i \tag{5.8}$$

d'où

$$\Delta v^i=[v^i_{;j}\xi^j-\xi^i_{;j}v^j]dt\,. \tag{5.9}$$

En ce qui concerne la variation d'un vecteur covariant u_j, nous la définissons par

$$\Delta(u_iv^i)=d(u_iv^i)=\delta(u_iv^i)\,,$$

ou

$$(\Delta u_i)v^i+v_i(\Delta v^i)=[u_{i;j}\xi^jv^i+u_iv^i_{;j}\xi^j]dt\,.$$

En y substituant (5.9), on trouve

$$\Delta u_i=[u_{i;j}\xi^j+\xi^j_{;i}u_j]\,dt\,, \tag{5.10}$$

v^i étant tout à fait arbitraire.

D'une manière analoque, on définit la variation d'un tenseur arbitraire, par example de $T^i_{\cdot jk}$, par

$$\Delta(T^i_{\cdot jk}u_iv^jw^k)=\delta(T^i_{\cdot jk}u_iv^jw^k)\,,$$

u_i, v^i, w^i étant arbitraires, d'où on trouve

$$\Delta T^i_{\cdot jk}=[T^i_{\cdot jk;a}\xi^a-T^a_{\cdot jk}\xi^i_{;a}+T^i_{\cdot ak}\xi^a_{;j}+T^i_{\cdot ja}\xi^a_{;k}]dt\,. \tag{5.11}$$

On verra facilement la loi de formation de la variation d'un tenseur arbitraire dont $\Delta R^i_{\cdot jkh}$ donne un example.

Pour la loi de permutation des opérateurs de variation et de la differentiation covariante, on a, d'après un calcul directe,

$$\Delta(T^i_{\cdot jk;h})-(\Delta T^i_{\cdot jk})_{;h}=T^a_{\cdot jk}\Delta\{{}^{\,i}_{ah}\}-T^i_{\cdot ak}\Delta\{{}^{\,a}_{jh}\}-T^i_{\cdot ja}\Delta\{{}^{\,a}_{kh}\}\,. \tag{5.12}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} v^i_{;k}&=(v^i+\Delta v^i)_{,k}+(\{{}^{\,i}_{jk}\}+\Delta\{{}^{\,i}_{jk}\})(v^j+\Delta v^j)\\ &=v^i_{;k}+(\Delta v^i)_{;k}+(\Delta\{{}^{\,i}_{jk}\})v^j\,.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\Delta(v^i_{;k})-(\Delta v^i)_{;k}=v^j\Delta\{{}^{\,i}_{jk}\}\,,$$

donc,

$$v^i_{;k}=v^i_{;k}+\Delta(v^i_{;k})\,. \tag{5.13}$$

§ 6. *La déformation infinitésimale d'un espace lui-même.*

Nous avons considéré, dans le Paragraphe précédent, une déformation infinitésimale tangentielle

$$(6.1)\qquad \bar{\mathfrak{x}}(x)=\mathfrak{x}(x)+\xi^i dt\mathfrak{x}_i .$$

Les $\mathfrak{x}_i$ représentant $\partial\mathfrak{x}/\partial x^i$, l'équation (6.1) peut s'écrire sous la forme

$$(6.2)\qquad \bar{\mathfrak{x}}(x)=\mathfrak{x}(x+\xi dt).$$

Donc, dans le système de coordonnées actuel pour A_n, la déformation infinitésimale tangentielle de A_n peut être représente par

$$(6.3)\qquad x^i\to x^i+\xi^i dt.$$

Mais, au lieu de représenter le sous-espace par $\mathfrak{x}$, si l'on le représente par $\bar{\mathfrak{x}}$, le point qui avait les coordonnées $x^i+\xi^i dt$ prend les coordonnées x^i, donc, si l'on regarde (6.2) comme l'équation définissant une transformation de coordonnées, on trouve

$$(6.4)\qquad x^i+\xi^i dt\to x^i$$

Cela etant, prenons un vecteur contrevariant v^i, ses composantes v^i dans le nouveau système de coordonnées seront données par

$$\bar{v}^i(x)=v^j(x+\xi dt)(\delta^i_j-\xi^i{}_{,j}dt)=v^i(x)+[v^i{}_{,j}\xi^j-\xi^i{}_{,j}v^j]\,dt,$$

d'où, en posant $\Delta v^i=\bar{v}^i-v^i$,

$$(6.5)\qquad \Delta v^i=[v^i{}_{,j}\xi^j-\xi^i{}_{,j}v^j]\,dt.$$

ou, sous une forme tensorielle,

$$(6.6)\qquad \Delta v^i=[v^i{}_{;j}\xi^j-\xi^i{}_{;j}v^j]\,dt.$$

Si l'on prend un vecteur covariant u_j, on trouve

$$\bar{u}_j(x)=u_i(x+\xi dt)(\delta^i_j+\xi^i{}_{,j}dt)=u_j(x)+[u_{j,k}\xi^k+\xi^i{}_{,j}u_i]dt$$

d'où, en posant $\Delta u_j=\bar{u}_j-u_j$;

$$(6.7)\qquad \Delta u_j=[u_{j,k}\xi^k+\xi^i{}_{,j}u_i]\,dt,$$

ou, sous une forme tensorielle,

$$(6.8)\qquad \Delta u_i=[u_{j;k}\xi^k+\xi^i{}_{;j}u_i]\,dt.$$

De même, pour un tenseur général, soit pour $T^i_{\cdot jk}$, on trouve

$$(6.9)\qquad \Delta T^i_{\cdot jk}=[T^i_{\cdot jk;a}\xi^a-T^a_{\cdot jk}\xi^i{}_{;a}+T^i_{\cdot ak}\xi^a{}_{;j}+T^i_{\cdot ja}\xi^a{}_{;k}]dt.$$

Cela étant, prenons les composantes Γ^i_{jk} de la connexion, on a

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^i_{jk}(x)&=(\delta^i_a-\xi^i{}_{,a}dt)[(\delta^b_j+\xi^b{}_{,j}dt)(\delta^c_k+\xi^c{}_{,k}dt)\Gamma^a_{bc}(x+\xi dt)+\xi^a{}_{,j,k}dt]\\&=\Gamma^i_{jk}(x)+[\xi^i{}_{,j,k}+\xi^a\Gamma^i_{jk,a}-\xi^i{}_{,a}\Gamma^a_{jk}-\xi^b{}_{,j}\Gamma^i_{bk}-\xi^c{}_{,k}\Gamma^i_{jc}]\,dt,\end{aligned}$$

d'où, en posant $\Delta\Gamma^i_{jk}=\bar{\Gamma}^i_{jk}-\Gamma^i_{jk}$,

$$(6.10)\qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=[\xi^i{}_{,j,k}+\xi^a\Gamma^i_{jk,a}-\xi^i{}_{,a}\Gamma^a_{jk}-\xi^a{}_{,j}\Gamma^i_{ah}-\xi^a{}_{,k}\Gamma^i_{ja}]\,dt,$$

ou, sous une forme tensorielle,

$$(6.11)\qquad \Delta\Gamma^i_{jk}=[\xi^i{}_{;j;k}+R^i_{\cdot jkh}\xi^h]\,dt.$$

Cela étant, on peut facilement vérifier que les composantes $R^i_{\cdot jkh}$ du tenseur de courbure formées avec les $\bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\Delta\Gamma^i_{jk}$, satisfont aux où

$$R^{i}_{.jkh} = R^{i}_{.jkh} + \Delta R^{i}_{.jkh},$$

$$\Delta R^{i}_{.jkh} = [R^{i}_{.jkh;a}\xi^{a} - R^{a}_{.jkh}\xi^{i}_{;a} + R^{i}_{.akh}\xi^{a}_{;j} + R^{i}_{.jah}\xi^{a}_{;k} + R^{i}_{.jka}\xi^{a}_{;h}]\, dt. \tag{6.12}$$

Or, la derivée covariante δv^i d'un vecteur contrevariant étant aussi un vecteur contrevariant, on a

$$\delta v^i = \delta v^i + \Delta(\delta v^i). \tag{6.12}$$

D'autre part, on a

$$\delta v^i = d(v^i + \Delta v^i) + (\Gamma^i_{jk} + \Delta\Gamma^i_{jk})(v^j + \Delta v^j)\, dx^k = \delta v^i + \delta(\Delta v^i) + v^j \Delta\Gamma^i_{jk},$$

d'où

$$\Delta(\delta v^i) - \delta(\Delta v^i) = v^i \Delta\Gamma^i_{jk}. \tag{6.14}$$

En généralisant cette formule, on obtiendra la formule (5.12).