38. Sur quelques points de la théorie du patentiel (I).

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI M.I.A., April 26, 1945.)

§ 1. *Une classe des potentiels généralisés.* Soient F un ensemble fermé et borné dans l'espace ω à m dimensions ($m \geq 2$), et μ une fonction complètement additive d'ensemble, déterminée par une distribution de masse *non-négative*, répartie sur F. Dans cette Note, nous nous proposons de considérer une classe des potentiels généralisés, définis comme il suit: *soit $\Phi(t)$ une fonction réelle définie pour tout t positif: $0<t<\infty$ et qui satisfait à la condition suivante:*

(α) *$\Phi(t)$ est une function monotone croissante et convexe.*

Les potentiels généralés que nous avons en vue, pour l'espace à dimensions $m \geq 3$, sont

$$u(P)=\int_F \Phi(1/r_{PQ}^{m-2})d\mu_Q. \tag{1}$$

S'il s'agit de l'espace à deux dimensions, nous supposons que $\Phi(t)$ soit définie pour tout t réel: $-\infty<t<+\infty$ et mettens

$$u(P)=\int_F \Phi(\log 1/r_P\ )d\mu_Q. \tag{1'}$$

Dans ces formules, P est un point quelconque de ω, Q désigne un point variable dans F et r_{PQ} signifie la distance euclidienne de P à Q. Dans les parties ultérieures, nous sousmettons d'ailleurs la fonction $\Phi(t)$ à la deuxième condition suivante:[1]

(β) En posant $h(\xi)=1/\xi^{m-2}$ pour $m \geq 3$, et $h(\xi)=-\log\xi$ pour $m=2$ (m désignant le nombre de dimensions de ω), nous avons

$$\int_0^1 \Phi(h(\xi))\cdot\xi^{m-1}d\xi<+\infty$$

Si l'on pose $\Phi(t)=t^a$, la condition (α) veut dire $\Phi''(t)=a(a-1)t^{a-2}\geq 0$ c. à d. $a \geq 1$. Le potentiel (1) est appelé alors "*potentiel généralisé d'ordre a.*"[2] La condition (β) veut dire $a<m$. S'il s'agit de l'espace de deux dimensions, les potentiels généralisés d'ordre a s'obtiennent en posant $\Phi(t)=e^{at}(a \gtreqless 0)$

---

1) Nous ne nous servirons pas de la condition (β) dans cette Note.

2) Voir O. Frostman: Potentiel d'Equilibre et Capacité des Ensembles avec Quelque Applications à la Théorie des Fonctions, These. Lund, 1935, p. 20.

dans la formule (1'). La condition (α) veut dire alors $\Phi''(t)=a^2e^{at}\geq 0$ ou $a \geq 0$, tandis que la condition (β) fait la restriction: $a<2$. *Pour fixer les idées, nous nous bornerons dans la suite, sauf indication contraire, aux cas de l'espace trois dimensionnel:* $m=3$.

Si $\lim_{t\to\infty} \Phi(t)<+\infty$, nous avons $\lim_{t\to\infty} D_\pm\Phi(t)=0$ et par suite $\Phi'(t)\equiv 0$. Par conséquent, $\Phi(t)$ et le potentiel (1) se reduisent à des constantes. Nous omettons donc ce cas dans les considérations ultérieures. Supposons donc

$$(2) \qquad \lim_{t\to\infty} \Phi(t)=+\infty.$$

Posons, pour tout nombre entier positif n, $\Phi_n(t)=\Phi(t)$ ou $=n$, suivant que $\Phi(t)\leq n$ ou $\geq n$. L'intégrale (1) est définie comme d'habitude par

$$(3) \qquad u(P)=\lim_{n\to\infty} u_n(P),\ u_n(P)=\int_F \Phi_n(1/r_{PQ})d\mu_Q\,,$$

et nous appelerons (3) la "*première formule d'approximation de* $u(P)$."

Pour tout point P_0 situé hors de F, il existe un voisinage de P_0 où la fonction $\Phi(1/r_{PQ})$ est uniformément continue et bornée. Donc, *le potentiel* $u(P)$ *est continue au point* P_0 *de* ω-F. De plus, dans ce même voisinage de P_0, la fonction $\Phi(1/r_{PQ})$, comme fonction de P, est sous-harmonique,[3] et par suite *le potentiel* $u(P)$ *est sous-harmonique partout dans* ω-F.[4]

Si $\Phi(t)=t$, le potentiel (1) se réduit au potentiel "newtonien." Si la fonction $\Phi(t)$ satisfait à la condition (α) pour t d'intervalle: $0<t\leq t_0$ (t_0 étant un nombre réel positif), tandis qu'elle a la forme: $\Phi(t)\equiv c(t-t_0)+\Phi(t_0)$ pour tout t supérieur à t_0: $t_0<t<\infty$, où c est une constante positive telle que $c\geq D_-\Phi(t_0)$, le potentiel (1) sera nommé "*quasi-newtonien.*" Dans ce cas, $\Phi(t)$ satisfait à la condition (α) pour tout t: $0<t<+\infty$, puisque nous avons $\underline{D}D_\pm\Phi(t)\equiv 0\,(t>t_0)$, $\underline{D}D_+\Phi(t_0)=c\geq D_-\Phi(t_0)$. Elle satisfait encore à la condition (β). Le potentiel newtonien est quasi-newtonien.

§ 2. *Principe du Maximum. Soit* D_1 *un domaine-composant de l'ensemble ouvert* ω-F. *Désignons par* H *la frontière de* D_1. *Si* $u(P)$ *satisfait à l'inégalité:*

$$u(P)\leq K$$

(3) Voir p. ex. T. Rado : Subharmonic functions (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 5, Heft 1. Berlin, 1937, p. 15–Article 3. 13.

(4) Puisque $f(PQ)=\Phi(1/rPQ)$ est uniformément continue dans le voisinage de P_0, l'intégrale de Stieltjes-Radon $\cdot\int_F f(P,Q)\,d\mu_Q$ est la limite d'une suite des sommes $\sum_{K=1}^{l} f(PQ_K)\cdot \mu(e_K)$, $Q_K\in e_K$; $\sum_{K=1}^{l} e_K=F$ qui est uniformément convergente (par rapport à P). Cf. T. Rado, ibid. p. 15–Article 3. 10 et p. 13–Article 3. 3.

en tout point de H, la même inégalité subsiste partont dans D_1.[5]

Démonstration. 1. Soit $\varphi(P)$ une fonction réelle définie sur l'ensemble fermé D_1+H. Disons que $\varphi(P)$ *jouit dc la "propriété A,"* si le maximum m_H des valeurs de $\varphi(P)$ pour P parcourant H est égal ou supérieur au maximum m_{D_1} de $\varphi(P)$ pour P variable dans D_1.

Lemme 1. *Supposons qu'une suite des fouctions $\varphi_n(P)$, définies sur l'ensemble D_1+H, so t monotone croissante: $\varphi_1(P)\leq\varphi_2(P)\leq\varphi_3(P)\leq\ldots$ et que chaque $\varphi_n(P)$ joui de la propriété A. Si l'on a $\varphi(P)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(P)$ partout dans D_1 et $\varphi(P)\geq\lim\varphi_n(P)$ dans H, la fonction $\varphi(P)$ jouit alors de la même propr été A.*

La démonstration du Lemme 1 est toute simple. En effect, supposons par impossible que $m_{D_1}>m_H$ et choisissons un nomble positif ϵ tel que $0<\epsilon<m_{D_1}-m_H$. Il existe alors un point P_1 de D_1 où l'on a $\varphi(P_1)>m_H+\epsilon$. Comme $\varphi(P_1)=\lim\varphi_n(P_1)$, $P_1\in D_1$, il existe un n tel que $\varphi_n(P_1)>m_H+\epsilon$. Puisque, d'autre part, $\varphi_n(P)$ jouit de la propriété A, il existe un point P_2 de H où l'on a encore l'inégalité: $\varphi_n(P_2)>m_H+\epsilon$. $\varphi_n(P)(n=1, 2, 3,\ldots)$ étant monotone croissante, nous avons $\lim\varphi_n(P_2)\geq\varphi_n(P_2)$. Donc, d'après l'hypothèse, $\varphi(P_2)\geq\lim\varphi_n(P_2)>m_H+\epsilon$, $p_2\in H$, $\epsilon>0$, ce qui contredit à la définition de m_H.

2. Revenons à la démonstration du principe. Désignons par $T_n(n=1, 2, 3,\ldots)$ la borne inférieure des valeurs t où l'on a $\Phi(t)\geq n$. D'après (2), T_n existent toujours et sont positives à partir d'un certain indice n_0. Nous avons de plus $T_1\leq T_2\leq T_3\leq\ldots$ et $\lim T_n=+\infty$. Prenons un indice n tel que $T_n>0$ et posons $\Phi_n^*(t)=\Phi(t)$ pour $0<t\leq T_n$ et $\Phi_n^*(t)=\{D_-\Phi(T_n)\}\cdot(t-t_n)+\Phi(T_n)$ pour $T_n<t<+\infty$, et

$$u_n^*(P)=\int_F\Phi_n^*\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)d\mu_Q.$$

Nous avons $D_-(T_n)=D_-\Phi_n^*(T_n)$, $\Phi(T_n)=\Phi_n^*(T_n)$ et par suite *le petentiel $u_n^*(P)$ est quasi-newtonien.*

D'abord, comm $\Phi(t)$ est convexe, on a $D_-\Phi(T_n)\leq D_-\Phi(t)$ pour $T_n\leq t<$

(5) Ce principe, pour le cas du potentiel newtonien, a été conjecturé par M. G. C. Evans et établi pour la première fois par M. A. Maria (The Potentjal of a Positive Mass and the Weight Function of Wiener, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 20, 19 34, pp. 485-489). M. O. Frostman l'a étendu au cas du potentiel généralisé d'ordre a (Cf. O. Frostman, loc. cit. pp. 25-26). Une démonstration simple et directe a été donnée par M. Y. Yosida (Sur le Principe du Maximum dans la Théorie du Potentiel, Proceedings of the Imperial Academy, vol. 17, 1941, pp. 476-478).

$+\infty$. Par suite, d'après la formule des accroissements finis, nous avons $\Phi_n^*(t) \leq \Phi(t)$. D'autre part, comme $\Phi(t)$ est monotone croissante, on a $D_-\Phi(T_n) \geq 0$. Donc, $\Phi_n^*(t) \geq \Phi(T_n) = n$ pour $T_n < t < +\infty$. Il vient ainsi $u_n(P) \leq u_n^*(P) \leq u(P)$ partout dans ω, et nous obtenons finalement

$$(4) \qquad u(P) = \lim u_r^*(P),\ P \in \omega\,.$$

Or, pour $n > n_0$, d'après la convexité de $\Phi(t)$ et l'inégalité $T_n \leq T_{n+1}$, on a $D_-\Phi(T_n) \leq D_-\Phi(T_{n+1})$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \Phi_n^*(t) &= \Phi_{n+1}^*(t) \text{ pour } 0 < t \leq T_n \\ &\leq \Phi(t) = \Phi_{n+1}^*(t) \text{ pour } T_n \leq t \leq T_{n+1} \\ = D_-\Phi(T_n)(t - t_{n+1}) + \Phi_n^*(T_{n+1}) &< \Phi_{n+1}^*(t) \text{ pour } T_{n+1} \leq t < +\infty. \end{aligned}$$

Il en resulte $\Phi_n^*(t) \leq \Phi_{n+1}^*(t)$, $0 < t < +\infty$ et

$$(5) \qquad u_n^*(P) \leq u_{n+1}^*(P),\ P \in \omega,\ n > n_0\,.$$

Ainsi, nous avons *vu*, d'après (4) et (5),

Lemme 2. *Tout potentiel de notre classe est la limite d'une suite monotone croissante des potentiels quasi-newtoniens.*

Dans la suite, nous appelerons (4) la "*deuxième formule d'app oximat on de* $u(P)$." Cette formule d'approximation nous fait voir, en vertu du Lemme 1, qu'il nous suffit d'établir le principe pour le cas quasi-newtonien.

3. Cas quasi-newtonien. Supposons que $u(P)$ soit quasi-newtonien. D'après la définition de m_{D_1}, il existe une suite des points P_j dans D_1 pour laquelle nous avons

$$(6) \qquad \lim_{i \to \infty} u(P_i) = \mathrm{m}_{D_1}\,.$$

D'aute part, comme $u(P)$ est sous-harmonique dans D_1, (d'après le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques) nous pouvons supposer, sans restreindre la generalite, que la suite P_i tende vers un point M de H. Decrovons, maintenant, une petite sphère regulière[6] $S_1(M)$ au centre et dont le rayon est inferieur à $1/(2t_0)$. Alors, nous pouvons écrire

$$(7) \qquad u(P) = u_{\omega - S_1}(P) + u_{S_1}(P)$$

où

$$u_{\omega - S_1}(P) = \int_{F - S_1(M)} \Phi(1/r_{PQ})d\mu_Q,\ u_{S_1}(P) = \int_{F \cdot \overline{S_1(M)}} \Phi(1/r_{PQ})d\mu_Q\,.$$

Si P appartient à la sphère $S_1(M)$ et si Q parcourt $F \cdot \overline{S_1(M)}$, on a $r_{PQ} < 1/t_0$. Donc, le deuxième membre peut s'écrire

$$(8) \quad u_{S_1}(P) = \{D_-\Phi(t_0)\}\omega(P) + [\Phi(t_0) - \{D_-\Phi(t_0)\}t_0] \cdot \mu(F \cdot S_1(M)),$$

où l'on pose

(6) Un ensemble s'appelle régulier, si sa frontière ne porte aucune masse.

$$\omega(P)=\int_{F\cdot\overline{S_1(M)}} 1/r_{PQ}\, d\mu_Q$$

Or, on voit bien que $\omega(P)$ est un potentiel newtonien, en d'après un corollaire de M. A. Maria nous avons

$$\overline{\lim_{P\to\infty}}\, \omega(P)(P\in D_1)\leq \overline{\lim_{P^*\to\infty}}\, \omega(P^*)(P^*\in H)\,. \tag{9}$$

Prenons encore une suite des points P_i^* de H qui tend vers M et telle que

$$\lim_{i\to\infty} \omega(P_i^*)=\overline{\lim_{P^*\to P}}\, \omega(P^*)(P^*\in H)\,. \tag{10}$$

(9) et (10) avec (8) entrainent evidemment

$$\lim_{i\to\infty} u_{S_1}(P_i)\leq \lim_{i\to\infty} u_{S_1}(P_i^*)\,. \tag{11}$$

Considérons maintenant une sphère $S_2(M)$ au centre M et dont le rayon est egal à la moitie de celui de $S_1(M)$. Si P parcourt la sphère $S_2(M)$, la fonction $\Phi(1/r_{PQ})$, comme fonction de P, est continue, et cela uniformement par rapport à Q variable dans $F-S_1(M)$. Donc, le premier membre de (7) est continue par rapport à P, $P\in S_2(M)$; en particulier, elle est continue au point M. Puisque $\lim P_i=\lim P_i^*=P$, nous avons alors

$$\lim_{i\to\infty} u_{\omega-S_1}(P_i)=\lim_{i\to\infty} u_{\omega-S_1}(P_i^*)\,. \tag{12}$$

Ainsi, (11) et (12), avec (7), nous donnent

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, u(P_i)\leq \lim_{i\to\infty} u(P_i^*)\,, \tag{13}$$

et, en vertu de la relation (6) avec la définition de m_H, il en résulte finalement $m_{D_1}\leq m_H$, c.q.f.d.

Les raisonnements[7] de MM. A. Maria et O. Frostman nous font conclure immediatement le

Corollaire 1. *Soit M un point de H. En désignant por P et P^* deux points variables, l'un dans D_1, l'autre dans H, on a l'inégalité:*

$$\lim_{P\to P} u(P)(P\in D_1)\leq \lim_{P^*\to P} u(P^*)(P^*\in H)\,. \tag{14}$$

Corollaire 2.[8] *Soit M un point (fixe) de H. Si le potent el $u(P)$ est continu au point M, considéré comme fonction définie sur H, il est encore continu au même point, considéré comme fonction définie sur D_1+H.*

(7) A. Maria, loc. cit. p. 487. Cf. aussi O. Frostman, loc. cit. p. 69. Théorème 2.

(8) Cf. G. C. Evans: Application of Poincaré's sweeping out process, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. vol. 19, 1933. p. 458, Lemme 1. ——On potentials of positive mass I., Transactions of the American Mathematical Society, vol. 37 (1935) p. 238, et O. Frostman, loc. cit. p. 26. Corollaire de lemme 1.

Demonstration. D'après (14), nous voyons qu'il nous suffit d'établir

$$\varliminf_{P\to\infty} u(P)(P \in D_1) \geq u(M) \tag{15}$$

Or, les fonctions $u_n(P)$ sont continues partout dans ω et $u_1(P) \leq u_2(P) \leq \ldots.$ Donc, d'après la formule d'approximation, $u(P)$ est semi-continue inférieurement partout dans l'espace. D'où l'inégalite (15).