35. *Der Bezoutsche Satz in zweifach projektiven Räumen.*

von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokio.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 26, 1945.)

Der Bezoutsche Satz über Schnittpunkte einer algebraischen Kurve mit Hyperflächen in einem projektiven Raum lässt sich sofort auf den Fall einer Kurve in einem mehrfach projektiven Raum verallgemeinern, wenn die Charakteristik des Grundkörpers Null ist[1]. Ist aber die Charakteristik nicht gleich Null, dann treten inseparable Körpererweiterungen auf und der Sachverhalt wird etwas umständlicher. Im folgenden soll gezeigt werden, dass der Bezoutsche Satz auch auf diesen Fall erweitert werden kann. Wir beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf den Fall der zweifach projektiven Räume. Dieser Fall besitzt anderseits wegen Anwendung auf die Korrespondenztheorie der algebraischen Kurven eine besondere Wichtigkeit[2]. Daran anschliessend werden wir einige Bemerkungen über Schnittkurven von einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Hyperflächen angeben.

Es sei P_l bzw. P_m ein l- bzw. m-dimensionaler projektiver Raum über einem Grundkörper k mit der Charakteristik p ($=$Null oder eine Primzahl). Wir nehmen k als algebraisch abgeschlossen an. Die Punkte von P_l bzw. P_m sind bis auf beliebige Faktoren λ bestimmte, nicht sämtlich verschwindende $(l+1)$- bzw. $(m+1)$-tupel $\xi=(\xi_0, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_l)$ bzw. $\eta=(\eta_0, \eta_1, \ldots\ldots, \eta_m)$, wobei ξ_i bzw. η_j Elemente in einem gewissen Erweiterungskörper von k sind.[3] Wir bezeichnen dann mit $P_{l,m}$ den zweifach projektiven Raum, der das Produkt von P_l und P_m ist. Die Punkte von $P_{l,m}$ sind also die Gesamtheit der Paare (ξ, η).

Nun sei $K=k(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a)$ ein rationaler Funktionenkörper der Unbestimmten $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a$ über k und ξ ein in bezug auf diesem Körper algebraischer Punkt in P_l, d.h. die Verhältinisse der Koordinaten ξ_i $(i=0, 1,$

---

1) Vgl. B. L. van der Waerden, Zur algebraische Geometric I, Math. Ann. 108 (1933), XIII, Math. Ann. 115 (1939).

2) Algebraische Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven können bekanntlich durch Kurven in geeigneten zweifach projektiven Räumen dargestellt werden. Vgl. die nachfolgende Arbeit des Verfassers in diesen Proceedings.

3) Nach v. d. Waerden nehmen wir solchen Erweiterungskörper nicht als fest an, sondern vielmehr als ein wachsender Körper im Laufe einer geometrischen Betrachtung. Vgl. B. L. van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin (1939), S. 105 oder l.c.1).

......, l) von ξ seien über K algebraisch. Den durch die Adjunktion dieser Verhältnisse entstehenden Erweiterungskö rper von K bezeichnen wir mit

$$K_1 = K(\xi) = k(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a; \xi).$$

Der reduzierte Grad bzw. der Exponent der Erweiterung K_1/K sei n_1 bzw. p^{e_1}[1]. Wir bilden nun mit Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$ den Ausdruck

$$(1) \qquad \prod_{\nu=1}^{n_1}(u, \xi^{(\nu)})^{p^{e_1}} = \prod_{\nu=1}^{n_1}(u_0\xi_0^{(\nu)} + u_1\xi_1^{(\nu)} + \ldots\ldots + u_n\xi_n^{(\nu)})^{p^{e_1}},$$

wobei $\xi^{(\nu)}$ alle verschiedene konjugierte Punkte von ξ in bezug auf K[2] durchläuft. Nach W.-L. Chow[3] kann man durch geeignete Normierung der Koordinaten von ξ erreichen, dass der Ausdruck (1) eine irreduzible Form von u_i und w_j über k wird. Wir heissen in diesem Fall, dass die Koordinaten von ξ in bezug auf $k(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a)$ normiert sind.

Es seien ξ, η wie oben über $k(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a)$ algebraische Punkte in P_n bzw. P_m und

$$(2) \qquad f(x, y, a) = a_0x_0^sy_0^t + a_1x_0^{s-1}x_1y_0^t + \ldots\ldots, \ st > 0$$

eine allgemeine Form von $x = (x_0, x_1, \ldots\ldots, x_l)$ und $y = (y_0, y_1, \ldots\ldots, y_m)$ mit dem Grad (s, t). Die Koeffizienten a_λ sind also Unbestimmten. Mit normierten Koordinaten von ξ, η bilde man

$$F(w, a) = \prod_{\nu=1}^{n} f(\xi^{(\nu)}, \eta^{(\nu)}, a)^{p^e},$$

wo n bzw. p^e den reduzierten Grad bzw. den Exponent von $k(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a, \xi, \eta)/k(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_a)$ bedeutet und ν alle verschiedenen Konjugierten dieser Erweiterung durchläuft. Man kann dann sofort beweisen, dass $F(w, a)$ eine irreduzible Form von w, a über k ist[4].

Nun sei C eine irreduzible Kurve in $P_{m,n}$ und $f(x, y, a)$ die in (2) angegebene allgemeine Form vom Grad (s, t). Ferner sei $g(x, y, b)$ eine andere allgemeine Form vom Grad (s', t'), $s't' > 0$ mit unbestimmten Koeffizienten b_μ. Die durch $f(x, y, a) = 0$ bzw. $g(x, y, b) = 0$ bestimmte Hyperfläche H_a bzw. H_b in $P_{m,n}$ schneidet die Kurve C in ihren allgemeinen Punkten $(\xi^{(\lambda)}, \eta^{(\lambda)})$ bzw. $(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)})$, welche über $k(a)$ bzw. $k(b)$[5] algebraisch und einander konjugiert sind. Für normierte Koordinaten von ξ, η sind dann die Ausdrücke

1) Wir wollen nicht e, sondern p^e als Exponent bezeichnen. Es soll $p^e = 1$ bedeuten, wenn $p = 0$.

2) Das bedeutet, dass die Verhältnisse der Koordinaten in bezug auf K einander konjugiert sind.

3) W.-L. Chow, Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Korper, Math. Ann. 114 (1937).

4) Vgl. Chow, l.c.

5) Den Körper $k\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots.\right)$ bezeichnen wir kurz mit $k(a)$. Ebenso ist mit $k(b)$.

$$F(a, b) = \prod_{\mu=1}^{n'} f(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)}, a)^{p^{e'}}$$

$$G(a, b) = \prod_{\lambda=1}^{n} g(\xi^{(\lambda)}, \eta^{(\lambda)}, b)^{p^e}$$

nach dem oben Bemerkten beide irreduzible Formen in $k[a, b]$. n, p^e und $n', p^{e'}$ sind dabei reduzierte Grade und Exponenten der Erweiterungen $k(a,\xi,\eta)/k(a)$ und $k(b, \xi', \eta')/k(b)$. Genau wie in einem gewöhnlichen (einfachen) projectiven Raum[1] schliesst man dann sogleich, dass $F(a, b)$ und $G(a, b)$ (bis auf einem Faktor in k) zusammenfallen und dass die Exponenten $p^e, p^{e'}$ gleich 1 sind. $k(a, \xi, \eta)/k(a)$ und $k(b, \xi, \eta)/k(b)$ sind also separable Erweiterungen. Hier tritt kein besonderer Umstand im Vergleich mit dem Fall der gewöhnlichen projektiven Räume auf.

Wir untersuchen nun die Schnittpunkte von C mit der Hyperflache H_{a_1}, welche durch eine allgemeine Form $f_1(x, a_1)$ in $P_{l,m}$ bestimmt wird, die in x den Grad $s(>0)$ besitzt, aber y nicht enthält $(t=0)$. Ausgenommen der ausgeartete Fall, dass C mit einem Punkt ζ in P_l und einer Kurve C_2 in P_m in der Form

$$(\zeta) \times C_2$$

dargestellt werden kann, besitzt C immer Schnittpunkte $(\bar{\xi}^{(\nu)}, \bar{\eta}^{(\nu)})$ mit H_{a_1}, welche über $k(a_1)$ algebraisch und einander konjugiert sind[2]. Für normierte Koordinaten sind dann die beiden Ausdrücke

$$F_1(a_1, b) = \prod_{\mu=1}^{n''} f_1(\xi'^{(\mu)}, a_1)^{p^{e''}},$$

$$G(a_1, b) = \prod_{\nu=1}^{n_1} g(\bar{\xi}^{(\nu)}, \bar{\eta}^{(\nu)}, b)^{p^{e_1}}$$

irreduzible Formen in $k[a_1, b]$, wo μ bzw. ν alle verschiedene Konjugierten von ξ' bzw. $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ in bezug auf $k(b)$ bzw. $k(a_1)$ durchläuft und $p^{e''}, p^{e_1}$ die Exponenten von $k(b, \xi')/k(b)$ und $k(a_1, \bar{\xi}, \bar{\eta})/k(a_1)$ sind. Man beweist dann genau wie oben, dass $F_1(a_1, b)$ mit $G(a_1, b)$ bis auf einen konstanten Faktor zusammenfällt. $k(b, \xi', \eta')$ ist aber, wie schon bemerkt, über $k(b)$ separabel. Der Exponent $p^{e''}$ von $k(b, \xi')/k(b)$ ist folglich gleich 1. Fern r fällt $k(b, \xi')$ in diesem Fall mit $k(b, \xi', \eta')$ zusammen. Zum Beweis setze man

$$n^* = [k(b, \xi', \eta') : k(b, \xi')], \text{ also } n' = n^* n''.^{3)}$$

Es gibt dann n^* Schnittpunkte von C mit H_b, die erste Koordinate ξ' haben. Eine durch (ξ', η') hindurchgehende allgemeine Hyperfläche vom Grad (s', t')

---

1) Vgl. Chow, l. c.

2) Vgl. v. d. Waerden, l. c. 3), S. 146.

3) n'' war der reduzierte Grad von $k(b, \xi')/k(b)$. Da aber $k(b, \xi')/k(b)$ eine separable Erweiterung ist, so ist es gleich $[k(b, \xi') : k(b)]$.

schneidet aber die Kurve C ausser in (ξ', η') in keinem Punkt mit der ersten Koordinate ξ' mehr, denn die Hyperebene $\xi'_1x_0-\xi'_0x_1=0$ in $P_{l,m}$ schneidet C nur in endlichvielen Punkten, falls C nicht von der Form $(\zeta)\times C_2$ ist. Es muss also $n^*=1$ und folglich $k(b, \xi')=k(b, \xi', \eta')$ sein und es gilt

$$(3) \qquad F_1(a_1, b)=\prod_{\mu=1}^{n'} f_1(\xi'^{(\mu)}, a_1)\,, \quad n'=[k(b, \xi', \eta'):k(b)]\,.$$

Wir betrachten nun den Exponent p^{e_1}. Nach der Theorie der algebraischen Korrespondenzen haben $\bar{\xi}, \bar{\eta}, a_1$ isomorphe algebraische Relationen über k wie ξ^*, η^*, a_1^*, die man erhält, wenn man durch einen allgemeinen Punkt (ξ^*, η^*) von C eine allgemeinste Hyperfläche $f_1(x, a_1^*)$ vom Grad s legt[1]. Setzt man

$$\begin{aligned} f_1(x, a_1)&=a_{10}x_0^s+a_{11}x_0^{s-1}x_1+a_{12}x_0^{s-2}x_1^2+\ldots\ldots \\ &=a_{10}x_0^s+f_1'(x, a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots)\,, \end{aligned}$$

so lassen sich $a_{1\nu}^*$ z.B. so bestimmen, dass für unbestimmte $a_{11}^*, a_{12}^*, \ldots\ldots$

$$a_{10}^*=-\frac{f_1'(\xi^*, a_{11}^*, a_{12}^*, \ldots\ldots)}{\xi_0^{*s}}$$

gesetzt wird[2]. Es gilt dann

$$\begin{aligned} (4) \qquad k(a_1, \bar{\xi}, \bar{\eta})&\cong k(a_1^*, \xi^*, \eta^*)=k(\xi^*, \eta^*, a_{11}^*/a_{10}^*, a_{12}^*/a_{10}^*\ldots\ldots) \\ &=k(\xi^*, \eta^*, a_{12}^*/a_{11}^*, a_{13}^*/a_{11}^*, \ldots\ldots) \end{aligned}$$

und ähnlich

$$(5) \qquad k(a_1, \bar{\xi})\cong k(a_1^*, \xi^*)=k(\xi^*, a_{12}^*/a_{11}^*, a_{13}^*/a_{11}^*, \ldots\ldots)\,.$$

Da ξ^*, η^* und a_{12}^*/a_{11}^*, $a_{13}^*/a_{11}^*, \ldots\ldots$ von einander algebraisch unabhängig sind, so folgt aus (4), (5) dass der Grad und Exponent von $k(a, \bar{\xi}, \bar{\eta})/k(a_1, \xi)$ denjenigen von $k(\xi^*, \eta^*)/k(\xi^*)$ gleich sind.

Nun ist $\bar{\xi}$ als Schnittpunkt der auf P_l projizierenden Bildkurve von C mit der allgemeinen Hyperflache $f_1(x, a_1)=0$ in P_l sicher separabel über $k(a_1)$. p^{e_1} ist daher gleich dem Exponent von $k(a_1, \bar{\xi}, \bar{\eta})/k(a_1, \bar{\xi})$, also nach oben denjenigen von $k(\xi^*, \eta^*)/k(\xi^*)$. Setzt man alsdann

$$r_1=[k(\xi^*, \eta^*):k(\xi^*)]=[k(a_1, \bar{\xi}, \bar{\eta}):k(a_1, \bar{\xi})]=\bar{r}_1p^{e_1}\,,$$

so fällt $\bar{r}_1$ mit dem reduzierten Grad von $k(\xi^*, \eta^*)/k(\xi^*)$ zusammen, da $k(\xi^*)$ ein algebraischer Funktionenkörper von einer Veränderlichen ist[3]. Daraus folgt auch

$$(6) \qquad n_1=r_1[k(a_1, \bar{\xi}):k(a_1)]\,.$$

Nun definieren wir die Multiplizität eines Schnittpunktes einer irreduziblen Kurve C mit einer allgemeiner Hyperfläche $f(x,y,a)=0$ vom Grad (s,t), $st\geqq 0$ folgendermassen: es ist gleich

1) Vgl. z.B. v.d. Waerden, l. c. 3), Kap. V.

2) Man kann natürlich $\xi_0\neq 0$ annehmen.

3) Vgl. z.B. M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper, I, Crelle's Jour. 177 (1937).

i) 1, für $st > 0$,

ii) dem Expenent p^{e_1} von $k(\xi^*, \eta^*)/k(\xi^*)$, für $t=0$,

iii) dem Exponent p^{e_2} von $k(\xi^*, \eta^*)/k(\eta^*)$, für $s=0$,

wobei (ξ^*, η^*) ein allgemeinen Punkt von C über k bedeutet.

Es sei bemerkt, dass die so definierte Multiplizität allenfalls nur von C abhängig ist.

Nach dieser Definition kann man den oben Bewiesenen in folgender einfacher Form zusammenfassen.

Satz 1. Es seien $f(x, y, a)$, $g(x, y, b)$ allgemeine Formen von Graden (s, t), (s', t') und C eine irreduzible Kurve in $P_{l,m}$. Schnittpunkte von C mit den Hyperflächen $f(x, y, a)=0$, $g(x, y, b)=0$ seien, mit Multiplizitäten versehen, $(\xi^{(\lambda)}, \eta^{(\lambda)})$, $\lambda=1, \ldots\ldots, \alpha$, $(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)})$, $\mu=1, \ldots\ldots, \beta$. Ist dann $st>0$ oder $s't'>0$, so gilt nach geeigneter Normierung der Koordinaten

$$\prod_{\mu=1}^{\beta} f(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)}, a) = \prod_{\lambda=1}^{\alpha} g(\xi^{(\lambda)}, \eta^{(\lambda)}, b) . \tag{7}$$

Satz 2. Die Multiplizität eines Schnittpunktes (ξ, η) von C mit einer allgemeinen Hyperfläche $f(x, y, a)=0$ ist gleich dem Exponent von $k(a, \xi, \eta)/k(a)$.

Satz 3. Es sei (ξ, η) ein allgemeiner Punkt von C und r_1, p^{e_1} der Grad und der Exponent von $k(\xi, \eta)/k(\xi)$. Ferner sei C_1 die auf P_l projizierende Bildkurve von C, welche wir nicht nulldimensional annehmen[1]. Die Schnittpunkte von C_1 mit einer allgemeinen Hyperfläche $f_1(x, a_1)=0$ in P_l seien $\xi^{(1)}, \ldots\ldots, \xi^{(g)}$, $g=[k(a_1, \xi^{(1)}):k(a_1)]$. Es gibt dann für jedes $\xi^{(\lambda)}$ genau r_1 Schnittpunkte von C mit $f_1(x, a_1)=0$ in $P_{l,m}$, deren erste Koordinaten gleich $\xi^{(\lambda)}$ sind und von diesen Schnittpunkten fallen je p^{e_1} einander zusammen.

Im folgenden bezeichnen wir die Gesamtheit der mit Vielfachheiten versehenen Schnittpunkte von C mit $f(x, y, a)=0$ immer mit

$$[C, f(x, y, a)] .$$

Nun seien $f(x, y, a)$, $f_1(x, y, a_1)$, $f_2(x, y, a_2)$ allgemeine Formen von Graden (s, t), (s_1, t_1), (s_2, t_2) und es gelte

$$s=s_1+s_2, \quad t=t_1+t_2, \quad st \geqq 0, \quad s_1t_1 \geqq 0, \quad s_2t_2 \geqq 0 .$$

Es gilt dann der

Satz 4. Setzt man

$$f(x, y, a^*)=f_1(x, y, a_1)f_2(x, y, a_2) ,$$

so geht $[C, f(x, y, a)]$ bei der relationstreuen Spezialisierung $a \rightarrow a^*$ in die Summe von $[C, f_1(x, y, a_1)]$ und $[C, f_2(x, y, a_2)]$.

---

1) Genau dann ist ja $k(\xi, \eta)/k(\xi)$ eine endliche Erweiterung.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass C wirklich $f_1(x, y, a_1)=0$ und $f_2(x, y, a_2)=0$ schneidet und setzen

$$[C, f(x, y, a)] = \{(\xi^{(\rho)}, \eta^{(\rho)}), \rho=1, \dots\dots\dots, \alpha\},$$
$$[C, f_1(x, y, a_1)] = \{(\xi'^{(\sigma)}, \eta'^{(\sigma)}), \sigma=1, \dots\dots, \beta\},$$
$$[C, f_2(x, y, a_2)] = \{(\xi''^{(\tau)}, \eta''^{(\tau)}), \tau=1, \dots\dots, \gamma\}.$$

Setzt man ferner

$$g(x, y, b) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}x_i y_j, \; [C, g(x, y, b)] = \{(\xi^{*(\omega)}, \eta^{*(\omega)}), \omega=1, \dots\dots, \delta\},$$

so gilt nach Satz 1, (7)

$$F(a, b) = \prod_\rho g(\xi^{(\rho)}, \eta^{(\rho)}, b) = \prod_\omega f(\xi^{*(\omega)}, \eta^{*(\omega)}, a),$$
$$F(a^*, b) = \prod_\omega f(\xi^{*(\omega)}, \eta^{*(\omega)}, a^*) = \prod_\omega f_1(\xi^{*(\omega)}, \eta^{*(\omega)}, a_1)\prod_\omega f_2(\xi^{*(\omega)}, \eta^{*(\omega)}, a_2)$$
$$= \prod_\sigma g(\xi'^{(\sigma)}, \eta'^{(\sigma)}, b)\prod_\tau g(\xi''^{(\tau)}, \eta''^{(\tau)}, b).$$

Geht $[C, f(x, y, a)]$ bei der Spezialsierung relationstreu in $\{(\bar\xi^{(\rho)}, \bar\eta^{(\rho)}), \rho=1, \dots\dots, \alpha\}$ über, so gilt[1]

$$F(a, b) = \prod_\rho g(\xi^{(\rho)}, \eta^{(\rho)}, b) \rightarrow F(a^*, b) = \prod_\rho g(\bar\xi^{(\rho)}, \bar\eta^{(\rho)}, b),$$

folglich

$$\prod_\rho g(\bar\xi^{(\rho)}, \bar\eta^{(\rho)}, b) = \prod_\sigma g(\xi', \eta', b)\prod_\tau g(\xi'', \eta'', b). \tag{8}$$

und daraus folgt sofort die Bahauptung.

Wir betrachten nun den Fall, dass C und $f_1(x, y, a_1)=0$ keinen Schnittpunkt haben. Dies geschieht genau dann, wenn $t_1=0$ und C von der Form $(\zeta)\times C_2$ ist. Ist ausserdem $t_2=0$, so ist auch $t=0$ und $[C, f(x, y, a)]$, $[C, f_1(x, y, a_1)]$, $[C, f_2(x, y, a_2)]$ sind sämtlich Nullmengen. Es bleibt also nichts zu beweisen.

Wir nehmen also an, dass $t>0$, $t_2>0$ gilt und dass C mit $f(x, y, a)=0$, $f_2(x, y, a_2)=0$ Schnittpunkte besitzt. Es gilt dann wie (8)

$$\prod_\rho g(\bar\xi^{(\rho)}, \bar\eta^{(\rho)}, b) = \prod_\omega f_1(\xi^{*(\omega)}, a_1)\prod_\tau g(\xi''^{(\tau)}, \eta''^{(\tau)}, b). \tag{9}$$

$F_1(a_1, b) = \prod_\omega f_1(\xi^{*(\omega)}, a_1)$ ist dabei eine Form in $k[a_1, b]$. Wir wollen nun zeigen, dass $F_1(a_1, b)$ nicht von b abhängt, indem wir aus der gegenteilige Voraussetzung einen Widerspruch ableiten. Man nehme also an, dass $F_1(a_1, b)$ von b abhänge. Man bestimmte alsdann $\bar b$ und die entsprechenden Spezialisierungen $\bar\xi^{*(\omega)}$ von $\xi^{*(\omega)}$ so, dass es für unbestimmte a_1

$$F_1(a_1, \bar b) = \prod_\omega f_1(\bar\xi^{*(\omega)}, a_1) = 0$$

gelte. So würde einer von $\bar\xi^{*(\omega)}$ einerseits auf $f_1(x, a_1)=0$, andererseits aber als

1) Vgl. v. d. Waerden, l.c. 3), S. 165 oder Chow, l.c. 6).

Spezialisierung von $\xi^{*(\omega)}$ auch auf C liegen, entgegen der Voraussetzung, dass C und $f_1(x, a_1)=0$ keinen Punkt gemein haben. $\prod_{\omega} f_1(\xi^{*(\omega)}, a_1)$ ist also von b unabhängig. Vergleicht man die beiden Seiten von (9) als Formen von b, so sieht man sofort, dass $[C, f(x, y, a)]$ bei $a \to a^*$ zu $[C, f_2(x, y, a_2)]$ übergeht. Genau so erledigt man den Fall, dass C mit $f_2(x, y, a_2)=0$ keinen Schnittpunkt besitzt. Der Satz ist also in allen Fällen bewiesen.

Nun definieren wir die Multiplizität eines Schnittpunktes (ξ^0, η^0) von C mit einer beliebigen Hyperfläche $f(x, y, a')=0$ wie üblich folgendermassen. Wir nehmen eine allgemeine Form $f(x, y, a)$ mit demselben Grad wie $f(x, y, a')$ und heissen dann die Zahl, die angibt, wie viele Punkte von $[C, f(x, y, a)]$ sich bei $a \to a'$ relationstreu zu (ξ^0, η^0) spezialisieren, die Multiplizität oder Vielfachheit von (ξ^0, η^0). Es ist bekannt, dass diese Multiplizität unabhängig von dem Spezialisierungsprozess eindeutig durch $a \to a'$ bestimmt wird[1]. Die Punktgruppe je mit Vielfachheiten versehener Schnittpunkte von C mit $f(x, y, a')=0$ bezeichnen wir wieder mit

$$[C, f(x, y, a')] \,.$$

Nach Definition ist dann bei $a \to a'$

$$(10) \qquad [C, f(x, y, a)] \to [C, f(x, y, a')]$$

und es gilt das Prinzip der Erhaltung der Anzahl[2].

Es sei noch bemerkt, dass bei einer ausgearteten Kurve C, Schnittpunkte mit der Multiplizität Null auftreten können. Z.B. kann $(\zeta) \times C_2$ wohl eine Hyperfläche $f_1(x, a_1')=0$ schneiden (d.h. $f_1(\zeta, a_1')=0$), obgleich $[(\zeta) \times C_2, f_1\ x, a_1')]$ eine Nullmenge ist. Mag dieser Umstand einmal unangenehm scheinen, so wird es sich später doch als zweckmässig erweisen.

Satz 5. Es seien $f_1(x, y, a_1'), f_2(x, y, a_2')$ beliebige Formen und

$$f(x, y, a')=f_1(x, y, a_1')f_2(x, y, a_2') \,.$$

Es gilt dann für eine irreduzible Kurve C

$$[C, f(x, y, a')]=[C, f_1(x, y, a_1')]+[C, f_2(x, y, a_2')] \,.$$

Beweis. Die $f(x, y, a'), f_1(x, y, a_1'), f_2(x, y, a_2')$ entsprechende allgemeine Formen bezeichnen wir mit $f(x, y, a)$, $f_1(x, y, a_1)$, $f_2(x, y, a_2)$. Es sei ferner

$$f(x, y, a^*)=f_1(x, y, a_1)f_2(x, y, a_2) \,.$$

Aus (10) folgt

$$(11) \qquad \begin{aligned} &[C, f(x, y, a)] \to [C, f(x, y, a')], && \text{bei } a \to a', \\ &[C, f_1(x, y, a_1)] \to [C, f_1(x, y, a_1')], && \text{bei } a_1 \to a_1', \\ &[C, f_2(x, y, a_2)] \to [C, f_2(x, y, a_2')], && \text{bei } a_2 \to a_2'. \end{aligned}$$

1) Vgl. v. d. Waerden, l.c. 3), S. 165.

2) Vgl. v. d. Waerden, l. c. 3), S. 164.

Nach Satz 4 gilt andererseits

(12) $[C, f(x, y, a)] \to [C, f_1(x, y, a_1)] + [C, f_2(x, y, a_2)]$, bei $a \to a^*$.

Denkt man sich also die Spezialisierung $a \to a'$ so geschehen, dass man erst die Spezialisierung $a \to a^*$, und dann $a^* \to a'$ $(a_1 \to a_1', a_2 \to a_2')$ vorgenommen hat, so erhält man aus (11), (12)

$$[C, f(x, y, a')] = [C, f_1(x, y, a_1')] + [C, f_2(x, y, a_2')] ,$$

w.z.b.w.

Wir bezeichnen nun mit $A(s, t)$ die Anzahl der Schnittpunkte von C mit einer Hyperfläche $f(x, y, a') = 0$ vom Grad (s, t). Nach dem Prinzip der Erhaltung der Anzahl hängt $A(s, t)$ nur von C und (s, t) ab und es gilt nach Satz 5

$$A(s_1 + s_2, t_1 + t_2) = A(s_1, t_1) + A(s_2, t_2) .$$

Daraus folgt

$$A(s, t) = sA(1, 0) + tA(0, 1) .$$

Nun sei (ξ, η) ein allgemeiner Punkt von C und C_1 bzw. C_2 die auf P_l bzw. P_m projizierende Bildkurve von C. ξ bzw η ist also ein allgemeiner Punkt von C_1 bzw. C_2. Der Grad von C_i $(i = 1, 2)$ bezeichnen wir mit γ_i $(i = 1, 2)$[1]. Setzt man ferner

$$r_1 = [k(\xi, \eta) : k(\xi)] , \qquad r_2 = [k(\xi, \eta) : k(\eta)]^{2)},$$

so folgt aus Satz 3

$$A(1, 0) = \gamma_1 r_1 , \qquad A(0, 1) = \gamma_2 r_2 .$$

Wir haben also die folgende Erweiterung des Satzes von Bezout:

Satz 6. Die Anzahl der Schnittpunkte einer irreduziblen Kurve C mit einer Hyperfläche $f(x, y, a') = 0$ vom Grad (s, t) wird gegeben durch

$$A(s, t) = s\gamma_1 r_1 + t\gamma_2 r_2 ,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, r_1, r_2$ wie oben angegeben durch C eindeutig bestimmte Zahlen sind.

Nun sei Γ_1 bzw. Γ_2 irreduzible algebraische Kurve in P_l bzw. P_m uud

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

das Produkt von Γ_1, Γ_2 in $P_{l,m}$. Es ist eine 2-dimensionale irreduzible Mannigfaltigkeit in $P_{l,m}$. Die Schnittkurven von Γ mit allgemeinen Hyperflächen $f(x, y, a) = 0$, $g(x, y, b) = 0$ bezeichnen wir mit C_a bzw. C_b. Diese Kurven sind über $k(a)$ bzw. $k(b)$ irreduzibel und ihr Schnitt ist eine über $k(a, b)$ irreduzible Punktgruppe[3], welche wir mit

(13) $$[\Gamma, f(x, y, a), g(x, y, b)]$$

---

1) Z. B. ist γ_1 die Schnittpunktsanzahl von C_1 mit einer allgemeinen Hyperebene in P_l. Wenn C_l nulldimensional ist, so setze man $\gamma_l = 0$. Vgl. v. d. Waerden, l.c. 3), S. 145.

2) γ_1, γ_2 haben eine wichtige Bedeutung in der Theorie der algebraischen Korrespondenzen. Vgl. die nachfolgende Arbeit des Verfassers.

3) Vgl. l.c. 3), S. 144.

bezeichnen. Jeder Schnittpunkt in (13) soll einfach gezählt werden. Das ist gerechtfertigt, da, wie gezeigt werden wird, jeder Punkt von (13) über $k(a, b)$ separabel ist. Zum Beweis unterscheiden wir verschiedene Fälle entsprechend den Graden (s, t), (s', t') von $f(x, y, a)$ und $g(x, y, b)$.

1) Fall $st>0$, $s't'>0$. (ξ, η) ist als Schnittpunkt von C_a mit $g(x, y, b)=0$ separabel über $\overline{k(a)}(b)$, wo $\overline{k(a)}$ eine algebraisch abgeschlossene Hülle von $k(a)$ bedeutet[1]. Ebenso ist es separabel über $\overline{k(b)}(a)$, wo $\overline{k(b)}$ eine algebraisch abgeschlossene Hülle von $k(b)$ ist. Daraus schliesst man sofort, dass (ξ, η) über $k(a, b)$ separabel ist.

2) Fall $st>0$, $s'>0$, $t'=0$. C_b ist dann die Vereinigung von $(\xi^{(\nu)})\times\Gamma_2$ $(\nu=1, \dots, \alpha)$, wo $\xi^{(\nu)}$ Schnittpunkte von Γ_1 mit $g(x, b)=0$ bedeuten. Es sei also $\xi=\xi^{(1)}$. ξ ist bekanntlich über $k(b)$ separabel. η ist dann ein Schnittpunkt von $(\xi)\times\Gamma_2$ mit $f(\xi, y, a)=0$. Die Koeffizienten von y in $f(\xi, y, a)$ sind ersichtlich von einander algebraisch unabhängig über $k(\xi)$. $f(\xi, y, a)$ ist daher eine allgemeine Form von y. η ist also über $k(\xi, a)$ separabel und (ξ, η) ist folglich separabel über $k(a, b)$. Genau so erledigt man die Fälle $st>0$, $s'=0$, $t'>0$; $s>0$, $t=0$, $s't'>0$; $s=0$, $t>0$, $s't'>0$; $s=0$, $t>0$, $s'>0$, $t'=0$; $s>0$, $t=0$, $s'=0$, $t'>0$.

3) Fall $s=0, t>0, s'=0, t'>0$ oder $s>0, t=0, s'>0, t'=0$. In diesem Fall gibt es keinen Schnittpunkt.

Damit haben wir in allen Fällen bewiesen, dass (ξ, η) über $k(a, b)$ separabel ist.

Daraus und aus der Definition der Schnittpunktgruppe einer Kurve mit Hyperflächen, erhält man

$$(14) \quad [\Gamma, f(x, y, a), g(x, y, b)] = [C_a, g(x, y, b)] = [C_b, f(x, y, a)].$$

Nach Satz 4 folgt dann, dass $[\Gamma, f(x, y, a), g(x, y, b)]$ in die Summe von $[\Gamma, f(x, y, a), g_1(x, y, b_1)]$ und $[\Gamma, f(x, y, a), g_2(x, y, b_2)]$ spezialisiert wird, wenn man g ins Produkt $g_1 g_2$ von allgemeinen Formen g_1 und g_2 spezialisiert.

Wir wollen nun die Vielfachheiten von irreduziblen Bestandteilen C_ν $(\nu=1, \dots, a)$ der Schnittkurve einer beliebigen Hyperfläche $f(x, y, a')$ mit Γ definieren. Um z.B. die Vielfachheit von C_1 zu bestimmen, nehme man eine $f(x, y, a')$ entsprechende allgemeine Form $f(x, y, a)$ und eine beliebige allgemeine Form $g(x, y, b)$, welche sicher mit C_1 Schnittpunkte besitzt. Man beweist dann leicht, dass $[\Gamma, f(x, y, a), g(x, y, b)]$ bei der Spezialisierung $a \to a'$ in eine Punktgruppe der Form

$$\sum_{\nu=1}^{a} \lambda_\nu [C_\nu, g(x, y, b)] \qquad (\lambda_\nu \geqq 0)$$

1) Vgl. die am Anfang gegebene Bemerkung.

übergeht, worin λ_1 sicher von Null verschieden ist. Ausserdem ist λ_1 von den Wahl von $g(x, y, b)$ unabhängig. Es seien nämlich $g_1(x, y, b_1)$, $g_2(x, y, b_2)$ beliebige C_1 schneidende allgemeine Formen und $g_3(x, y, b_3)$ eine allgemeine Form mit demselben Grad wie $g_1 g_2$. Ferner sei bei der Spezialisierung

$$[\Gamma, f(x, y, a), g_i(x, y, b_i)] \to \sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_{i\nu}[C_\nu, g_i(x, y, b_i)], \ \nu=1, 2, 3 .$$

Es gilt aber bei $g_3 \to g_1 g_2$

$$[\Gamma, f(x, y, a), g_3(x, y, b_3)] \to [\Gamma, f(x, y, a), g_1(x, y, b_1)] + [\Gamma, f(x, y, a), g_2(x, y, b_2)] ,$$

$$[C_\nu, g_3(x, y, b_3)] \to [C_\nu, g_1(x, y, b_1)] + [C_\nu, g_2(x, y, b_2)], \ \nu=1, \dots , \alpha .$$

Man erhält also wegen der Eindeutigkeit der Spezialisierung aus $[\Gamma, f(x, y, a), g_3(x, y, b_3)]$ durch $a \to a'$, $g_3 \to g_1 g_2$ dieselbe Punktgruppe

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_{3\nu}([C_\nu, g_1(x, y, b_1)] + [C_\nu, g_2(x, y, b_2)]) \tag{15}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_{1\nu}[C_\nu, g_1(x, y, b_1)] + \sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_{2\nu}[C_\nu, g_2(x, y, b_2)] .$$

Da $[C_\nu, g_i(x, y, b_i)]$ $(i=1, 2;\ \nu=1, \dots , \alpha)$ wie leicht ersichtlich, einander fremde Punktgruppen sind, so bekommt man aus (15)

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{31} ,$$

wie behauptet wurde.

Die so für jede C_ν definierte Zahl λ_ν nennen wir die Vielfachheit von C_ν[1] und bezeichnen das mit diesen Vielfachheiten versehne Kurvensystem mit $[\Gamma, f(x, y, a')]$:

$$[\Gamma, f(x, y, a')] = \sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_\nu C_\nu .$$

Nun sei $g(x, y, b')$ eine beliebige Spezialisierung von $g(x, y, b)$. Es gilt nach der Definition der Schnittpunktgruppen

$$[C_a, g(x, y, b)] = [\Gamma, f(x, y, a), g(x, y, b)] \to [C_a, g(x, y, b')] ,$$
$$[C_\nu, g(x, y, b)] \to [C_\nu, g(x, y, b')]$$

bei $b \to b'$. Andererseits gilt auch nach der Definition

$$[\Gamma, f(x, y, a), g(x, y, b)] \to \sum_{\nu=1}^{\alpha} \lambda_\nu [C_\nu, g(x, y, b)], \text{ bei } a \to a' .$$

Daraus folgt dann sofort der folgende

Satz 7. Für beliebige Formen $f(x, y, a')$, $g(x, y, b')$ gilt

$$[\Gamma, f(x, y, a'), g(x, y, b')] = [[\Gamma, f(x, y, a')], g(x, y, b')]$$
$$= [[\Gamma, g(x, y, b')], f(x, y, a')] .$$

1) Vgl. v. d. Waerden, Zur algebraische Geometrie, VI, Math. Ann. 110 (1935).