34. Zur Theorie der algebraischen Korrespondenzen I. Schnittpunktgruppen von Korrespondenzen.

von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokio.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 26, 1945.)

Die Schnittpunktgruppen von algebraischen Korrespondenzen der algebraischen Kurven sind im klassischen Fall erst von F. Severi zweckmässig definiert worden[1]. In dieser Note wollen wir dieselben auch für Kurven über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper definieren und einige Eigenschaften davon ableiten. Wir folgen dabei durchaus der algebraisch-geometrischen Methode, welche von v.d. Waerden streng begründet worden ist[2].

Es sei also Γ_1 eine irreduzible singularitätenfreie algebraische Kurve in einem l-dimensionalen projektiven Raum P_l über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k und Γ_2 eine ebensolche Kurve in einem m-dimensionalen Raum P_m über k. Es sei ferner

$$P_{l,m}=P_l\times P_m\,,\qquad \Gamma_{12}=\Gamma_1\times\Gamma_2\,.$$

$P_{l,m}$ ist ein zweifach projektiver Raum über k und Γ_{12} eine irreduzible 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in $P_{l,m}$[3]. Algebraische Korrespondenzen zwischen Γ_1 und Γ_2 werden alsdann durch Systeme von endlichvielen, mit beliebigen Vielfachheiten versehenen irreduziblen Kurven über Γ_{12} gegeben. Wir wollen zunächst die Schnittpunktgruppe von zwei verschiedenen irreduziblen Korrespondenzen, d.h. die von zwei irreduziblen Kurven auf Γ_{12} definieren[4].

Es seien C, D verschiedene irreduzible Kurven auf Γ_{12}. Wir nehmen einen allgemeine $(l-2)$-bzw. $(m-2)$-dimensionalen linearen Raum $L^{(1)}_{l-2}$ bzw. $L^{(2)}_{m-2}$ in P_l bzw. P_m und einen beliebigen Punkt (a, b) in C. Verbindet man a mit einem Punkt a' in $L^{(1)}_{l-2}$ und b mit einem Punkt b' in $L^{(2)}_{m-2}$ und bezeichnet man diese Linien mit $L^{(1)}_1$, $L^{(2)}_1$, so erzeugt, wie ersichtlich, das Produkt

$$L_2=L^{(1)}_1\times L^{(2)}_1$$

1) F. Severi, Trattato di geometria algebrica, vol. 1, Bologna (1926). Siehe auch F. Severi, Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie, Abh. Hamb., 9 (1933).

2) Vgl. eine Serie von Abhandlungen "Zur algebraischen Geometrie" in Math. Ann. Man vergleiche auch v.d. Waerden "Einführung in die algebraische Geometrie," Berlin (1939).

3) Vgl. K. Iwasawa, Der Bezoutsche Satz in zweifach projektiven Räumen, in diesen "Proceedings," zitiert mit "B". Wir benutzen im folgenden oft dieselbe Bezeichnungen oder Schreibweisen wie in "B".

4) Vgl. v. d. Waerden, Zur algebraischen Geometrie XIV, Math. Ann. 115 (1938).

eine irreduzible Hyperfläche H in $P_{l,m}$, wenn (a, b) in C, a' in $L_{l-2}^{(1)}$ und b' in $L_{m-2}^{(2)}$ von einander unabhängig durchlaufen. Als Multiplizität (Vielfachheit) eines Schnittpunktes von C, D nehmen wir die Multiplizität dieses Punktes in $[D, H]$[1] und bezeichnen die mit diesen Vielfachheiten versehene Schnittpunktgruppe von C, D mit

$$[C, D]\,.$$

Für allgemeine

$$C=\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_i C_i\,,\quad D=\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j D_j\quad (C_i, D_j\text{: irreduzibel und } C_i \neq D_j)\,,$$

definieren wir

$$[C, D]=\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\lambda_i\mu_j[C_i, D_j]\,.$$

Wir nehmen C, D wieder als irreduzibel an und setzen mit obigen H

$$(1)\qquad [\Gamma_{12}, H]=\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_i C_i\,,\qquad C_1=C^{2)}.$$

Man beweist dann wie im gewöhnlichen Fall[3], dass kein von $L_{l-2}^{(1)}, L_{m-2}^{(2)}$ unabhängiger Punkt von $[\Gamma_{12}, H]$ in C_i $(i\geqq 2)$ liegt. Es gilt ferner

$$\lambda_1=1\,.$$

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, dass C ausgeartet ist, d.h. dass $C=(a)\times\Gamma_2$ oder $C=\Gamma_1\times(b)$ ist. Im Fall $C=(a)\times\Gamma_2$ wird H ersichtlich durch $l(x, u')=0$ gegeben, wo $l(x, u')$ eine durch a hindurchgehende allgemeinste Form in P_l bedeutet. λ_1 ist dann nach Definition[4] die Multiplizität eines in C_1 enthaltenen Schnittpunktes von Γ_{12}, $l(x, u')=0$ mit einer allgemeinen Hyperfläche $\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}c_{ij}x_iy_j=0$ in $P_{l,m}$. Nun gehen die Schnittpunkte von Γ_1 mit einer allgemeinen linearen Form $l(x, u)$ bei der Spezialisierung $u\to u'$ wegen der Singularitätenfreiheit von Γ_1 alle in verschiedene Schnittpunkte von Γ_1 mit $l(x, u')$ über. λ_1 ist also gleich der Multiplizität eines Schnittpunktes von Γ_2 mit $\sum_{j=0}^{m}(\sum_{i=0}^{l}c_{ij}a_i)y_j=0$, wenn $a=(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_l)$ gesetzt wird[5]. Da aber $\sum_{j=0}^{m}(\sum_{i=0}^{l}c_{ij}a_i)y_j=0$ auch eine allgemeine Hyperebene in P_m ist, so folgt daraus $\lambda_1=1$ in bekannter Weise. Man erledigt ebenso den Fall $C=\Gamma_1\times(b)$.

Nun sei C nicht ausgeartet. Man nehme $l-1$ $L_{l-2}^{(1)}$ bestimmende allgemeine Punkte $a^{(1)}, \ldots\ldots, a^{(l-1)}$ und einen anderen allgemeinen Punkt q in P_l. Die von $L_{l-2}^{(1)}$ und q erzeugte Hyperebene in P_l wird dann durch

1) $[D, H]$ bedeutet die Schnittpunktgruppe von D mit H, vgl. "B".

2) $[\Gamma_{12}, H]$ bedeutet das Schnittkurvensystem von Γ_{12} mit H, vgl. "B".

3) Vgl. v. d. Waerden, l.c. 4).

4) Vgl. "B".

5) Vgl. "B". Man vergleiche auch den folgenden Schluss für den nicht ausgearteten Fall.

$$
(2) \quad \begin{vmatrix} x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots, x_l \\ q_0, q_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_l \\ a_0^{(1)}\, a_1^{(1)}, \ldots\ldots\ldots, a_l^{(1)} \\ \vdots \\ a_0^{(l-1)}, a_1^{(l-1)}, \ldots, a_l^{(l-1)} \end{vmatrix} \equiv u_0x_0 + u_2x_1 + \cdots\cdots + u_lx_l = 0 ,
$$

$$
(3) \quad u_i = \pi_{i0}q_0 + \cdots + \pi_{i,i-1}q_{i-1} + \pi_{i,i+1}q_{i+1} + \cdots + \pi_{i,l}q_l \quad (i=0, 1, \ldots, l)
$$

gegeben, wobei $\pi_{i,j}$ die Plückerschen Koordinaten von $L_{l-2}^{(1)}$ sind. Ebenso wird die von $L_{m-2}^{(2)}$ und einem allgemeinen Punkt q' von P_m erzeugte Hyperebene von P_m durch

$$
(4) \quad v_0y_0 + v_1y_1 + \cdots\cdots \quad + v_my_m = 0
$$

$$
(5) \quad v_i = \pi_{i0}'q_0' + \cdots\cdots + \pi'_{i,i-1}q'_{i-1} + \pi'_{i,i+1}q'_{i+1} + \cdots\cdots + \pi'_{i,m}q'_m
$$

gegeben, wobei π'_{ij} wieder die Plückerschen Koordinaten von $L_{m-2}^{(2)}$ bedeuten. Da (2) eine allgemeine Hyperebene in $P_{l,m}$ gibt, so sind die Schnittpunkte von (2) mit C sämtlich allgemeine Punkte von C über k und einander konjugiert über $k(u)$. Wir nehmen einen solchen Punkt (ξ', η'). ξ' ist dann als Schnittpunkt von (2) mit der auf P_l projizierenden Bildkurve von C separabel über $k(u)$, also umsomehr über $k(\pi, q)$. Der Exponent p^{e}[1] von η' über $k(\pi, q)$ ist folglich gleich denjenigen von η' über $k(\xi', \pi, q)$, welcher andererseits dem Exponent von η' über $k(\xi')$ gleich ist[2]. Man bilde mit über $k(\pi, q)$ normierten Koordinaten[3]

$$
(6) \quad F(q,q', \pi,\pi') = \prod_{\nu=1}^{n'} (v, \eta^{(\nu)})^{p^e} = \prod_{\nu=1}^{n'} (v_0q_0^{(\nu)} + v_1\eta_1^{(\nu)} + \cdots\cdots + v_m\eta_m^{(\nu)})^{p^e},
$$

wobei $\eta^{(\nu)}$ alle verschiedenen konjugierten Punkte von η' über $k(\pi, q)$ durchläuft. Man beweist dann leicht, dass $F(q, q', \pi, \pi')$ eine irreduzible Form in $k[q, q', \pi, \pi']$ ist und dass jeder Punkt von $F(x, y, \pi, \pi')=0$ in H liegt. Da aber H und $F(x, y, \pi, \pi')=0$ beide irreduzible Hyperflächen in $P_{l,m}$ sind, so fallen sie zusammen, d.h. H wird durch $F(x, y, \pi, \pi')=0$ gegeben.

Um λ_1 zu bestimmen, schneiden wir nun $[\Gamma_{12}, F(x, y, \pi, \pi')]$ mit einer allgemeinen Hyperebene $l(x, c) \equiv c_0x_0 + c_1x_1 + \cdots\cdots + c_lx_l = 0$. Es gilt

$$
(7) \quad [\Gamma_{12}, F(x, y, \pi, \pi'), l(x, c)] = \sum_{i=1}^{a} \lambda_i [C_i, l(x, c)] .
$$

Wir nehmen einen Punkt (ξ, η) aus $[C_1, l(x, c)]$. Es ist ein allgemeiner Punkt von C_1 über k und seine Vielfachheit in $[C_1, l(x, c)]$ ist gleich dem Exponent von η über $k(\xi)$[4]. Dieser ist aber gerade p^e, da (ξ, η) und (ξ', η') als allgemeiner Punkt von C_1 dieselbe algebraische Eigenschaften über k besitzen. Bezeichnet man mit $F(x, y, w)$ die $F(x, y, \pi, \pi')$ entsprechende allgemeine Form, so

1) Wir bezeichnen die Charakteristik von k mit p, wie in "B".

2) Vgl. "B".

3) Vgl. "B".

4) Vgl. "B", Satz 2.

besagt (7), dass genau $\lambda_1 p^e$ Punkte von $[\Gamma, F(x, y, w), l(x, c)]$ bei der Spezialisierung $F(x, y, w) \to F(x, y, \pi, \pi')$ in (ξ, η) übergehen. Die Punkte von $[\Gamma, F(x, y, w), l(x, c)]$ erhält man folgendermassen: zunächst suche man alle Schnittpunkte $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots\ldots, \xi^{(\sigma)}$ von Γ_1 mit $l(x, c)=0$ und dann für jeden $\xi^{(\nu)}$ die Schnittpunkte von Γ_2 mit $F(\xi^{(\mu)}, y, w)=0$. Es muss also z.B. $\xi=\xi^{(1)}$ sein und $\lambda_1 p^e$ ist die Vielfachheit von η als Schnittpunkt von Γ_2 mit $F(\xi, y, \pi, \pi')=0$. Gehen nun die Punkte $\eta^{(\nu)}$ in (6) bei der Spezialisierung $q \to \xi$, $\xi' \to \xi$ relationstreu zu $\eta'^{(\nu)}$ über, so gilt

$$(8) \quad F(\xi, y, \pi, \pi')=\prod_{\nu=1}^{n'}(v', \eta'^{(\nu)})^{pe}=\prod_{\nu=1}^{n'}(v_0'\eta_0'^{(\nu)}+v_1'\eta_1'^{(\nu)}+\cdots+v_m'\eta_m'^{(\nu)})^{pe}$$

mit

$$(9) \qquad v_i'=\pi_{i0}'y_0+\cdots\cdots+\pi_{i,i-1}'y_{i-1}+\pi_{i,i+1}'y_{i+1}+\cdots\cdots+\pi_{i,l}'y_l\,.$$

Da die durch q und $L_{l-2}^{(1)}$ hindurchgehende Hyperebene (2), folglich auch die Schnittpunkte $\eta^{(\nu)}$ von (2) und C_1 bei der Spezialisierung $q \to \xi'$, $\xi' \to \xi'$ fest bleiben und da ξ dieselbe algebraische Eigenschaften wie ξ' hat, so sind $\eta'^{(\nu)}$ alle von einander verschieden. η fällt ersichtlich mit einem von $\eta'^{(\nu)}$ zusammen, z.B. $\eta=\eta'^{(1)}$. In (8) ist $(v', \eta'^{(\nu)})=0$ die von $\eta'^{(\nu)}$ und $L_{m-2}^{(2)}$ erzeugte Hyperebene in P_m, d.h. eine durch $\eta'^{(\nu)}$ hindurchgehende allgemeinste Hyperebene in P_m. Die von $\eta'^{(\nu)}$ verschiedene Schnittpunkte von $(v', \eta'^{(\nu)})=0$ mit Γ_2 sind also sämtlich von $L_{m-2}^{(2)}$ abhängig und η fällt folglich mit keinem von ihnen zusammen. Ferner ist $\eta=\eta'^{(1)}$ als Schnittpunkt von $(v', \eta'^{(1)})=0$ mit Γ_2 einfach gezählt, da Γ_2 eine singularitätenfreie Kurve ist. Hieraus und aus (8) sieht man sofort, dass die Vielfachheit von η als Schnittpunkt von Γ_2 mit $F(\xi, y, \pi, \pi')=0$ gleich p^e ist. Nach dem oben Bemerkten ist es andererseits gleich $\lambda_1 p^e$. Es ist also $\lambda_1=1$, wie behauptet wurde.

Es sei noch bemerkt, dass in diesem nicht ausgearteten Fall alle $C_i (i \geqq 2)$ in (1) auch nicht ausgeartet sind. Wäre nämlich z.B. $C_2=(a)\times\Gamma_2$ und $\eta^{(\nu)} \to \bar{\eta}^{(\nu)}$ bei $q \to a$, so würde die Hyperfläche

$$F(a, y, \pi, \pi')=\prod_{\nu=1}^{n'}(v', \bar{\eta}^{(\nu)})^{pe}=0$$

Γ_2 enthalten, was aber offenbar ein Widerspruch ist, da $(v', \bar{\eta}^{(\nu)})=0$ eine durch $\bar{\eta}^{(\nu)}$ hindurchgehende allgemeinste Hyperebene in P_m ist und sicher nicht Γ_2 enthält. Andererseits ist es auch klar, dass $C_i (i \geqq 2)$ sämtlich ausgeartet sind, wenn C_1 eine ausgeartete Kurve ist.

Nun gilt der

Satz 1. Es sei $g(x, y, b')=0$ eine beliebige Hyperfläche in $P_{l,m}$ und C eine beliebige Korrespondenz auf Γ_{12}. Es gilt dann

$$[C, [\Gamma_{12}, g(x, y, b')]] = [C, g(x, y, b')]$$[1].

Beweis. Man kann offenbar C als irreduzibel annehmen. Die C mit $L^{(1)}_{l-2} \times L^{(2)}_{m-2}$ verbindende Hyperfläche in $P_{l,m}$ wird wie oben mit H ($l(x, u')=0$ oder $F(x, y, \pi, \pi')=0$) bezeichnet. Aus $\lambda_1=1$ folgt

$$[\Gamma_{12}, H] = C_1 + \sum_{i=2}^{\alpha} \lambda_i C_i , \qquad (C_1 = C)$$

und es gilt[2]

$$\begin{aligned}[][[\Gamma_{12}, g(x, y, b')], H] &= [[\Gamma_{12}, H], g(x, y, b')] \\ &= [C_1, g(x, y, b')] + \sum_{i=2}^{\alpha} \lambda_i [C_i, g(x, y, b')] .\end{aligned}$$

Da jeder Punkt von C_i ($i \geqq 2$) von $L^{(1)}_{l-2} \times L^{(2)}_{m-2}$ abhängt, so liegen die (von $L^{(1)}_{l-2} \times L^{(2)}_{m-2}$ unabhängige) Schnittpunkte von C und $[\Gamma_{12}, g(x, y, b')]$ nur in $[C_1, g(x, y, b')]$. Nach Definition von $[C, [\Gamma_{12}, g(x, y, b')]]$ folgt daraus die Behauptung.

Satz 2. Für beliebige Korrespondenzen C, D gilt

$$[C, D] = [D, C] .$$

Beweis. Wir können natürlich C, D als irreduzibel annehmen. Bezeichnet man die D mit einem allgemeinen linearen Raum $L'^{(1)}_{l-2} \times L'^{(2)}_{m-2}$ verbindende Hyperfläche in $P_{l,m}$ mit H' und setzt

$$[\Gamma_{12}, H'] = D_1 + \sum_{j=2}^{\beta} \mu_j D_j , \qquad (D_1 = D) ,$$

so folgt aus Satz 1

$$(10) \qquad [C, H'] = [C, [\Gamma_{12}, H']] = [C, D_1] + \sum_{j=2}^{\beta} \mu_j [C, D_j] .$$

Nach Definition besitzt ein Schnittpunkt in $[D, C]$ dieselbe Vielfächheit wie in $[C, H']$. Da aber jeder Punkt von $\sum_{j=2}^{\beta} \mu_j [C, D_j]$ von $L'^{(1)}_{l-2} \times L'^{(2)}_{m-2}$ abhängt, so folgt aus (10) $[C, D] = [D, C]$.

Nun untersuchen wir $[C, D]$ in dem Fall, wo $C = (a) \times \Gamma_2$ und D irreduzibel und nicht von der Form $(a') \times \Gamma_2$ ist. H ist dann eine durch a hindurchgebende allgemeinste Hyperebene $l(x, u')=0$. Für eine $l(x, u')$ entsprechende allgemeine Form $l(x, u)$ gilt dann[3].

$$(11) \qquad [D, l(x, u)] \rightarrow [D, l(x, u')], \text{ bei } u \rightarrow u'$$

und man erhält $[D, l(x, u)]$ folgendermassen: zunächst nehme man alle Schnittpunkte $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots\ldots, \xi^{(\sigma)}$ von der auf P_l projizierende Bildkurve von D mit $l(x, u)=0$ in P_l und für jeden $\xi^{(\mu)}$ je einen Punkt $\eta^{(\mu)}$ in P_m, so dass $(\xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)})$

1) Für allgemeine Korrespondenz $C = \Sigma \lambda_i C_i$ soll $[C, g(x, y, b')] = \Sigma \lambda_i [C_i, g(x, y, b')]$ sein.

2) Vgl. "B", Satz 7.

3) Vgl. (10) in "B".

ein allgemeiner Punkt von D wird. $[D, l(x, u)]$ wird dann gegeben durch

$$\{(\xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu,\nu)}), \quad \mu=1, 2, \ldots\ldots, g, \quad \nu=1, 2, \ldots\ldots, \gamma\}$$

wobei $\gamma=[k(\xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)}):k(\xi^{(\mu)})]$ $(\mu=1, 2, \ldots\ldots, g)$ gesetzt wird und $\eta^{(\mu,\nu)}$ alle nicht notwendig verschiedenen Konjugierten von $\eta^{(\mu)}$ in bezug auf $k(\xi^{(\mu)})$ durchläuft. Wegen der Singularitätenfreiheit von Γ_1 geht bei (11) nur ein Punkt von $\xi^{(\mu)}$ zu a über: z.B. $\xi^{(1)}\to a$. Gehen dabei zugleich $\eta^{(1,\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, \gamma)$ zu $b^{(\nu)}$ über, so folgt nach Definition

$$[C, D]=\{(a, b^{(\nu)});\ \nu=1, 2, \ldots\ldots, \gamma\}. \tag{12}$$

Damit ist bewiesen der

Satz 3. Es sei D eine irreduzible Korrespondenz, welche nicht die Form $(a')\times\Gamma_2$ hat und (ξ, η) ein allgemeiner Punkt von D. Die sämtlichen (nicht notwendig von einander verschiedenen) Konjugierten von η in bezug auf $k(\xi)$ seien $\eta^{(1)}, \ldots\ldots, \eta^{(\gamma)}$ $(\gamma=[k(\xi, \eta):k(\xi)])$[1]. Gehen $\eta^{(\mu)}$ $(\mu=1, \ldots\ldots, \gamma)$ bei der Spezialisierung $\xi\to a$ relationstreu zu $b^{(\mu)}$ $(\mu=1, \ldots\ldots, \gamma)$ über, so wird die Schnittpunktgruppe von D mit $C=(a)\times\Gamma_2$ durch

$$[C, D]=\{(a, b^{(\mu)}); \mu=1, \ldots\ldots, \gamma\}$$

gegeben. In analoger Weise erhält man die Schnittpunktgruppe von D mit $\Gamma_1\times(b)$, falls D nicht von der Form $\Gamma_1\times(b')$ ist.

Satz 4. Setzt man für eine beliebige Form $g(x, y, b')$ und einen beliebigen Punkt a in P_l

$$C=(a)\times\Gamma_2, D=[\Gamma_{12}, g(x, y, b')], \quad [\Gamma_2, g(a, y, b')]=\{b^{(\mu)}; \mu=1, \ldots, \delta\},$$

so gilt

$$[C, D]=\{(a, b^{(\mu)}); \quad \mu=1, \ldots\ldots, \delta\}.$$

Beweis. Nach Satz 1 gilt

$$[C, [\Gamma_{12}, g(x, y, b')]]=[C, g(x, y, b')]. \tag{13}$$

Bezeichnet man die $g(x, y, b')$ entsprechende allgemeine Form mit $g(x, y, b)$, so sieht man leicht

$$[C, g(x, y, b)]=\{(a, b^{*(\mu)}); \quad b^{*(\mu)}\in[\Gamma_2, g(x, y, b)]\}.$$

Durch die Spezialisierung $b\to b'$ erhält man (13).

Nun beweisen wir eine wichtige Eigenschaft von der oben definierten Schnittpunktgruppe, nämlich deren birationale Invarianz. Es seien also $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$, $\varphi=(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ birationale Abbildungen, welche Γ_1, Γ_2 bzw. $\Gamma_{12}=\Gamma_1\times\Gamma_2$ je auf andere ebenso singularitätenfreie Γ'_1, Γ'_2 bzw. $\Gamma'_{12}=\Gamma'_1\times\Gamma'_2$ abbilden. Eine irreduzible Korrespondenz C auf Γ_{12} wird dabei auf eine wieder irreduzible Korrespondenz $C'=\varphi(C)$ abgebildet. Für eine beliebige Korrespondenz $\Sigma\lambda_i C_i$ setzen wir $\varphi(\Sigma\lambda_i C_i)=\Sigma\lambda_i\varphi(C_i)$. Es gilt dann

---

1) Die Endlichkeit von γ folgt daraus, dass D nicht die Form $(a')\times\Gamma_2$ hat.

Satz 5. Für beliebige Korrespondenzen C, D auf Γ_{12} gilt

$$[\varphi(C), \varphi(D)] = \varphi([C, D]).$$

Beweis. Die Abbildung $\varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ und ihre Umkehrung $\psi = (\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$ seien durch

$$(14) \qquad x'_0 : x'_1 : \cdots\cdots : x'_l = \varphi^1_0(x) : \varphi^1_1(x) : \cdots\cdots : \varphi^1_l(x);$$
$$y'_0 : y'_1 : \cdots\cdots : y'_m = \varphi^2_0(y) : \varphi^2_1(y) : \cdots\cdots \varphi^2_{m'}(y),$$
$$(15) \qquad x_0 : x_1 : \cdots\cdots : x_l = \psi^1_0(x') : \psi^1_1(x') : \cdots\cdots \psi^1_l(x'),$$
$$y_0 : y_1 : \cdots\cdots : y_m = \psi^2_0(y') : \psi^2_1(y') : \cdots\cdots : \psi^2_m(y').$$

gegeben. Man hat offenbar den Satz nur für irreduzible C, D zu beweisen. Wenn C oder D ausgeartet ist, so folgt der Satz unmittelbar aus Satz 3, da die Abbildung φ auf Γ_{12} eineindeutig ist. Wir nehmen also an, dass C, D beide irreduzibel und nicht ausgeartet sind und schicken zum Beweis einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. Es sei $F(x, y, w)$ eine allgemeine Form vom Grade (s, t), $st > 0$ und (a, b) ein beliebiger Punkt in $[\Gamma_{12}, F(x, y, w)]$. Dann hängt entweder a oder b von w ab. Dasselbe gilt auch für einen beliebigen Punkt in $\varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])$.

Beweis. Die erste Hälfte ist ohne weiters klar. Die zweite folgt aus $k(a) = k(\varphi^{(1)}(a))$, $k(b) = k(\varphi^{(2)}(b))$.

Hilfssatz 2. $F(x, y, w)$ sei dieselbe Form wie in Hilfssatz 1. Setzt man

$$F^*(x', y', w) = F(\psi^{(1)}(x'), \psi^{(2)}(y'), w),$$

so fällt $\varphi([D, F(x, y, w)])$ für eine (von w unabhängige) nicht ausgeartete irreduzible Korrespondenz D auf Γ_{12} genau mit dem von w abhängigen Teil von $[\varphi(D), F^*(x', y', w)]$ zusammen.

Beweis. Es seien $(\xi'^{(1)}, \eta'^{(1)}), \ldots\ldots, (\xi'^{(\alpha)}, \eta'^{(\alpha)})$ die von w abhängige Punkte von $[\varphi(D), F^*(x', y', w)]$. Diese Punkte sind nach W.-L.Chow[1] einander konjugiert über $k(w)$ und fallen je p^e zusammen, falls der Exponent von $k(\xi'^{(\nu)}, \eta'^{(\nu)}, w)/k(w)$ p^e ist. Ferner liegt weder $\xi'^{(\mu)}$ noch $\eta'^{(\mu)}$ in k, da $(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)})$ ein allgemeiner Punkt der nicht ausgearteten Kurve $\varphi(D)$ ist. $\{\psi^{(1)}_i(\xi'^{(\mu)}); i = 0, 1, \ldots\ldots, l\}$ und $\{\psi^{(2)}_j(\eta'^{(\mu)}); j = 0, 1, \ldots\ldots, m\}$ geben also die Koordinaten von $\psi^{(1)}(\xi'^{(\mu)}), \psi^{(2)}(\eta'^{(\mu)})$ und hieraus folgt sogleich, dass $(\psi^{(1)}(\xi'^{(\mu)}), \psi^{(2)}(\eta'^{(\mu)}))$ in $[D, F(x, y, w)]$ liegt, d.h. dass $(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)})$ in $\varphi([D, F(x, y, w)])$ liegt. Umgekehrt zeigt man in analoger Weise, dass ein beliebigen Punkt $\varphi((\xi, \eta))$ von $\varphi([D, F(x, y, w)])$ in $[\varphi(D), F^*(x', y', w)]$ liegt. Dieser ist aber nach Hilfssatz 1 von w abhängig, also fällt mit einem von $(\xi'^{(\mu)}, \eta'^{(\mu)})$

1) W.-L. Chow, Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen fur beliebige voliebige vollkommene Körper, Math. Ann 114 (1937).

zusammen: z.B. $\varphi((\xi, \eta)) = (\xi'^{(1)}, \eta'^{(1)})$. Es bleibt also nur zu zeigen $p^e = 1$, da jeder Punkt in $[D, F(x, y, w)]$ einfach gezählt ist[1]. Aus $\varphi((\xi, \eta)) = (\xi'^{(1)}, \eta'^{(1)})$ folgt aber $k(\xi'^{(1)}, \eta'^{(1)}, w) = k(\xi, \eta, w)$ und es muss $p^e = 1$ sein, da $k(\xi'^{(1)}, \eta'^{(1)}, w)/k(w) = k(\xi, \eta, w)/k(w)$ separabel ist[2].

Hilfssatz 3. $F(x, y, w)$, $F^*(x', y', w)$ seien dieselbe Formen wie in Hilfssatz 2. Es gilt dann

$$(16)\quad [\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)] = \varphi([\Gamma, F(x, y, w)]) + \Sigma\lambda^i((a'^{(i)}) \times \Gamma'_2) + \Sigma\mu_j(\Gamma'_1 \times (b'^{(j)})),$$

wobei $a'^{(i)}$ bzw. $b'^{(j)}$ je

$$\psi^1_0(a'^{(i)}) = \psi^1_1(a'^{(i)}) = \ldots\ldots = \psi^1_l(a'^{(i)}) = 0 \text{ bzw. } \psi^2_0(b'^{(j)}) = \psi^2_1(b'^{(j)}) = \ldots\ldots = \psi^2_m(b'^{(j)}) = 0$$

genügende Punkte in $P_{l'}$ bzw. $P_{m'}$ sind.

Beweis. Um $[\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)]$ zu bestimmen, schneiden wir Γ'_{12} mit einer allgemeinen Hyperfläche $\Sigma v_{ij}x'_iy'_j = 0$ und wenden Hilfssatz 2 auf $D = \psi([\Gamma'_{12}, \Sigma v_{ij}x'_iy'_j])$ an. Der von w abhängige Teil von $[\psi(D), F^*(x', y', w)] = [[\Gamma'_{12}, \Sigma v_{ij}x'_iy'_j], F^*(x', y', w)] = [[\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)], \Sigma v_{ij}x'_iy'_j]$ liegt auf $\varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])$ und jeder Punkt in ihm ist einfach gezählt. Nimmt man nun ein von w unabhängiger Punkt (a', b') von $[[\Gamma'_{12}, \Sigma v_{ij}x'_iy'_j], F^*(x', y', w)]$, so liegt es nach Hilfssatz 1 nicht in $\varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])$. Ausserdem gilt entweder $\psi^1_1(a') = \psi^1_1(a') = \ldots = \psi^1_l(a') = 0$ oder $\psi^2_0(b') = \psi^2_1(b') = \ldots = \psi^2_m(b') = 0$ denn sonst würde $\{\psi^1_i(a'), \psi^2_j(b')\}$ die Koordinaten von $\psi((a', b'))$ geben und $\psi((a', b'))$ würde auf $[\Gamma_{12}, F(x, y, w)]$, folglich (a', b') auf $\varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])$ liegen, entgegen der obigen Bemerkung. Nach Definition[3] von $[\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)]$ erhält man dann sofort (16).

Hilfssatz 4. $F(x, y, w)$, $F^*(x', y', w)$ und D mögen dieselbe Bedeutungen haben wie in Hilfssatz 3. Es gilt dann

$$(17)\quad \varphi([D, F(x, y, w)]) = [\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])].$$

Beweis. Aus (16) folgt.

$$\begin{aligned}(18)\quad [\varphi(D), F^*(x', y', w)] &= [\varphi(D), [\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)]] \\ &= [\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])] \\ &\quad + \Sigma\lambda_i[\varphi(D), (a'^{(i)}) \times \Gamma'_2] \\ &\quad + \Sigma\mu_j[\varphi(D), \Gamma'_1 \times (b'^{(j)})].\end{aligned}$$

Da aber Punkte in $[\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])]$ nach Hilfssatz 1 von w abhängig, dagegen Punkte in $[\varphi(D), (a'^{(1)}) \times \Gamma'_2]$ oder in $[\varphi(D), \Gamma'_1 \times (b'^{(j)})$ von w unabhängig sind, so folgt aus Hilfssatz 2 und (18) die Behauptung.

1) Vgl. "B". Man bemerke, dass $F(x, y, w)$ einen Grad (s, t), $st > o$ hat.

2) Vgl. "B".

3) Vgl. "B".

Nun wollen wir zum Beweis von Satz 5 zurückkehren. Es seien also C, D nicht ausgeartete irreduzible Kurven auf Γ_{12}. Die C mit einem allgemeinen $L^{(1)}_{l-2} \times L^{(2)}_{m-2}$ verbindende Hyperfläche bezeichnen wir wie vorher mit $F(x, y, \pi, \pi')=0$ und die $F(x, y, \pi, \pi')$ entsprechende allgemeine Form mit $F(x, y, w)$. Die Multiplizitat ϵ eines Punktes (a, b) in $[C, D]$ ist mit derjenigen von (a, b) in $[D, F(x,y,\pi,\pi')]$ identisch. Bei der Spezialisierung $F(x,y,w) \to F(x,y,\pi,\pi')$ gehen also genau ϵ Punkte von $[D, F(x,y,w)]$ in (a,b) über, folglich nach (17) genau ϵ Punkte von $[\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])]$ in $\varphi((a, b))$ über[1]. Wenn $[\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)]$ bei derselben Spezialisierung in $\Sigma v_\rho C'_\rho + \Sigma\lambda_i((a'^{(i)}) \times \Gamma'_2) + \Sigma\mu_j(\Gamma'_1 \times (b'^{(j)}))$ also $\varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])$ in $\Sigma v_\rho C'_\rho$ übergeht, so ist die Anzahl von $\varphi((a, b))$ in $\Sigma\nu_\rho(\varphi(D), C'_\rho)$ gleich ϵ. Da aber $\varphi(C)$ sicher in C'_ρ auftritt, so muss die Vielfachheit von $\varphi((a, b))$ in $[\varphi(C), \varphi(D)]=[\varphi(D), \varphi(C)]$ nicht grösser als ϵ sein. Es ist also bewiesen, dass $[\varphi(C), \varphi(D)]$ in $\varphi([C, D])$ enthalten ist. Genau so beweist man, dass $[\psi(\varphi(C)), \psi(\varphi(D))]=[C, D]$ in $\psi([\varphi(C), \varphi(D)])$, folglich $\varphi([C, D])$ in $\varphi(\psi([\varphi(C), \varphi(D)]))=[\varphi(C), \varphi(D)]$ enthalten ist. Es gilt also

$$\varphi([C, D])=[\varphi(C), \varphi(D)] .$$

Satz 6. $\Gamma_{12}, \Gamma'_{12}, \varphi, \psi$ mögen dieselbe Bedeutungen haben wie oben. Es sei ferner $F(x, y, w)$ eine allgemeine Form von Grade $(s, t), st>0$ und $F(x, y, w')$ eine beliebige Spezialisierung von $F(x, y, w)$. Setzt man

$$F^*(x', y', w')=F(\psi^{(1)}(x'), \psi^{(2)}(y'), w') ,$$

so gilt

$$[\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w')]=\varphi([\Gamma, F(x, y, w')])+\sum_{i=1}^{\tau}\lambda_i C'_i , \tag{19}$$

mit geeigneten ausgearteten Korrespondenzen C'_i.

Beweis. Nach Satz 5 und (18) gilt

$$\begin{aligned}[\varphi(D), [\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w)]] &= [\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w)])] + \Sigma\lambda_i[\varphi(D), C'_i] \\ &=\varphi([D, [\Gamma_{12}, F(x, y, w)]])+\Sigma\lambda_i[\varphi(D), C'_j] .\end{aligned}$$

Spezialisiert man $w \to w'$, so ist

$$\begin{aligned}[\varphi(D), [\Gamma'_{12}, F^*(x', y', w')]] &=\varphi([D, [\Gamma_{12}, F(x, y, w')]])+\Sigma\lambda_i[\varphi(D), C'_i] \\ &=[\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x,y,w')])]+\Sigma\lambda_i[\varphi(D),C'_j] \\ &=[\varphi(D), \varphi([\Gamma_{12}, F(x, y, w')])+\Sigma\lambda_i C'_i]\end{aligned}$$

Daraus erhalt man (19), da $\varphi(D)$ eine beliebige irreduzible Kurve auf Γ'_{12} sein kann.

---

1) Man bemerke dabei, dass $\varphi(\xi)$ bei der Spezialisierung $\xi \to a$ immer zu $\varphi(a)$ übergeht.