9. Halblineare Erweiterung des Satzes der Normalbasis und ihre Anwendung auf die Existenz der derivierten (differentialen) Basis, II.[1]

Von Tadasi NAKAYAMA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Apr. 12, 1946.)

4. *Halblineare Normalbasis (II).* Als ein Gegenstück zu Satz 1 (in I.) haben wir

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{L}$ eine endliche galoissche Erweiterung eines Körpers $\mathfrak{K}$, und L ein (nicht notwending $\mathfrak{K}$ enthaltender) Unterkörper von $\mathfrak{L}$ derart, dass $(L\mathfrak{K}:L)\leqq(L\mathfrak{K}:\mathfrak{K})$, oder, was dasselbe ist, $(\mathfrak{L}:L)\leqq(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ ist. Dann gibt es in $\mathfrak{L}$ ein Element, dessen $(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ Konjugierte bezüglich $\mathfrak{K}$ eine (nicht notwendig linear unabhängige) Modulbasis von $\mathfrak{L}$ uber L bilden.*

Beweis verläuft ganz aualog wie bei Satz 1. Jetzt erweist nämlich der $(\mathfrak{G}, L)$-Modul $\mathfrak{L}$ sich einem direkten Summanden von $(\mathfrak{G}, L)$ isomorph, also zu $(\mathfrak{G}, L)$ homomorph, wo $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ ist und $(\mathfrak{G}, L)$ den halblinearen Gruppenring von $\mathfrak{G}$ über L bedeutet. Der Satz folgt hieraus sofort.

5. *Arithmetische halblineare Normalbasis.*[2] Es sei nun $\mathfrak{K}$ ein algebraischer Zahlkörper, und $\mathfrak{L}$ eine (endliche) galoissche Erweiterung mit der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}=\{G_1, G_2, \ldots, G_g\}$ $(g=(\mathfrak{L}:\mathfrak{K}))$. L sei ein Unterkörper von $\mathfrak{L}$, so dass $L^{\mathfrak{G}}=L$ ist. Weiter sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $L\frown\mathfrak{K}$, welches in $L/L\frown\mathfrak{K}$ nicht verzweigt und in den Grad $g=(\mathfrak{L}:\mathfrak{K})$ nicht aufgeht. Betrachten wir ein Element ξ aus $\mathfrak{L}$, und den von ξ und seinen Konjugierten bezüglich $\mathfrak{K}$ erzeugten Modul

$$L_\xi=(L\xi^{G_1}, L\xi^{G_2}, \ldots, L\xi^{G_g})$$

Die Gesamtheit der ganzen Zahlen aus L_ξ bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}_\xi$. Dann gilt der

Satz 4. *Es gibt in $\mathfrak{O}_\xi$ ein Element η, so dass*

$$(\mathfrak{O}_\xi)_\mathfrak{p}=(\mathfrak{o}_L\eta^{G_1}, \mathfrak{o}_L\eta^{G_2}, \ldots, \mathfrak{o}_L\eta^{G_g})_\mathfrak{p}$$

ist, wo $\mathfrak{o}_L$ die Hauptordnung von L bedeutet. (Vom besonderen Interesse ist der Satz in den beiden Fällen, wenn erstens $(L\mathfrak{K}:L)\leqq(L\mathfrak{K}:\mathfrak{K})$ ist und ξ^{G_1}, ξ^{G_2}, ..., ξ^{G_g} über L linear unabhängig sind (Satz 1), und wenn, zweitens,

---

1) Die I. Mitteilung erscheinte in Proc. Imp. Acad. Tokyo *21* (1945).

2) Für den gewöhnlichen linearen Fall siehe E. Noether, l. c. (I, Anm. 1).

$(L\mathfrak{K} : L) \leqq (L\mathfrak{K} : \mathfrak{K})$ ist und $\mathfrak{L} = (L^{\xi^{G_1}}, L^{\xi^{G_2}}, \ldots, L^{\xi^{G_g}})$ ist (Satz 1)).

Beweis. Betrachten wir die Algebra

$$(\mathfrak{G}, L) = LG_1 + LG_2 + \ldots + LG_g$$

über $L \frown \mathfrak{K}$, und die Ordnung

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{o}_L) = \mathfrak{o}_L G_1 + \mathfrak{o}_L G_2 + \ldots + \mathfrak{o}_L G_g$$

in ihr. Da die (reguläre) Diskriminante dieser Ordnung gleich $g^{gl} D_{L/L \frown \mathfrak{K}}$ $(l = (L : L \frown \mathfrak{K}))$ ist, und da sie wegen unserer Voraussetzung durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar ist, so ist

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p} = (\mathfrak{G}, (\mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p}) = (\mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p} G_1 + (\mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p} G_2 + \ldots + (\mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p} G_g$$

eine $\mathfrak{p}$-Maximalordnung in $(\mathfrak{G}, L)$. Jedes Rechtsideal in ihr ist Hauptideal. Nun sei $\mathfrak{A}$ das Urbild von $(\mathfrak{O}_\xi)_\mathfrak{p}$ bei der $(\mathfrak{G}, \mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p}$-homomorphen Abbildung $G \to \xi^G$ von $(\mathfrak{G}, L)$ auf L_ξ, und sei $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{G}, \mathfrak{o}_L)_\mathfrak{p}$. Dann erfüllt das Element $\eta = \xi^a$ unsere Forderung.

6. *Derivierte Basis im modularen Fall.* Bei dem in I bewiesenen Satz der dervierten Basis hatten wir im Fall der Primzahlcharakteristik etwas unangenehm die Uegleichung $(L^*\mathfrak{K} : L^*) \geqq (L^*\mathfrak{K} : \mathfrak{K})$ als Bedingung vorauszusetzen, wo L^* den Körper der Konstanten bezüglich der Derivation in L^* bedeutet. Tatsächlich ist solche Einschränkung unvermeidlich, soweit wir, wie dort, die höhere Derivation im Sinne der gewöhnlichen Iteration auffassen. Wir geben so es auf, und nehmen vielmehr an, dass in unserem Grundkörper $\mathfrak{K}$ eine iterative höhere Derivation (oder Differentiation) im Sinne von H. Hasse und F. K. Schmidt[3] definiert ist. Nämlich sei für jede natürliche Zahl ν eine Zuordnung $y \to y^{(\nu)}$ in $\mathfrak{K}$ erklärt, so dass die Relationen

$$(y+z)^{(\nu)} = y^{(\nu)} + z^{(\nu)},$$
$$(yz)^{(\nu)} = y^{(\nu)} z + y^{(\nu-1)} z' + \ldots + yz^{(\nu)},$$
$$\binom{\nu}{\mu} y^{(\nu)} = (y^{(\mu)})^{(\nu-\mu)}$$

gelten; wir schliessen den trivialen Fall aus, wo $y^{(\nu)}$ für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ identisch verschwindet.

Nun sei $\mathfrak{L}$ ein endlicher separabler Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$. Unsere (iterative höhere) Derivation lässt sich in eindeutiger Weise auf $\mathfrak{L}$ fortpflanzen. L bzw. K sei der Körper der absoluten Konstanten in $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{K}$; $L = [\alpha \varepsilon \mathfrak{L};\ \alpha^{(\nu)} = 0\ (\nu = 1, 2, \ldots)]$, $K = L \frown \mathfrak{K}$. Man sieht leicht ein, dass $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{K}$ über L bzw. K unendlich ist.[4]

3) F. K. Schmidt-H. Hasse, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, Crelle *177* (1937).

4) Man bemerke, dass aus $(\alpha + \alpha^{(1)} u + \ldots + \alpha^{(\nu)} u^{\nu} + \ldots) = \alpha^{p}$ $\alpha^{(\nu)} = 0$ für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ folgt; hieraus sieht man, dass $\mathfrak{L}$ (bzw. $\mathfrak{K}$) kein über L (bzw. K) rein inseparables Element enthält.

Hilfssatz 1. Ein (endliches) System $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von Elementen aus $\mathfrak{L}$ ist dann und nur dann über L linear unabhängig, wenn unter den Vektoren

$$\mathfrak{x}^{(\nu)} = (\xi^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

(mindestens, also genau) n (über $\mathfrak{L}$) linear unabhängige existieren.

Beweis. Es sei $\mathfrak{x}^{(\nu_j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ ein maximales linear unabhängiges System aus $\mathfrak{x}^{(\nu)}$, und sei $m < n$ angenommen. Unter n Spalten der (m, n) Matrix $(\xi_i^{(\nu_j)})$ existeiren dann genau m linear unabhängige; O. B. d. A. nehmen wir an, dass die ersten m es sind. So gibt es in $\mathfrak{L}$ m Elemente λ_i, so dass

$$(*) \qquad \xi_{m+1}^{(\nu)} = \lambda_1\xi_1^{(\nu)} + \lambda_2\xi_2^{(\nu)} + \ldots \lambda_m\xi_m^{(\nu)}$$

für jedes $\nu = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ ist. Da aber $\mathfrak{x}^{(\nu_i)}$ linear abhängig sind, so gilt die Relation (*) für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Nun zeigen wir, dass $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ absolute Konstante sind. Angenommen nämlich, dass ihre Ableitungen bis auf die $(\mu-1)$-ten Null sind $(\mu \geqq 1)$, bekommen wir aus (*)

$$\lambda_1^{(\mu)}\xi_1^{(\nu)} + \ldots + \lambda_m^{(\mu)}\xi_m^{(\nu)} = \xi_m^{(\nu)} - (\lambda_1\xi_1^{(\nu)(\mu)} + \ldots + \lambda_m^{(\nu)(\mu)}\xi) = 0$$

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, und so müssen die $\lambda_1^{(\mu)}, \lambda_2^{(\mu)}, \ldots, \lambda_m^{(\mu)}$ verschwinden. Jetzt schliesst man die Behauptung nach Induktion an, und dies zeigt die zweite Hälfte des Hilfssatzes. Die andere Hälfte ist fast trivial.

Hilfssatz 2. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(\varepsilon\ \mathfrak{L})$ über L linear unabhängig und sei

$$(**) \qquad (\nu_0 = 0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1})$$

das jungste[5] (nach Satz 1 existierende) Indizessystem derart, dass $\mathfrak{x}^{(\nu_i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ linear unabhängig (über $\mathfrak{L}$) sind. In dem System erscheint dann mit einem ν_i jedes $\mu < \nu_i$ mit $p \nmid \binom{\nu_i}{\mu}$.

Beweis. Es sei $\mu < \nu_i$ und trete μ in (**) nicht auf. j sei der grösste Index, so dass $\nu_j < \mu$ ist. Dann hängt ${}_{(\mu)}\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(\nu_1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(\nu_j)}$ linear ab:

$$\mathfrak{x}^{(\mu)} = \rho_0\, \mathfrak{x}^{(0)} + \rho_1\, \mathfrak{x}^{(\nu_1)} + \ldots + \rho_j\, \mathfrak{x}^{(\nu_j)}$$

Nach Differentiation haben wir

$$\binom{\nu_i}{\mu}\mathfrak{x}^{(\nu_i)} = \mathfrak{x}^{(\mu)(\nu_i-\mu)} = \sum_{\tau \leqq \nu_j + \nu_i - \mu} \sigma^t\, \mathfrak{x}^{(\tau)i}$$

wo σ_τ gewisse Summen der höheren Derivationen von ρ^κ sind. Da hier $\nu_i + \nu_i - \mu < \nu_i$ ist und da $\mathfrak{x}^{(\nu_i)}$ von $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(\nu_i-1)}$ nicht abhängt, so muss $\binom{\nu_i}{\mu} \equiv 0 \pmod{p}$ sein.

Mit Hilfe dieser Hilfssätze folgert man nun aus Satz 1 ganz analog wie beim Satz 2 der I. Mitteilung den

Satz 2'. *Es gibt in $\mathfrak{L}$ ein Element ξ derart, dass geeignete $g = (\mathfrak{L} : \mathfrak{K})$ unter den höheren Derivationen $\xi^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ bilden. Ist*

5) Im Sinne der lexikographischen Ordnung.

$$(\nu_0 = 0, \nu_1, \ldots, \nu_{g-1})$$

das jungste Indizessysem, sodass $\xi^{(\nu_c)}$ $(i = 0, 1, \ldots, g-1)$ *eine Basis von* $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ *bilden, so ist mit einem* ν_i *jedes* $\mu < \nu_i$ *mit* $p \nmid \binom{\nu_i}{\mu}$ *in dem System vorhanden.*

7. *Anhang: Halblineares "Formenproblem".* Am Schluss wollen wir, als eine mit der obigen eng zusammenhängende, doch etwas verschiedene Fragestellung, die halblineare Verallgemeinerung des Kleinschen Formenproblems[6] betrachten. Dabei werden wir aber von dem Satz der halblinearen Normalbasis keinen Gebrauch machen, und vielmehr uns auf $\mathfrak{K}$ den Speiserschen Satz der verschränkten Darstellung verlassen.

Es sei

$$(\S) \qquad G \longrightarrow (A_G, G)$$

eine halblineare Darstellung n-ten Grades einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ in einem Körper L. Eine rationale Funktion $J(x) = J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in L heisst eine Invariante der Darstellung, wenn

$$J^G(A_G(x)) = J(x)$$

für jedes G aus $\mathfrak{G}$ ist.[7] Die halblineare Verallgemeinerung des Kleinschen Formenproblems lässt sich dann in nahe liegender Weise formulieren. Und es gilt der Satz: Es sei $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ eine (endliche) galoissche Erweiterung mit der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ über einem unendlichen Körper $\mathfrak{K}$, und sei (§) eine (isomorphe) halblineare Darstellung von $\mathfrak{G}$ in einem (nicht notwendig $\mathfrak{K}$ enthaltenden) Unterkörper L von $\mathfrak{L}$, welcher durch jeden Automorphismus aus $\mathfrak{G}$ in sich abgebildet wird, so dass aus $A_G = E$ $G = E$ folgt. Dann kann man die vollständige Aufstellung von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ (d. h. die vollständige Auflösung einer $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ definierenden Gleichung) auf eines (halblineares) Kleinsches Formenproblem für die Darstellung (§) zurückführen, bei dem für die Invarianten Werte aus $\mathfrak{K}$ vorgeschrieben sind.

Dazu genügt es nämlich zu zeigen, dass in $\mathfrak{L}$ ein System von n Elementen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vorhanden ist, so dass

$$(\S\S) \qquad (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^G = A_G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

ist, und dass aus $A_G(\xi) = (\xi)$ notwendig $G = E$ folgt. Denn aus (§§) folgt $J(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{K}$ und aus der zweiten Bedingung $\mathfrak{K}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \mathfrak{L}$. Nun ist $G \rightarrow A_G$ sicher eine verschränkte Darstellung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{L}$, so gibt es in $\mathfrak{L}$ eine Matrix W, sodass für alle G

$$A^G = W^G W^{-1}$$

gilt. Ist $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein beliebiges System von n Elementen aus $\mathfrak{K}$ und

6) Vgl. R. Brauer, a.a.O. (I, Anm. 1).

7) Siehe K. Shoda, Über die Invarianten der endlichen Gruppen halblinearer Transformationen, Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1938).

setzt man

$$(\xi) = W(z),$$

so folgt

$$(\xi)^G = W^G(z) = W^G W^{-1}(\xi) = A_G(\xi).$$

Da $A_G \neq E$ für jedes $G \neq E$ ist, und da der Körper $\mathfrak{K}$ unendlichviele Elemente besitzt, sieht man wie üblich, dass hier z_ν als Elemente von $\mathfrak{K}$ so gewählt werden können, dass $A_G(\xi) \neq (\xi)$ für jedes $G \neq E$ ist, was aber unseres Ziel erreicht.

Nun zeigt das folgende Beispiel, dass unsere Voraussetzung über die Unendlichkeit des Körpers $\mathfrak{K}$ für die Existenz des Systems (ξ) der genannten Art wesentlich ist:[8] Beispliel. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Primkörper von der Charakteristik 2; $\mathfrak{K} = \{0, 1\}$. $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ seien Erweiterungen der Grade, etwa 2, 3 und 5 über $\mathfrak{K}$. R, S und T seien ihre erzeugenden Automorphismen. Wir betrachten die zyklische Erweiterung $\mathfrak{L}/\mathfrak{K} = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3 / \mathfrak{K}$ und ihre galoissche Gruppe $\mathfrak{G} = (R) \times (S) \times (T)$. Es seien $\alpha \varepsilon \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{K}$, $\beta \varepsilon \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{K}$ und $\gamma \varepsilon \mathfrak{L}_3 - \mathfrak{K}$. Man setze

$$W = \begin{pmatrix} \beta + \gamma & \alpha + \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und betrachte die halblineare Darstellung $G \rightarrow A_G = W^G W^{-1}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{L}$. Sodann überzeugt man sich leicht davon, dass sobald $G \neq E$ $A_G \neq E$ ist. Doch haben wir

$$(W^R - W)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (W^S - W)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (W^T - W)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0,$$

und daraus folgt, dass bei jeder Wahl des die Relationen $(\xi) = A_G(\xi)$ erfüllenden (ξ) (d. h. bei jeder Wahl von $(z) = W^{-1}(\xi)$ aus $\mathfrak{K}$) $A_R(\xi) = (\xi)$ oder $A_S(\xi) = (\xi)$ oder $A_T(\xi) = (\xi)$ gilt.

So möchte es, in Hinsicht auf diesses Beispiel, ohne Interesse sein, zu bemerken, dass die Rückführbarkeit der Auflösung einer Gleichung auf ein Kleinsches Formenproblem für eine isomorphe gewöhnliche (nicht halblineare) Darstellung der zugehörigen Galoisschen Gruupe unabhängig von der Unendlichkeit des Grundkörpers gültig ist. Dies sieht man nämlich ganz analog wie bei R. Brauer, 1. c. §2, wo die Gruppenalgebra $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$ als halbeinfach angenommen ist, indem man bemerkt, dass die Gruppenalgebra $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$ jetzt einreihig ist, und dass jede direkt unzerlagbare Darstellung einer einreihigen Algebra in der regulären Darstellung enthalten ist.

Kehren wir nun auf unseren halblinearen Fall zurück, betrachten wir aber Kollineationsdarstellung und dementsprechend halblineares "Funktionen-

8) Diese Unannehmlichkeit stammt aber, wie es dem Verfasser scheint, aus unserer etwas unnaturgemässen Stellung den Körper Λ bei der Konstruktion von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{K}$ nicht zu benutzen.

problem." Es seien so $\mathfrak{K}$, und L wie oben, und sei eine halblineare Kollineationsdarstellung der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ in L gegeben. Zu $G \varepsilon \mathfrak{G}$ sei die halblineare Kollineation

$$\xi'_\kappa = \frac{a_{\kappa o}(G) + a_{\kappa_1}(G)\xi_1 + \ldots + a_{\kappa n}(G)\xi_\kappa}{a_{oo}(G) + a_{o_1}(G)\xi_1 + \ldots \quad a_{on}(G)\xi_\kappa} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

zugeordnet, und sei $A_G = (a_{\nu\mu}(G))$ gesetzt. Durch $A_G A_H = \alpha_{G,H} A^{GH}$ wird **ein Faktorensystem** $\{\alpha_{G,H}\}$ (in $\mathfrak{L} / \mathfrak{K}$) definiert. Nun gilt, wie man ganz ana**log wie bei Brauer,** 1. c., § 3 beweist: Ist dieses (unserer Darstellung zugehörige) Faktorensystem zum Einssystem assoziiert, und ist kein A_G mit Ausnahme von A_E Scalar, so können wir die Aufstellung der Galoisschen Erweiterung $\mathfrak{L}$ über dem unendlichen Körper $\mathfrak{K}$ auf ein Kleinsches Funktionenproblem zu unserer Kollineationsdarstellung zurückführen.

Die Annahme der Unendlichkeit des Körpers $\mathfrak{K}$ ist auch hier wesentlich; das folgende Beispiel dazu ist von der von dem obigen etwas verschiedenen Natur: Es sei $\mathfrak{K}$ ein Primkörper der Charakteristik 2, und seien $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ Erweiterungskörper von den Graden, etwa, 2 und 3 über $\mathfrak{K}$ und mit den erzeugenden Automorphismen R, S. Sei $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$, und

$$W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta_1 + \beta_2 & \alpha\beta_1 \\ 0 & \alpha\beta_2 \end{pmatrix}, \quad A_G = W_G W^{-1}$$

mit $\alpha \varepsilon \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{K}$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_1 / \beta_2 \varepsilon \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{K}$. A_G wird nur dann ein Skalar, wenn $G = E$ ist. Andererseits haben wir

$$(\overset{R}{w}_{00} z_0 + \overset{R}{w}_{01} z_1)(w_{10} z_0 + w_{11} z_1) - (w_{00} z_0 + w_{01} z_1)(\overset{R}{w}_{10} z_0 + \overset{R}{w}_{11} z_1) = (\alpha + \alpha^R) z_0 z_1,$$

$$(\overset{S}{w}_{00} z_0 + \overset{S}{w}_{01} z_1)(w_{10} z_0 + w_{11} z_1) - (w_{00} z_0 + w_{01} z_1)(\overset{S}{w}_{10} z_0 + \overset{S}{w}_{11} z_1)$$
$$= \alpha^2 (\beta_1{}^S \beta_2 + \beta_1 \overset{S}{\beta}_2) z_1 (z_0 + z_1),$$

und für jedes System (z_0, z_1) von Elementen aus $\mathfrak{K}$ wird mindestens eines dieser gleich 0. Daraus folgt aber die Nicht-Existenz der $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{K}$ erzeugenden Lösung zum Funktionproblem unserer halblinearen Kollineationsdarstellung.