

45. *Verallgemeinerung des Abelschen Integrals und Periodenrelationen.*

Von Hiraku TÔYAMA.

Mathematisches Institut, Tokyo Kôgyo Daigaku.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., Sept. 12, 1946.)

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf einer Riemannschen Fläche, die hauptsächlich von Poincaré und Klein entwickelt wurde, kann man als eine naturgemässe Verallgemeinerung des Abelschen Integrals betrachten. Um dieses Verhältnis explizite und anschaulich auszudrücken, will ich eine neue Bezeichnung einführen, und damit Periodenrelationen für das zu einer Darstellung der Fundamentalgruppe gehörige Differential, gewinnen, welche die klassischen Riemann-Weierstrassschen Periodenrelation als Spezialfall enthalten.

dF sei eine r -reihige Matrix, deren Elemente Funktionen auf der Riemannschen Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ sind, die maximal über \mathfrak{F} mit einer gegebenen Signatur überlagert. Dann bilden wir folgende Differentialgleichung.

$$dX = dF \cdot X, \dots\dots\dots (1)$$

wobei X eine r -reihige Lösungsmatrix ist.

Sei X eine Lösung, welche Anfangswert E_r im Punkte a hat und längs einer Kurve w bis zum z fortgesetzt wird. Dieselbe Lösung bezeichnen wir folgendermassen;

$$X = \int_{e^{\int_a^z dF}} dF$$

Wenn wir die Cauchysche Polygonmethode auf (1) anwenden, so ergibt sich

$$\int_{e^{\int_a^z dF}} dF = \lim (E_r + dF(a_n))(E_r + dF(a_{n-1}) \dots\dots (E_r + dE(a_1)),$$

wo $a_1 (= a) a_2 \dots a_n (= z)$ eine Reihe von Punkten auf der Kurve w ist. Offensichtlich ist X eine Funktion der Punkte a und z und des Weges w . Aus der Eigenschaft der analytischen Fortsetzung folgt, dass sie sogar eine Funktion der Wegeklasse, d. i. invariant ist gegenüber jeder homotopen (nicht homologen, falls $r > 1$) Änderung des Weges. Falls $r=1$, ist sie nichts anderes als $\exp \left(\int_{a(w)}^z dF \right)$, genauer gesprochen, eine Verallgemeinerung des "potenzierten" Abelschen Integrals.

In üblicher Schreibweise lässt sich schreiben⁽¹⁾

$$\int_a^z dF = \sum_{e=0}^{\infty} U_e$$

wo

$$U_l = \int_{t_1 > t_2 > \dots > t_l} \dots \int dF(t_1) dF(t_2) \dots dF(t_l).$$

Ähnlich wie gewöhnliche Identitäten der Integralrechnung, folgende Beziehungen bestehen,

$$\int_b^c \int_a^b = \int_a^c$$

$$\int_a^b C dF C^{-1} = C \left(\int_a^b dF \right) C^{-1},$$

wobei C eine konstante Matrix bedeutet.

Nach diesen Vorbereitungen, will ich sie auf die Theorie der hyperabelschen Funktionen anwenden.

Sei A_s eine Darstellung der Fundamentalgruppe, und A'_s irgendeine Darstellung, die zu A_s äquivalent ist⁽²⁾, d. i.

$$A'_s = U^s A_s U^{-1}$$

für eine überall endliche Funktion U , welche "transzendente Einheitsfunktion" genannt werden kann.⁽³⁾

Satz I. Jede zu A_s äquivalente Darstellung A'_s ist durch folgende Gleichung gegeben.

$$A'_s = C \left(\int_a^a d\Omega \right) A_s C^{-1}$$

wobei $d\Omega$ in beliebiges Differential bedeutet, welches $d\Omega^s = A_s d\Omega A_s^{-1}$ überall endlich macht.

Beweis.

$$\int_a^{ws} d\Omega = \int_a^w d\Omega^s = A_s \left(\int_a^w d\Omega \right) A_s^{-1} = A_s U C A_s^{-1}$$

Andererseits ist

(1) H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1928, S. 27. Diese Denkweise befindet sich schon in H. Poincaré, Sur les groupes des equations linéaires, Oeuvres, II, S. 300-401, insbesondere, S. 312. V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, 1913, S. 27.

(2) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de Liouville, 17 (1938). S. P. 47-87. 56.

(3) Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, 1902, S. 660

$$\int_e^{w^s} d\Omega = \int_e^w d\Omega \int_a^a d\Omega = U^s C \int_e^a d\Omega$$

Und hier ist $UCA_s^{-1} \int_e^{as} d\Omega C^{-1} = A_s^{-1} U^s$ auch eine Lösung der (1), so muss $A_s^{-1} U^s = UA'_s$ sein, wo A'_s eine Monodromiegruppe der (1) ist. Daher ergibt sich

$$A'_s = C \left(\int_{as}^a d\Omega \right) A_s C^{-1}.$$

Ersetzen wir diese Gleichung in die definierenden Relationen der Fundamentalgruppe

$$A_1 A_{p+1} A_1^{-1} A_{p+1}^{-1} \dots A_p A_{2p} A_p^{-1} A_{2p}^{-1} C_1 C_2 \dots C_e = E_r \dots (2)$$

$$C_\mu^n = E_r \ (\mu = 1, 2, \dots, l) \dots (3)$$

wobei t ein beliebiger Parameter ist, und entwickeln sie als Potenzreihe des t , so gewinnen wir, indem $C = E_r$

$$A = \int_e^a t d\Omega \ A = (E_r + t \int_{as}^a d\Omega + t \int_{as}^a \int_{as}^a d\Omega d\Omega + \dots) A$$

$$A'^{-1} = A_i^{-1} (E_r - t \int_{as}^a d\Omega + t^2 \int_{as}^a \int_{as}^a d\Omega d\Omega + \dots)$$

wobei

$$\int_{as}^a d\Omega = \Omega_i, \quad \int_{as}^{as} \int_{as}^a = \Omega_{i,2}, \quad \int_{as}^a \int_{as}^a = \Omega^*_{i,2}, \quad \Omega_{i,2} + \Omega^*_{i,2} = \Omega_i^2$$

Satz II. Wenn S_1 alle Glieder, deren jede durch Einschaltung der Ω_i in linker Seiten der A_i un Ω_i in rechter Seiten der A_i^{-1} in (2) entsteht, umfasst, und T_i ($i = 1, 2, \dots, l$) durch ähnliches Verfahren aus (3) entsteht, so gilt identisch

$$S_1 = 0, \quad T_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \dots (4)$$

Sei S_2 die Summe, die durch zweimalige Anwendungen des vorigen Verfahrens entsteht, und S'_2 eine Summe, die durch eumalig Einschaltung des $\Omega_{i,2}$ und $\Omega^*_{i,2}$ gegeben wird, so besteht

$$S_2 + S'_2 = 0 \dots (5)$$

Ähnliches gilt für (3)

$$T_{2,i} + T'_{2,i} = 0 \dots (6)$$

Für die Einsdarstellung E_r erhalten wir aus $d\Omega = \sum_{i=1}^p L_i dw_i$, wo L_i eine beliebige r -reihige Matrix und dw_i p Normaldifferential erster Gattung sind.

In diesem Spezialfall ist (4) trivial. Für (5) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^p (\Omega_i \Omega_{i+p} - \Omega_{i+p} \Omega_i)$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^p (w_{i, l} w_{k, l+p} - w_{k, l} w_{i, l+p}) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, p),$$

wobei $w_{i, k}$ eine Periode des dw_i längs der geschlossenen Kurve A_k . Also sind sie die Riemann-Weierstrassschen Periodenrelationen der Differentiale erster Gattung.