17. *Einige Sätze über Kinematik.*

Von Tadahiko KUBOTA, M. J. A.

(Comm. July 12, 1948.)

Hier gebe ich einen analytischen Beweis für den Mannheimschen Satz über Kinematik, den er in seinem Buche über Kinematik auf synthetischem Wege bewiesen hat.[1] Hier benutze ich die Methode, die E. J. Nyström im Jahre 1932 zum Beweis des Darbouxschen Satzes verwendet hat.[2] Auch behandle ich einige Probleme in der Kinematik.

1. Der Satz lautet:

Bewegen sich vier feste, auf einer beweglichen Geraden g gelegene Punkte auf vier festen Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ebene E liegen, so bewegen sich auch andere Punkte der Geraden g auf festen Kugeln, deren Mittelpunkte auf E liegen. Ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kegelschnitte. Die Punktreihe auf der Geraden g ist zur Punktreihe auf dem Kegèlschnitte projektiv.

Zum Beweis dieses Satzes nehme man die gegebene Ebene E als $z=0$ des rechtwinkligen Koordinatensystems an, und die Gleichungen von den vier Kugeln seien

$$x^2+y^2+z^2-2h_ix-2k_iy+h_i^2+k_i^2-r_i^2=0 \qquad i=1,2,3,4,$$

Die Koordinaten der vier festen Punkte auf g seien

$$x_i=\xi+lt_i,\ \ y_i=\eta+mt_i,\ \ z_i=\xi+nt_i \qquad i=1,2,3,4.$$

und die des anderen Punktes P auf g seien

$$x=\xi+lt, \quad y=\eta+mt, \quad z=\xi+nt$$

wobei $l^2+m^2+n^2=1$ ist.

Dann gelten

$$[x+l(t_i-t)=h_i]^2+[y+m(t_i-t)-k_i]^2 \\ +[z+n(t_i-t)]^2=r_i^2 \qquad i=1,2,3,4.$$

d. h. $$x^2+y^2+z^2-2h_ix-2k_iy+(t_i-t)^2+h_i^2+k_i^2-r_i^2-2h_il(t_i-t) \\ -2k_im(t_i-t)+2(xl+ym+zn)(t_i-t)=0,\ i=1,2,3,4.$$

Eliminiert man l, m, $xl+ym+zn$ aus den obigen Gleichungen, so erhält man

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-2h_1x-2k_1y+(t_1-t)^2+h_1^2+k_1^2-r_1^2 & h_1(t_1-t) & h_1(t_1-t) & t_1-t \\ x^2+y^2+z^2-2h_2x-2k_2y+(t_2-t)^2+h_2^2+k_2^2-r_2^2 & h_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2-t \\ x^2+y^2+z^2-2h_3x-2k_3y+(t_3-t)^2+h_3^2+k_3^2-r_3^2 & h_3(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3-t \\ x^2+y^2+z^2-2h_4x-2k_4y+(t_4-t)^2+h_4^2-k_4^2-r_4^2 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4-t \end{vmatrix}=0,$$

welche eine Kugel darstellt.

Also liegt der Punkt P auf der obigen Kugel. Bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes mit h, k, so sind

---

1) Mannheim Principes et développpements de géométrie cinématique, 1894.

2) E. J. Nyström, Über den Darboux-Königsschen Planigraphen. Societas cientiarum Fennica Commentationes Physico-Mathematicae VI 15 (1932).

$$h=\begin{vmatrix} h_1 & h_1(t_1-t) & k_1(t_1-t) & t_1-t \\ h_2 & h_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2-t \\ h_3 & h_3(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3-t \\ h_4 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4-t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & k_1(t_1-t) & t_1-t \\ 1 & k_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2-t \\ 1 & h_3(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3-t \\ 1 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4-t \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} h_1 & h_1t_1 & k_1(t_1-t) & (t_1-t) \\ h_2 & h_2t_2 & k_2(t_2-t) & (t_2-t) \\ h_3 & h_3t_3 & k_3(t_3-t) & (t_3-t) \\ h_4 & h_4t_4 & k_4(t_4-t) & (t_4-t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & k_1(t_1-t) & t_1 \\ 1 & h_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2 \\ 1 & h_3(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3 \\ 1 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4 \end{vmatrix}$$

$$k=\begin{vmatrix} k_1 & h_1(t_1-t) & k_1t_1 & (t_1-t) \\ k_2 & h_2(t_2-t) & k_2t_2 & (t_2-t) \\ k_3 & h_3(t_3-t) & k_3t_3 & (t_3-t) \\ k_4 & h_4(t_4-t) & k_4t_4 & (t_4-t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & k_1(t_1-t) & t_1 \\ 1 & h_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2 \\ 1 & h_3(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3 \\ 1 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4 \end{vmatrix}$$

Daraus folgt, dass Ihre Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte lieger

Wenn also

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1(t_1-t) & k_1(t_1-t) & t_1 \\ 1 & h_2(t_2-t) & k_2(t_2-t) & t_2 \\ 1 & h^{8}(t_3-t) & k_3(t_3-t) & t_3 \\ 1 & h_4(t_4-t) & k_4(t_4-t) & t_4 \end{vmatrix}=0$$

ist, so wird die entsprechende Kugel eine zur Ebene $z=0$ senkrechte Ebene. Die Punktreihe auf g ist zur Punktreihe des Mittelpunktes auf diesem Kegelschnitte projektiv. Damit ist der Mannheimsche Satz auf analytischem Wege bewiesen.

2. *Es seien fünf Punkte* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *und ein Punkt* A *auf einer Geraden gegeben. Ferner seien fünf Ebenen* E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 *in allgemeinen Lagen gegeben.*

Bewegt sich eine Gerade g *derart, dass Ihre fünf Schnittpunkte* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *mit den Ebenen* E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 *zu den fünf gegebenen Punkten* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *projektiv sind, so bewegt sich der Punkt* B, *welcher die Bezichung*

$$A_1A_2A_3A_4A_5A \quad B_1B_2B_3B_4B_5B$$

erfüllt, auch auf einer festen Ebene.

Zum Beweis nehmen wir die Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 als Koordinatenebenen an und die Gleichungen der Geraden g seien

$$\rho\xi_1=x_1+l_1r,\ \rho\xi_2=x_2+l_2r,\ \rho\xi_3=x_3+l_3r,\ \rho\xi_4=x_4$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Koordinaten des Punktes bedeuten.

Bezeichnet man die Doppelverhältnisse $(AA_1A_4A_3)$, $(AA_2A_4A_3)$ bezw. mit a, b, dann

sind $\quad (BB_1B_4B_2)=(AA_1A_4A_3)=a$ d.h. $x_1l_2=ax_2l_1 \quad (1)$

$\quad (BB_1B_4B_3)=(AA_1A_4A_3)=b$ d.h. $x_1l_3=bz_3l_1 \quad (2)$

Die Gleichung der Ebene E_5 sei

$$p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3+p_4\xi_4=0$$

und bezeichnet man $(AA_1A_4A_5)$ mit c, so ist

$$\frac{(p_1l_1+p_2l_2+p_3l_3)x_1}{(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)l_1}=c$$

Also erhält man nach (1), (2)

$$p_1x_1+ap_2x_2+bp_3x_3-c(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)=0$$

Folglich bewegt eich der Punkt B auf einer Ebene.

3. *Es seien nun sechs Punkte* A_1,, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *und ein Punkt* A *auf einer Geraden g gegeben. Ferner seien sechs Ebenen* E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 *in allgemeinen Lagen gegeben. Bewegt sich eine Gerade g derart, dass Ihre Schnittpunkte* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 *mit den Ebenen* E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 *zu* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *projectiv sind, so beschreibt der Punkt* B, *der die Beziehung*

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A \quad B_1B_2B_3B_4B_5B_6B$$

erfüllt, eine Gerade g beschreibt eine Regelschar zweiter Ordnung.

Man nehme wie im vorigen Artikel die Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4, als Koordinatenebenen an und die Gleichungen der Geraden g seien

$$\rho\xi=x_1+l_1r, \quad \rho\xi_2=x_2+l_2r_2 \quad \rho\xi_3=x_3+l_3r, \quad \rho\xi_4=x_4$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Koordinaten des Punktes B bedeuten.

Bezeichnet man die Doppolverhältnisse $(AA_1A_4A_3)$, $AA_1A_4A_2)$ bezw. mit a, b, dann sind

$$(BB_1B_4B_2)=(AA_1A_4A_2)=a, \quad \text{d.h. } x_1l_2=ax_2l_1 \qquad (1)$$
$$(BB_1B_4B_3)=(AA_1A_4A_3)=b, \quad \text{d.h. } x_1l_3=bx_3l_1 \qquad (2)$$

Die Gleichungen der Ebenen E_5, E_6 seien

$$p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3+p_4\xi_4=0, \quad q_1\xi_1+q_2\xi_2+q_3\xi_3+q_4\xi_4=0$$

Man bezeichne $(AA_1A_4A_5)$, $(AA_1A_4A_6)$ bezw. mit c, d, dann sind nach (1), (2)

$$(p_1l_1+p_2l_2+p_3l_3)x_1=c(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)l_1,$$
$$(q_1l_1+q_2l_2+q_3l_3)x_1=d(q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3+q_4x_4)l_1$$

Also erhält man

$$p_1x_1+p_2ax_2+p_3bx_3=c(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)$$
$$q_1x_1+q_2ax_2+q_3bx_3=d(q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3+q_4x_4)$$

Also bewegt sich der Punkt B auf einer Geraden. Da die Gerade g unendlich viele feste Geraden schneidet, so beschreibt g eine Regelschar zweiter Ordnung. Damit ist die Behauptung bewiesen.