77. *Eine gemischte Randwertaufgabe für einen Kreis.*

Von Yûsaku KOMATU.
Mathematisches Seminar, Institut für Technologie zu Tokyo.
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1952.)

1. Die Randwertaufgabe von harmonischen Funktionen hat zwar in bezug auf das Dirichletsche sowie Neumannsche Problem besonders eingehend erforscht. Aber die Untersuchungen der übrigen, d. h. der gemischten Probleme werden noch nicht für genug angesehen.

In der vorliegenden Note sollen wir uns mit dem einfachsten Fall der letzten Probleme beschäftigen, nämlich mit dem zweidimensionalen Fall, wo das Grundgebiet der Einheitskreis ist, dessen ein Peripheriebogen die Randwerte der gesuchten Funktion selbst trägt und der übrige Bogen diejenigen ihrer Normalableitung trägt. Wir sollen eine explizite Integraldarstellung für die Lösung dieser Randwertaufgabe herleiten, welche der Poissonschen Darstellung entspricht, und dann einige von ihren Eigenschaften erwähnen. Aber hier wollen wir uns nur auf eine Skizze beschränken. Ausführliche Beweisführung wird andernorts erscheinen.

2. Wir betrachten zuerst vorbereitend eine Funktion, welche das Einheitskreisinnere in der ζ-Ebene eineindeutig und konform auf ein Gebiet in der W-Ebene, das dadurch entsteht, daß man das Einheitskreisäußere längs eines von einem Punkt der Peripherie orthogonal ausgehenden Segments aufschlitzt.

Gegeben seien ein innerer Punkt z und zwei Randpunkte e^{ia}, e^{ib} mit $a<b<a+2\pi$ des ζ-Einheitskreises, und die Abbildung sei so normiert, daß der Bogen $b<\arg\zeta<a+2\pi$ in den Schitz übergeht, und daß der Punkt z in den unendlichfernen Punkt übergeht und sogar als ein Pol mit einem positiven Residuum auftritt. Die diese Abbildung vermittelnde Funktion $W=W(\zeta)\equiv W(\zeta;\, z, a, b)$ ist dann durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt und in einer expliziten Weise mittelst einer elementaren Funktion durch die Gleichung

$$\frac{\Gamma W}{(1+\Gamma W)^2}=H\frac{\bar{\Gamma}(\zeta-z)/(1-\bar{z}\zeta)}{(1+\bar{\Gamma}(\zeta-z)\,/\,(1-\bar{z}\zeta))^2}$$

geliefert, worin gesetzt sind

$$\Gamma=\sqrt{l(e^{ia};z)\,l(e^{ib};z)},$$

$$e^{iK}=\sqrt{l(e^{ia};z)/l(e^{ib};z)},\qquad H=\cos^2\frac{K}{2}$$

mit einer linearen Funktion von ζ

$$l(\zeta; z)=\frac{\zeta-z}{1-\bar{z}\zeta}.$$

Hier sind die Quadratwurzeln für die Ausdrücke von Γ und e^{iK} diejenigen Zweige zu nehmen, welche, als Funktionen vom Parameter z angesehen, an $z=0$ die Werte $-e^{i(a+b)/2}$ bzw. $-e^{-i(b-a)/2}$ annehmen.

3. Es sei nun $u(\zeta)$ eine Funktion, welche sich in $|\zeta|<1$ regulär harmonisch und samt ihrer radialen Ableitung auf $|\zeta|\leqq 1$ stetig verhält. Die Funktion $\lg|W(\zeta)|$ verhält sich ebenfalls so abgesehen von nur einen einzigen logarithmischen Pol z, um welchen aber die Summe $\lg|W(\zeta)|+\lg|\zeta-z|$ harmonisch bleibt.

Wir wenden nun die Greensche Formel an auf diese beiden Funktionen in bezug auf ein Teilgebiet des Einheitskreises, welches durch Ausschneiden einer kleinen Kreisscheibe vom Radius η um den Punkt z entsteht, und sodann den Grenzübergang $\eta\to 0$ ausführen. Unter Berücksichtigung des eigentümlichen Randverhaltens von $W(\zeta)$ verfolgen wir eine übliche Schlußweise. Dann erhalten wir nach einigen Rechnungen eine gesuchte Darstellung

$$\begin{aligned} u(z)=&\frac{1}{2\pi}\int_a^b u(e^{i\varphi})\frac{\sqrt{1-\cos\Psi}}{\sqrt{\cos K-\cos\Psi}}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_b^{a+2\pi}\frac{\partial u(e^{i\varphi})}{\partial\nu}\lg\frac{(\sqrt{\cos\Psi+1}+\sqrt{\cos\Psi-\cos K})^2}{1+\cos K}d\varphi, \end{aligned}$$

worin $\partial/\partial\nu$ die Differentiation längs innerer Normale bedeutet und ferner die Bezeichnung

$$e^{i\Psi}=\bar{\Gamma}l(e^{i\varphi}; z)$$

benutzt ist.

4. Wir werden zwei extreme Fälle untersuchen.

Erstens, der Fall $b\to a+2\pi-0$ für ein festes a. Dann nähert sich das zweite Glied unserer Darstellung dem Wert Null, während das erste sich dem Poissonschen Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}u(e^{i\varphi})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi$$

nähert. Also enthält unsere Formel die Poissonsche als einen unmittelbaren Grenzfall, was vorher erwartet werden wird.

Zweitens, der Fall $b\to a+0$ für ein festes a. In diesem Falle würde es als plausibel erwartet, daß die Integraldarstellung des Neumannschen Problems, nämlich

$$u(0)-\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\frac{\partial u(e^{i\varphi})}{\partial\nu}\lg\frac{1}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi,$$

auch ohne weiteres erhalten würde. Aber der Sachverhalt ist nicht so einfach. Die Randwerte $\partial u(e^{i\varphi})/\partial\nu$ müssen bekanntlich stets der Bedingung

$$\int_a^{a+2\pi}\frac{\partial u(e^{i\varphi})}{\partial\nu}d\varphi=0$$

genügen. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung läßt es sich zeigen, daß das erste Glied unserer Darstellung sich nicht dem Wert Null sondern dem Wert $u(e^{ia})$ nähert wenn $b\to a+0$. Genauer untersucht, läßt sich das Resultat sogar derart verschärfen, daß das genannte Glied sich im allgemeinen dem Wert

$$\lim_{b\to a+0}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{u(e^{i\varphi})}{\sqrt{(\varphi-a)(b-\varphi)}}d\varphi$$

nähert, wenn bloß die Existenz der letzten Größe vorausgesetzt ist.

Folglich nähert sich das zweite Glied einschließlich Minuszeichens natürlich zu $u(z)-u(e^{ia})$, worin jetzt $u(z)$ durch die oben genannte Darstellung des Neumannschen Problems geliefert wird.

5. Wir gehen nun zur umgekehrten Aufgabe über. Vorgegeben seien zwei beliebige in $a<\varphi<b$ bzw. $b<\varphi<a+2\pi$ integrierbare Funktionen $U(\varphi)$ und $V(\varphi)$. Dann entsteht die Frage, ob die durch den Ausdruck

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b U(\varphi)\frac{\sqrt{1-\cos\Psi}}{\sqrt{\cos K-\cos\Psi}}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_b^{a+2\pi}V(\varphi)\lg\frac{(\sqrt{\cos\Psi+1}+\sqrt{\cos\Psi-\cos K})^2}{1+\cos K}d\varphi$$

dargestellte Funktion $u(z)$ tatsächlich den Randbedingungen

$$u(e^{i\varphi})=U(\varphi)\text{ für }a<\varphi<b,\qquad\frac{\partial u(e^{i\varphi})}{\partial\nu}=V(\varphi)\text{ für }b<\varphi<a+2\pi$$

genügt. Hierbei $u(e^{i\varphi})$ und $\partial u(e^{i\varphi})/\partial\nu$ betreffen die Grenzwerte von innen im gewöhnlichen Sinne. Daß $u(z)$ sich in $|z|<1$ harmonisch verhält, ist augenscheinlich.

Die Antwort lautet bejahend! Einzelheiten in den verschiedenen Abschätzungen sind ganz elementar, trotzdem ziemlich mühsam. Deswegen beschränken wir uns an dieser Stelle nur darauf, daß wir das Endresultat kurz aussprechen.

Unter der Voraussetzung, daß auch $U(\varphi)/\sqrt{(\varphi-a)(b-\varphi)}$ integrierbar in $a<\varphi<b$ ist, genügt die letztgenannte Funktion $u(z)$ den angegebenen Randbedingungen fast überall. Dabei wird die radiale Annäherung von z zu einem Peripheriepunkt oder allgemeiner die Annäherung längs eines Stolzschen Weges zugelassen.

Wie bereits gesagt, wird die ausführliche Beweisführung dieser Tatsache samt einigen Verallgemeinerungen demnächst irgendwo erscheinen.