145. *Support et support singulier de l'hyperfonction*

Par Mitsuo MORIMOTO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Sept. 13, 1971)

Introduction. Soit V une variété réel-analytique orientée. $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}$) désigne le faisceau des germes d'hyperfonctions (resp. de fonctions réel-analytiques) sur V. Soit T^*V l'espace fibré des espaces cotangentiels sur V. $S^*V=(T^*V\setminus V)/\boldsymbol{R}^+$ se dit l'espace fibré des sphères cotangentielles. On note par $(x, i\xi\infty)$ le point de S^*V qui est la classe du vecteur cotangentiel $(x, \xi)\in T^*V$. π désignera la projection canonique de S^*V sur V. On peut construire un faisceau $\mathcal{C}$ sur S^*V et une application $\beta: \mathcal{B}\to\pi_*\mathcal{C}$ tels que la suite suivante soit définie et exacte:

$$0\to\mathcal{A}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{B}\xrightarrow{\beta}\pi_*\mathcal{C}\to 0,$$

où α est l'injection naturelle et $\pi_*\mathcal{C}$ est l'image directe du faisceau $\mathcal{C}$ par la projection π (Voir pour les détails [4, 5, 6]). Pour une hyperfonction f sur V, le support de la section βf du faisceau $\mathcal{C}$ sur S^*V s'appelle le support singulier de f, que l'on note par $\mathrm{S.S.}\, f=\mathrm{supp}\,\beta f$.

On sait que les faisceaux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont flasques [2], mais le support singulier de f restreint la forme possible du support de f, et vice versa. Un cas très fondamental de cette phénomème est le lemme dû à Kawai-Kashiwara, qu'ils emploient pour démontrer le théorème d'Holmgren. Citons ce lemme pour la commodité du lecteur.

Lemme (le lemme (8.5) de [6]). *Soient f une hyperfonction sur Ω un voisinage d'un point $x_0\in V$, φ une fonction réel-analytique sur Ω telle que $d\varphi_{x_0}\neq 0$. Supposons que f satisfait à deux conditions suivantes:*

a) $\mathrm{S.S.}\, f\not\ni(x_0, i(d\varphi_{x_0})\infty)$ *ou* $\mathrm{S.S.}\, f\not\ni(x_0, -i(d\varphi_{x_0})\infty)$;

b) $\mathrm{supp}\, f\subset\{x\in\Omega\,;\,\varphi(x)\leqq\varphi(x_0)\}$.

Alors f s'annule au voisinage du point x_0.

Nous présentons dans cette note un théorème de la quasi-analyticité des hyperfonctions de certain type. Notre théorème donne un autre example de l'interdépendance du support et du support singulier d'une hyperfonction.

Remarquons ici le rapport de nos résultats avec des résultats en cas de distributions. Dans la terminologie du chapitre 5 de Vladimirov [7], notre théorème se correspond à l'enveloppe $B(G)$ de domaine G, tandis que le lemme de Kawai-Kashiwara se correspond à l'enveloppe $B_\Gamma(G)$.

Présentation du théorème. On suppose dorénavant que la variété V est un ouvert d'un espace euclidien réel E à $n+1$ dimensions. E^*

désigne le dual de E. Le point $x\in E$ est représenté par $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ et $\xi\in E^*$ par $(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$. Posons $S^*=(E^*\backslash\{0\})/\boldsymbol{R}^+$. Pour $\xi\in E^*$, $\xi\neq 0$, la classe de ξ dans S^* se désigne par $i\xi\infty$. Pour un ensemble A de E^*, on note

$$iA\infty=\{i\xi\infty\,;\,\xi\in A,\,\xi\neq 0\}.$$

Dans cette situation l'espace fibré S^*V s'identifie naturellement au produit $V\times S^*$:

$$S^*V\cong V\times S^*=V\times iE^*\infty.$$

Théorème. *Soit f une hyperfonction sur un voisinage Ω de l'origine de E. On suppose que f satisfait à deux conditions suivantes:*

i) S. S. $f\ni(x, i\xi\infty)$ *implique* $\xi_0\neq 0$;

ii) *il existe un positif a tel que* supp $f\ni x$ *implique* $x_0\geqq a|x_1|$.

Alors f s'annule au voisinage de l'origine.

Rappel des résultats. Considérons un autre espace euclidien $\tilde{E}$ à $m+1$ dimensions. $\tilde{E}^*$ désigne le dual de $\tilde{E}$. $y\in\tilde{E}$ et $\eta\in\tilde{E}^*$ ont comme coordonnées $(y_0, y_1, \cdots y_m)$ et $(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_m)$ respectivement. On munit $\tilde{E}$ du produit de Minkowski:

$$(y, y)=y_0^2-y_1^2-\cdots-y_m^2.$$

On note le cône de lumière positif par Γ_m:

$$\Gamma_m=\{y\in\tilde{E}\,;\,y_0>0,\ (y, y)>0\}.$$

On pose

$$\square_m(\eta)=\eta_0^2-\eta_1^2-\cdots-\eta_m^2.$$

$\tilde{\Omega}$ désignera un ouvert de $\tilde{E}$.

Nous nous rappelons d'abord deux conséquences directes du lemme de Kawai-Kashiwara.

Proposition 1. *Supposons que l'ouvert $\tilde{\Omega}$ contient un segment l de genre temps et le cône double D_l autour de l:*

$$D_l=(l+\Gamma_m)\cap(l-\Gamma_m).$$

Soit u une hyperfonction sur $\tilde{\Omega}$ telle que

$$\text{S. S. } u\subset\tilde{\Omega}\times i\{\eta\,;\,\square_m(\eta)\geqq 0\}\infty. \tag{1}$$

Si u s'annule au voisinage du segment l, u s'annule dans le cône double D_l.

Soient H un hyperplan de genre espace de $\tilde{E}$, ω un ouvert de H. Le cône double D_ω de base ω est défini comme suit:

$$D_\omega=\{y\in\tilde{E}\,;\,((y-\bar{\Gamma}_m)\cup(y+\bar{\Gamma}_m))\cap H\subset\omega\}. \tag{2}$$

Proposition 2. *Supposons que $\tilde{\Omega}$ contient le cône double D_ω de base ω défini par* (2). *Soit u une hyperfonction sur $\tilde{\Omega}$ telle que*

$$\text{S. S. } u\subset\tilde{\Omega}\times i\{\eta\,;\,\square_m(\eta)\leqq 0\}\infty. \tag{3}$$

Si u s'annule au voisinage de ω dans $\tilde{E}$, u s'annule dans le cône double D_ω.

On pose

$$\square_m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial y_m^2}.$$

Si une hyperfonction u sur $\tilde{\Omega}$ satisfait à l'équation différentielle

$$\square_m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)=0 \qquad \text{sur } \tilde{\Omega},$$

alors, grâce au théorème fondamental de Sato [5, 6] concernant la régularité des solutions hyperfonctions de l'équation différentielle, on a

$$\text{S. S. } u \subset \tilde{\Omega} \times i\{\eta\,;\, \square_m(\eta)=0\}\infty. \tag{4}$$

Supposons maintenant $m=n+1$ et $\tilde{E}=E\times \boldsymbol{R}$. On note

$$(y_0, y_1, \cdots, y_n, y_{n+1})=(x_0, x_1, \cdots, x_n, t)$$
$$(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n, \eta_{n+1})=(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \tau),$$

etc. On va considérer $E=E\times\{0\}\subset\tilde{E}$ et on note

$$\square_n(\xi)=\square_{n+1}(\xi, 0).$$

Si une hyperfonction u sur $\tilde{\Omega}$ satisfait à (4), alors la restriction de u sur $\Omega=E\cap\tilde{\Omega}$, notée $u(x, 0)$, peut être définie et on a

$$\text{S. S. } u(x, 0)\subset \Omega\times i(\xi\,;\,\square_n(\xi)\geqq 0\}\infty.$$

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \square_{n+1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial t}\right)u(x, t)=0, \\ u(x, 0)=\mu_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\mu_1(x), \end{cases} \tag{5}$$

où μ_0 et μ_1 sont hyperfonctions sur un ouvert Ω de E. Nous tâchons de chercher la solution hyperfonction u du problème de Cauchy (5). Un théorème de Kawai concernant l'opérateur différentiel I-hyperbolique [3, 3 bis] donne la proposition suivante:

Proposition 3. *Si les deux hyperfonctions μ_0 et μ_1 satisfont à la condition*

$$\text{S. S. } \mu_i \subset \Omega\times i\{\xi\,;\,\square_n(\xi)>0\}\infty \qquad \text{pour } i=1, 2,$$

le problème de Cauchy (5) *est résoluble localement et la solution hyperfonction est unique.*

En effet, pour $I=\Omega\times i\{\xi\,;\,\square_n(\xi)>0\}\infty$, l'opérateur $\square_{n+1}(\partial/\partial x, \partial/\partial t)$ est I-hyperbolique. La proposition résulte du théorème de Kawai.

Démonstration du théorème. En effectuant une transformation linéaire convenable et en diminuant le voisinage Ω de l'origine et le positif a, on peut supposer que f satisfait aux conditions

i') et ii), où

i') $\text{S. S. } f\subset\Omega\times i\{\xi\,;\,\square_n(\xi)>0\}\infty.$

Nous pouvons alors suivre l'argument d'Araki [1] en appuyant sur les propositions 1, 2 et 3.

Résolvons d'abord le problème de Cauchy (5) pour les données de Cauchy

$$\mu_0=f, \qquad \mu_1=0.$$

La solution hyperfonction $u(x, t)$ existe dans l'ouvert

$$\tilde{\Omega}=\{(x,t)\,;\,|x|<\varepsilon,\ |t|<\varepsilon\},$$

où ε est un positif, qui dépend de f. Comme u est uniquement déterminée par f, il existe deux positifs r, s suffisamment petits tels que u s'annule au voisinage des segments de genre temps l_1 et l_2, ou

$$l_1=\{(x_0, r, 0, \cdots, 0)\,;\, -ar-2s<x_0<ar\},$$
$$l_2=\{(x_0, -r, 0, \cdots 0)\,;\, -ar-2s<x_0<ar\}.$$

Par la proposition 1, u s'annule dans deux cônes doubles D_{l_1} et D_{l_2}. En particulier u s'annule au voisinage de

$$D_{l_1}\cap D_{l_2}\cap\{(x,t)\,;\,x_0=-s\},$$

lequel contient le disque d:

$$d=\{(x,t)\,;\,x_0=-s,\ x_1^2+\cdots+x_n^2+t^2<(s+ra)^2-r^2\}.$$

On utilise maintenant la proposition 2 et en conclut que l'hyperfonction u s'annule au voisinage de l'origine pourvu que

$$2as-(1-a^2)r>0. \tag{6}$$

Les deux positifs r et s peuvent se tendre vers zero satisfaisant à l'inégalité (6), ce qui achève la démonstration.

Remarque. Dans le théorème, on a supposé que le fermé

$$F_a=\{x\in\Omega\,;\,x_0\geqq a|x_1|\}$$

contient le support de f, pour un positif a. On peut affaiblir cette hypothèse en remplaçant la condition ii) par ii′) suivante:

ii′) Pour tout $\delta>0$, on a

$$\mathbf{C}\,(\mathrm{supp}\,f)\cap\{x\,;\,(x_0-\delta)^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqq\delta^2\}\neq\emptyset.$$

Corollaire. *Supposons* $\dim E\geqq 2$. *Une hyperfonction f sur un voisinage Ω de l'origine satisfait à la condition suivante*:

i) *il existe un vecteur* $y\in E, y\neq 0$ *tel que* S. S. $f\ni(x, i\xi\infty)$ *implique* $\langle y,\xi\rangle\neq 0$;

ii) *il existe deux formes* $\xi,\eta\in E^*$ *linéairement indépendantes telles que* $\mathrm{supp}\,f\ni x$ *implique* $\langle x,\xi\rangle\geqq 0$ *et* $\langle x,\eta\rangle\geqq 0$.

Alors f s'annule au voisinage de l'origine.

Le corollaire résulte directement du théorème et le lemme de Kawai-Kashiwara.

Références

[1] Araki, H.: A generalization of Borchers' theorem. Helv. Acta Phys., **36**, 132–139 (1963).

[2] Kashiwara, M.: Sur la flaccidité du faisceau C et la transformation de Radon. Sûrikaiseki-ken. Kôkyû-roku, **114**, 1–4 (1971) (en japonais).

[3] Kawai, T.: Construction of elementary solutions for I-hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc. Japan Acad., **46**, 912–916 (1970).

[3 bis] ——: Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients. I. Publ. R. I. M. S. (à paraître).

[4] Morimoto, M.: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **17**, 215–239 (1970).
[5] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Proc. Intern. Congress Math. Nice (1970) (à paraître).
[6] Sato, M. and Kashiwara, M.: Structure de l'hyperfonction. Sûgaku-no-Ayumi, **15**, 9–71 (1970) (en japonais).
[7] Vladimirov, V. S.: Methods of the Theory of Functions of Several Complex Variables (1966). MIT Press, Cambridge Mass.