193. *Problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 12, 1971)

§ 1. Introduction

Nous avons étudié dans [6] et [7] de certains opérateurs elliptiques d'ordre supérieur dégénérés sur la frontière. La dégénéressance avait lieu en toutes directions par un ordre polynomial de la distance jusqu'au bord. Et les conditions aux limites posées avaient en général un caractère non local. Nous avons obtenu les estimations a priori, la régularité des solutions et la finitude de l'indice pour ces problèmes aux limites généraux. Mais nous n'avons donné pratiquement aucun exemple d'opérateurs pour lesquels l'existence et l'unicité des solutions s'obtiennent.

Dans le présent mémoire, nous étudions le problème de Dirichlet non homogène pour des opérateurs du second ordre à coefficients réels sur le bord. Nous précisons la classe d'opérateurs traités au début du § 2 (voir les formules (2.1), $\cdots$, (2.5)). Nous partons des estimations a priori pour le problème de Dirichlet et pour le problème formellement adjoint (sans aucune condition aux limites), les hypothèses posées sur les coefficients sont pour que les opérateurs deviennent essentiellement acrétifs (voir le Lemme 2), et finalement, nous obtenons le Théorème d'existence et d'unicité des solutions pour des opérateurs à un paramètre positif suffisamment grand.

Le principle de raisonnement est celui de M. Schechter [5]. La seule différence est la discussion de la régularité des solutions faibles développée dans le § 4.

Un résultat analogue sur le problème de Dirichlet est dans la collaboration de MM. Bolley et Camus [2] dont le détail n'est pas encore publié (voir aussi [1]).

§ 2. Hypothèses et théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ à frontière S hypersurface de classe C^∞, supposons que Ω soit situé localement à un seul côté de S. Nous considérons un opérateur différentiel Ω:

$$Lu(x)\equiv -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\varphi(x)u(x))+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)+a_0(x)u(x). \tag{2.1}$$

D'abord, le poids $\varphi(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$ satisfait à la condition

$$\varphi(x)>0,\ \text{dans } \Omega\,;\ \varphi(x)=\text{la distance de } x \text{ jusqu'à } S,\ \text{dans } U, \tag{2.2}$$

où U est un voisinage de S dans $\bar{\Omega}$. Ensuite, sur les $a_j(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ $(0 \leqq j \leqq n)$, nous faisons les hypothèses (2.3) et (2.5) que voici : Supposons que les

$$a_j(x')(1 \leqq j \leqq n) \text{ soient réelles partout sur } S, \tag{2.3}$$

où x' désigne toujours le point générique de S. Posons

$$\rho(x') = -\sum_{j=1}^{n} a_j(x')(\nu_{x'})_j, \tag{2.4}$$

où $\nu_{x'}$ est le vecteur du longueur 1 normal intérieur à S au point x', $(\nu_{x'})_j$ est son j-ième composant, donc, $\rho(x')$ est réel et égal au composant normal du vecteur $(-a_1(x'), \cdots, -a_n(x'))$. Alors, la deuxième hypothèse est que

$$\rho(x') < -3/2 \text{ partout sur } S. \tag{2.5}$$

Cela posé, nous allons résoudre une équation différentielle

$$Lu(x) + \lambda u(x) = f(x) \text{ donné de } L^2(\Omega), \tag{2.6}$$

sous la condition de Dirichlet non homogène

$$\gamma_0 u(x') = u(x)|_S = g(x') \text{ donné de } H^{1/2}(S), \tag{2.7}$$

où λ est un paramètre positif. Nous cherchons des solutions $u(x)$ dans l'espace hilbertien $W_1^2(\Omega)$, où nous définissons, en général, les espaces de Sobolev avec poids $W_k^m(\Omega)(0 < k \leqq m)$ par

$$W_k^m(\Omega) = \{u(x) \in H^{m-k}(\Omega) \,;\, \varphi(x)^k u(x) \in H^m(\Omega)\} \tag{2.8}$$

(Sur la définition des espaces $H^s(\Omega)$ et $H^s(S)$, référer Lions-Magenes [4].) Nous énonçons le résultat principal de ce mémoire. Nous supposons toujours (2.2), (2.3) et (2.5) sur L. Alors,

Théorème. *Il existe un nombre $\lambda_0 > 0$ ayant la propriété suivante : Soit $\lambda > \lambda_0$. Alors, quels que soient $f(x) \in L^2(\Omega)$ et $g(x') \in H^{1/2}(S)$, il existe une et une seule solution $u(x) \in W_1^2(\Omega)$ du problème de Dirichlet* (2.6) *et* (2.7) *satisfaisant à l'estimation suivante*

$$C_1 \|u\|^2_{W_1^2(\Omega)} + (\lambda - \lambda_0)^2 \|u\|^2 \leqq \|f\|^2 + C_2(\|g\|^2_{H^{1/2}(S)} + \lambda \|g\|^2_{L^2(S)}), \tag{2.9}$$

avec des constantes C_1 et C_2 indépendantes de f, g et de $\lambda > \lambda_0$.

Soit $\lambda > \lambda_0$. L'opérateur $-L - \lambda I$ réalisé dans $L^2(\Omega)$ par la condition de Dirichlet engendre un semi-groupe de contraction. Sur la régularité d'ordre plus élevé des solutions, voir [2] et [7]. Bref, l'opérateur L sous la condition de Dirichlet n'est pas hypoelliptique.

§ 3. Démonstration du théorème

Soit L^* l'adjoint formel de L dans $L^2(\Omega)$. Il s'écrit sous la même forme que (2.1), et la fonction qui joue le rôle de $\rho(x')$ est égale à $-2 - \rho(x')$ pour L^*. Nous obtenons d'abord

$$(Lu, v) - (u, L^* v) = \int_S (\rho(x') + 1) u(x') \overline{v(x')} dS, \tag{3.1}$$

quels que soient u et v de $W_1^2(\Omega)$. Ensuite, nous avons des estimations a priori pour L et L^* qui seront démontrées dans le § 5:

Proposition 1. *Nous avons des constantes C_3 et C_4 telles que*

$$\|u\|^2_{W_1^2(\Omega)} \leqq C_3(\|Lu\|^2 + \|\gamma_0 u\|^2_{H^{1/2}(S)} + \|u\|)^2, \text{ et que} \tag{3.2}$$

$$\|v\|^2_{W^2(\Omega)} \leqq C_4(\|L^*v\|^2 + \|v\|^2), \tag{3.3}$$

quels que soient u et $v \in W_1^2(\Omega)$.

Troisièmement, nous estimons les expressions $Re(Lu, u)$ et $Re(L^*v, v)$. Posons

$$a(u, u) = \sum_{j=1}^{n} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \text{ et} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} J(u) &= Re(Lu, u) - a(u, u) - \int_S \frac{\rho(x')+1}{2} |u(x')|^2 \, dS \\ &= Re(L^*u, u) - a(u, u) + \int_S \frac{\rho(x')+1}{2} |u(x')|^2 \, dS. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lemme 2. *Il existe une constante C_5 telle que*

$$|J(u)| \leqq \varepsilon a(u, u) + \frac{C_5}{\varepsilon} \|u\|^2, \text{ quels que soient } u \in W_1^2(\Omega) \text{ et } 0 < \varepsilon \leqq 1. \tag{3.6}$$

Une combinaison facile de (3.2), (3.3) et (3.6) nous offre la

Proposition 3. *Nous avons un $\lambda_0 \geqq 0$ et des C_6, C_7 et $C_8 > 0$ tels que*

$$\begin{cases} C_6 \|u\|^2_{W_1^2(\Omega)} + (\lambda - \lambda_0)^2 \|u\|^2 \leqq \|(L+\lambda)u\|^2 + C_7(\|\gamma_0 u\|^2_{H^{1/2}(S)} + \lambda \|\gamma_0 u\|^2_{L^2(S)}), \\ \text{et que} \quad C_8 \|v\|^2_{W_1^2(\Omega)} + (\lambda - \lambda_0)^2 \|v\|^2 \leqq \|(L^* + \lambda)v\|^2, \end{cases} \tag{3.7}$$

pourvu que u, $v \in W_1^2(\Omega)$ et que $\lambda > \lambda_0$.

Avec ces préparations, nous commençons la démonstration du Théorème. Le problème non homogène (2.6) et (2.7) se réduit au problème homogène (3.8) suivant, car il existe un relèvement continu $R : H^{1/2}(S) \to W_1^2(\Omega)$ tel que $\gamma_0 R =$ identité. Le question est de chercher une solution de

$L_\lambda u(x) = f(x)$ et $\gamma_0 u(x') = 0$, pour un $f \in L^2(\Omega)$ donné, (3.8) où nous abrégeons $L_\lambda = L + \lambda$ et $L_\lambda^* = L^* + \lambda$. Nous suivons le raisonnement au § 5 de Schechter [5]. Introduisons, dans $W_1^2(\Omega)$, un nouveau produit scalaire $(L_\lambda^* u, L_\lambda^* v)$. La deuxième estimation de (3.7) montre que $\|L_\lambda^* u\|$ devient une norme équivalente à la norme originale $\|u\|_{W_1^2(\Omega)}$, pour un $\lambda (> \lambda_0)$ fixe. Etant donné un $f \in L^2(\Omega)$, $v \to (f, v)$ est une fonctionnelle anti-linéaire continue sur $W_1^2(\Omega)$, elle se représente donc par un élément unique w de $W_1^2(\Omega)$:

$$(f, v) = (L_\lambda^* w, L_\lambda^* v), \text{ quel que soit } v \in W_1^2(\Omega). \tag{3.9}$$

Lemme 4. *Etant donné un $f \in L^2(\Omega)$, soit w l'élément de $W_1^2(\Omega)$ déterminé par* (3.9). *Alors, w appartient en effet à $W_2^4(\Omega)$ (voir* ((2.8)).

Nous l'admettons pour le moment, et posons $u = L_\lambda^* w$. Alors, $u \in W_1^2(\Omega)$, et (3.9) et (3.1) montrent que u est une solution de (3.8). u est unique d'après la Proposition 3. Le Théorème est donc établi.

§ 4. Démonstration du lemme 4

Fixons un point $P \in S$, et prenons une boule $B_R = \{x \in \boldsymbol{R}^n ;\ |x - P| < R\}$. Supposons que R soit si petit que chaque point x de B'_R

$=B_R\cap\bar{\Omega}$ se représente par le couple (s, t), où $s=(s_1, \cdots, s_{n-1})$ soit un système de coordonnées locales sur $B_R\cap S$ et $t=$la distance de x à S. Supposons aussi que $\varphi(x)\equiv t$ dans B'_R. Alors, l'élément volumique dx s'écrit $\sqrt{g(s,t)}ds_1\cdots ds_{n-1}dt$ dans B'_R, et le laplacien Δ s'exprime localement

$$\Delta u(x)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial u_\beta}\right). \tag{4.1}$$

Nous pouvons également représenter L et L^* par ce système de coordonnées (s, t) dans B'_R. Soit $\zeta(x)$ une fonction quelconque de classe C^∞ à support dans B_R. Un raisonnement habituel par la méthode des quotients différentiels garantit la régularité "tangentielle":

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(\zeta w) \text{ et } \frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\varphi\frac{\partial(\zeta w)}{\partial s_\beta}\right)\in W_1^2(\Omega), \qquad \text{pour } 1\leqq\alpha,\beta\leqq n-1 \tag{4.2}$$

sous l'hypothése du Lemme 4. Ensuite, w est une solution faible de $L_\lambda L_\lambda^* w=f$. Nous extrayons tous les termes déjà appartenant à $L^2(\Omega)$ dans $L_\lambda L_\lambda^* w$. En posant

$$v(s,t)=\zeta(s,t)\sqrt{\frac{g(s,t)}{g(s,0)}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{4.3}$$

nous arrivons à une équation différentielle sur v:

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 v+3t\frac{\partial v}{\partial t}+(2-\rho(s)-\rho(s)^2)v=f_0(s,t)\in L^2(B'_R). \tag{4.4}$$

Remarquons ici que le support de v est contenu dans $0\leqq t\leqq R$ et que $tv(s,t)\in L^2(B'_R)$, car $t\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\in L^2(B'_R)$. Pour démontrer le Lemme 4, il suffit de vérifier le fait suivant:

$$v(s,t),\ t\frac{\partial v}{\partial t}(s,t) \text{ et } \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 v(s,t)\in L^2(B'_R). \tag{4.5}$$

Donc le Lemme 4 est réduit au suivant

Lemme 5. *Soit $\rho<-3/2$ une constante. Soit $v(t)\in\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}_+)$ ayant le support dans $0\leqq t\leqq 1$ telle que $tv(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$ et que*

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 v+3t\frac{dv}{dt}+(2-\rho-\rho^2)v=g(t), \text{ dans } \boldsymbol{R}_+ \tag{4.6}$$

avec une $g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Alors, les v, $t\dfrac{dv}{dt}$ et $\left(t\dfrac{d}{dt}\right)^2 v$ appartiennent à $L^2(\boldsymbol{R}_+)$.

Preuve du Lemme 5. $g(t)$ est aussi à support contenu dans $0\leqq t\leqq 1$, et signalons que $z^2+3z+2-\rho-\rho^2=(z+\rho+2)(z-\rho+1)$. Nous intégrons une fois (4.6):

$$\left(t\frac{d}{dt}+1-\rho\right)v(t)=-\int_t^\infty\left(\frac{s}{t}\right)^{\rho+2}g(s)\frac{ds}{s}\equiv g_1(t)). \tag{4.7}$$

$g_1(t)$ appartient à $L^2(\boldsymbol{R}_+)$, car $\rho<-3/2$. Intégrons encore une fois:

$$v(t)-ct^{\rho-1}=\int_0^t\left(\frac{t}{s}\right)^{\rho-1}g_1(s)\frac{ds}{s},$$

où c est une constante, et le membre à droite appartient encore à $L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Par hypothèse, $tv(t)$ appartient à $L^2(0,1)$, ct^{ρ} doit le faire aussi. Ceci implique que $c=0$. Par conséquent, $v(t)$ appartient à $L^2(\boldsymbol{R}_+)$, et les $t(dv/dt)$ et $(t(d/dt))^2v$ le font également grâce à (4.7) et à (4.6).

§ 5. Demonstration de la proposition 1

Dans ce §, nous étudions une équation différentielle sur $\boldsymbol{R}_+$:

$$Au(t)\equiv\left(-\frac{d^2}{dt^2}+1\right)(tu(t))+\left(-\rho\frac{d}{dt}+b\right)u(t)=g(t), \tag{5.1}$$

où les ρ et b sont des constantes complexes avec $Re\rho\neq-3/2$. Le second membre $g(t)$ est pris de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$, et des solutions sont cherchées dans $W_1^2(\boldsymbol{R}_+)=\{u(t)\in H^1(\boldsymbol{R}_+)\,;\,tu(t)\in H^2(\boldsymbol{R}_+)\}$. Premièrement, regardons l'équation homogène $Au=0$. Si l'on pose $u(t)=e^{-t}v(2t)$ et $2t=s$, $v(s)$ satisfait à l'équation hypergéométrique confluente:

$$sv''(s)+(c-s)v'(s)-av(s)=0, \text{ avec } a=\frac{b+\rho+2}{2} \text{ et } c=\rho+2. \tag{5.2}$$

Celle-ci admet les deux solutions $\Psi(a,c\,;s)$ et $e^s\Psi(c-a,c\,;-s)$ indépendantes, où

$$\left\{\begin{aligned}&\Psi(a,c\,;s)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}{}_1F_1(a,c\,;s)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}s^{1-c}{}_1F_1(a-c+1,2-c\,;s),\\&{}_1F_1(a,c\,;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)s^n}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)n\,!}\qquad\text{(série de Kummer).}\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

(Sur les fonctions spéciales, consulter [3].) En revenant à l'équation $Au=0$, la solution $e^t\Psi(c-a,c\,;-2t)$ n'appartient jamais à $W_1^2(\boldsymbol{R}_+)$ à cause de la croissance rapide à $t=+\infty$. Posons ensuite

$$U(t)=e^{-t}\Psi(a,c\,;2t). \tag{5.4}$$

Remarquons que $\frac{(-1)^n}{n\,!}\Psi(-n,c\,;s)=L_n^{c-1}(s)$ (polynôme de Laguerre) si $n=0,1,\cdots$.

Lemme 6. *Si $Re\rho<-3/2$, $U(t)$ appartient à $W_1^2(\boldsymbol{R}_+)$. Si $Re\rho>-3/2$, alors $U(t)$ le fait si et seulement si $b+\rho=-2r$ avec $r=1,2,3\cdots$.*

Proposition 7. *Soit $Re\rho>-3/2$.*

(i) *Si $b+\rho$ n'est égal à aucun entier pair négatif, alors A est un isomorphisme de $W_1^2(\boldsymbol{R}_+)$ sur $L^2(\boldsymbol{R}_+)$;*

(ii) *Soit, au contraire, $b+\rho=-2r$ $(r=1,2,\cdots)$. Définissons un sous-espace vectoriel X_r (de codimension 1) de $L^2(\boldsymbol{R}_+)$:*

$$X_r=\left\{g(t)\in L^2(\boldsymbol{R}_+)\,;\int_0^{\infty}g(t)t^{\rho+1}L_{r-1}^{\rho+1}(2t)e^{-t}dt=0\right\}.$$

Alors, A est une application linéaire continue de $W_1^2(\boldsymbol{R}_+)$ sur X_r, le noyau est de dimension 1 *et engendré par $L_{r-1}^{\rho+1}(2t)e^{-t}$.*

Maintenant, passons au cas où $\mathrm{Re}\rho < -3/2$. Nous résolvons l'équation (5.1) sous une condition aux limites non homogène

$$Bu \equiv \beta_0 u(0) + \beta_{-1}\int_0^\infty u(t)dt = \psi \in C: \text{ donné}, \tag{5.5}$$

où les β_0 et β_{-1} sont des constantes, elles doivent satisfaire à la *Condition de Shapiro-Lopatinski* (voir Vishik-Grushin [8] et aussi [6])

$$\left\{\begin{array}{l} BU \equiv S_0(\rho, b)\beta_0 + S_{-1}(\rho, b)\beta_{-1} \neq 0, \qquad \text{où} \\ S_{-1}(\rho, b) = \int_0^\infty U(t)dt \quad \text{et} \quad S_0(\rho, b) = U(0). \end{array}\right\} \tag{5.6}$$

Proposition 8. *Soit $\mathrm{Re}\rho < -3/2$ et supposons que la condition aux limites B définie par* (5.5) *satisfasse à* (5.6). *Alors, l'application $u \to (Au, Bu)$ est un isomorphisme de $W_1^2(\boldsymbol{R}_+)$ sur $L^2(\boldsymbol{R}_+) \times \boldsymbol{C}$.*

Pour démontrer les Propositions 7 et 8, nous nous procédons, par exemple, comme dans [6].

Démonstration de la Proposition 1. Substituons ρ de (5.1) par $\rho(x')$ de (2.4) (Pour traiter L^*, faisons $\rho \to -2-\rho(x')$). Et substituons b par $\pm\sum_{j=1}^n ia_j(x')\xi_j$, où $\xi \in R^n$ avec $\xi \cdot \nu_{x'} = 0$ et $|\xi| = 1$. ib est alors réel. Quand nous traitons L et L^* dans les §§ 2–4, nous nous trouvons dans l'une des situations suivantes: (1°) $\rho < -3/2$ et $b - \rho \neq$ entier pair $\leqq 0$; (2°) $\rho > -1/2$ et $b + \rho \neq$ entier pair < 0. Si (2°) a lieu, nous avons (i) de la Proposition 7, ce qui donne (3.3). Si (1°) a lieu, la condition de Dirichlet $Bu \equiv u(0)$ vérifie (5.6). Donc, la Proposition 8 implique (3.2).

Nous avons enfin la Proposition 1.

Références

[1] Bolley, P., et Camus, J.: C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, **271**, 593–595 (1971).
[2] Bolley, P., et Camus, J.: Ibid., 980–983.
[3] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., et Tricomi, F. G.: Higher Transcendental Functions, **1**, McGraw-Hill (1953).
[4] Lions, J. L., et Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes et applications, I. Dunod, Paris (1966).
[5] Schechter, M.: C. P. A. M., **12**, 457–486 (1959).
[6] Shimakura, N.: J. Math. Kyoto Univ., **9** (2), 275–335 (1969).
[7] ——: Proc. Japan Acad., **47**, 291–295 (1971).
[8] Vishik, M. I., et Grushin, V. V.: Mat. Sb., **80** (122), 455–491 (1969).