188. *Une caractérisation du principe du balayage pour un espace fonctionnel régulier*

Par Masayuki ITÔ
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., May 12, 1971)

1. Soient X un espace localement compact et à base dénombrable et ξ une mesure de Radon positive et partout dense dans X. A. Beurling et J. Deny ont défini un espace fonctionnel régulier H relatif à X et à ξ (cf. [1] et [2]). Nous utilisons ici les mêmes terminologies que dans leur article [1]. Nous supposons, dans cette note, que tout l'élément de H est à valeurs réelles. On dit que H est à noyau positif si tout le potentiel pur de H est non-négatif et que H satisfait au principe du balayage si, pour un ouvert ω de X et pour un potentiel pur u_μ de H, il existe un potentiel pur $u_{\mu'}$ de H, tel que μ' soit portée par $\overline{\omega}$ et que l'on ait $u_\mu \geqq u_{\mu'}$ et $u_\mu = u_{\mu'}$ ξ-presque partout dans ω.

Notons C_K l'espace des fonctions numériques, continues dans X et à support compact. Pour un ouvert Ω de X, H_Ω désigne l'adhérent de l'ensemble $\{\varphi \in H \cap C_K ; S(\varphi) \subset \Omega\}$, où $S(\varphi)$ désigne le support de φ. Alors H_Ω est un sous-espace fermé de H et un espace fonctionnel régulier relatif à Ω et à ξ.

En généralisant le résultat de I. Higuchi concernant l'espace fonctionnel associé au noyau besselien dans l'espace euclidien $R^n (n \geqq 1)$, on obtiendra le théorème suivant:

Théorème. *Soit H un espace fonctionnel régulier relatif à X et à ξ; alors les deux énoncés sont équivalents:*

(1) *Quel que soit Ω un ouvert de X, H_Ω est à noyau positif.*

(2) *H satisfait au principe du balayage.*

2. J. Deny a défini la capacité relative à un espace fonctionnel régulier H, qui est une généralisation immédiate de la capacité classique (cf. [2]). Il a montré que si H est à noyau positif, tout l'ensemble analytique de X est capacitable. On connaît aussi, d'après [1] et [2], qu'à une fonction u de H, on peut associer un raffinement u^* de u et que, quel que soit a un nombre réel, l'ensemble $\{x \in X ; u^*(x) \geqq a\}$ est capacitable par rapport à la capacité relative à H.

Lemme 1. *Soit H un espace fonctionnel régulier à noyau positif; alors, pour un ouvert Ω de X et pour un potentiel pur u_μ de H et avec $S(\mu) \subset \Omega$, il existe le potentiel pur u_μ^Ω de H_Ω et on a $u_\mu^\Omega = u_\mu - (u_\mu)'$, où $(u_\mu)'$ est la projection de u_μ sur le sous-espace fermé*

$$H'_\Omega = \overline{\{u_{\mu_1} - u_{\mu_2} \in H ; S(\mu_i) = C\Omega,\ \mu_i \geqq 0 \quad (i=1,2)\}}.$$

L'existence de u_μ^Ω est évidemment vue. Pour que $u_\mu^\Omega = u_\mu - (u_\mu)'$, il suffit de voir que $u_\mu - (u_\mu)'$ appartient à H_Ω. Soit (Ω_n) une suite croissante d'ouverts relativement compacts de X telle que l'on ait $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$; alors $u_\mu - (u_\mu)'_n$ appartient à H_Ω et $(u_\mu)'_n$ converge fortement vers $(u_\mu)'$ dans H avec $n \to \infty$, d'où $u_\mu - (u_\mu)' \in H_\Omega$. $(u_\mu)'_n$ désigne la projection de u_μ sur H'_{Ω_n}.

Lemme 2. *Soit H un espace fonctionnel régulier à noyau positif. Pour une fonction u de H et pour un fermé F de X, il existe un potentiel pur u_ν de H tel que l'on ait $S(\nu) \subset F$, $u^* \leqq u_\nu^*$ H-ppp sur F et $u^* = u_\nu^*$ presque partout pour ν.*

On dit qu'une propriété a lieu *H-ppp* sur F si, quel que soit u_λ un potentiel pur de H et avec $S(\lambda) \subset F$, elle a lieu presque partout pour λ.

On désigne par $E^+(F)$ la totalité des potentiels purs u_λ de H et avec $S(\lambda) \subset F$, et alors, elle est un cône convexe et fermé de H. Soit u_ν la projection de u sur $E^+(F)$; on a alors $u_\nu^* \geqq u^*$ *H-ppp* sur F et $u_\nu^* = u^*$ presque partout pour ν, car, quel que soit u_λ de $E^+(F)$.

$$(u_\nu - u, u_\lambda) = \int (u_\nu^* - u^*) d\lambda \geqq 0 \quad \text{et} \quad (u_\nu - u, u_\nu) = \int (u_\nu^* - u^*) d\nu = 0,$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire de H (voir [1]).

Réciproquement, si l'on a $S(\nu) \subset F$, $u_\nu^* \geqq u^*$ *H-ppp* sur F et $u_\nu^* = u^*$ presque partout pour ν, u_ν est la projection de u sur $E^+(F)$. La projection de u sur $E^+(F)$ est uniquement déterminée, d'où l'unicité de u_ν.

Montrons notre théorème. Notre définition du principe du balayage pour H est équivalent à l'énoncé suivant:

Pour un potentiel pur u_μ de H et pour un fermé F, il existe un potentiel pur $u_{\mu'}$ de H tel que l'on ait $S(\mu') \subset F$, $u_\mu \geqq u_{\mu'}$ et $u_\mu^* = u_{\mu'}^*$ *H-ppp* sur F.

On remarque ici que, pour une fonction u de H et pour un ouvert ω de X, $u^* \geqq 0$ *H-ppp* sur ω dès que $u \geqq 0$ ξ-presque partout sur ω. Donc l'implication (2)$\Rightarrow$(1) en résulte immédiatement, et montrons son inverse.

Soient u_μ un potentiel pur de H et F un fermé de X; alors, d'après le lemme 2, il existe un potentiel pur $u_{\mu'}$ de H, et un seul tel que l'on ait $S(\mu') \subset F$, $u_\mu^* \leqq u_{\mu'}^*$ *H-ppp* sur F et $u_\mu^* = u_{\mu'}^*$ presque partout pour μ'. On pose $G = \{x \in X; u_\mu^*(x) = u_{\mu'}^*(x)\}$.[1] L'ensemble G étant capacitable par rapport à la capacité relative à H, il existe une suite croissante (K_n) de compacts telle que $K_n \subset G$, $cap_H(K_n)$ converge vers $cap_H(G)$ avec $n \to \infty$, où $cap_H(K_n)$ désigne la capacité de K_n relative à H. D'après le lemme 1, on a $u_\mu \geqq (u_\mu)'_n$, où $(u_\mu)'_n$ est la projection de u_μ sur H'_{K_n}. Désignons par

[1] G dépend des raffinements de u_μ et de $u_{\mu'}$. Mais, il est déterminé excepté l'ensemble de la capacité extérieure nulle, car les raffinements d'un éléments de H sont égaux excepté l'ensemble de la capacité extérieure nulle.

$$H'_G = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H'_{K_n}}\,;$$

alors il est un sous-espace fermé de H. D'après $\mu'(CG)=0$, la suite (μ'_n) converge vaguement vers μ' avec $n\to\infty$, où μ'_n est la restriction de μ' sur K_n. En vertu de $\mu'\geqq\mu'_n$ et du fait que la suite $(u_{\mu'_n})$ converge faiblement vers $u_{\mu'}$ dans H, elle converge fortement vers $u_{\mu'}$ dans H. Donc $u_{\mu'}\in H'_G$. Notons $(u_\mu)'$ la projection de u_μ sur H'_G; alors, $(u_\mu)'_n$ converge fortement vers $(u_\mu)'$ dans H avec $n\to\infty$. On a, quelle que soit v de H'_G,

$$(v,(u_\mu)')=(v,u_\mu)=(v,u_{\mu'}),$$

et donc $(u_\mu)'=u_{\mu'}$. Par conséquent, $u_\mu\geqq u_{\mu'}$. La démonstration est ainsi complète.

Corollaire. *Soit H un espace fonctionnel régulier à noyau positif. Si, pour un potentiel pur arbitraire u_μ de H et pour un fermé arbitraire F de X, il existe une mesure de Radon réelle μ' portée par F, telle que l'on ait $u_{\mu'}\in H$, $u_\mu\geqq u_{\mu'}$ et $u^*_\mu=u^*_{\mu'}$ H-ppp sur F, H satisfait au principe du balayage; c'est-à-dire, μ' est positive.*

Cela est un cas spécial de notre théorème.

Le résultat analogue a-t-il lieu pour la noyau-fonction continue G au sens large?

3. On ne peut pas éviter la condition que H est régulier. Soient X un groupe abélien localement compact et à base dénombrable et ξ sa mesure de Haar. D'après notre théorème et un résultat obtenu dans [4], on a la proposition suivante:

Proposition. *Soit H un espace fonctionnel invariant par translations sur X et dont le noyau est $\kappa_1+\kappa_2$, où κ_1 est un noyau régulier sur X et κ_2 est un noyau singulier sur X. Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *Pour tout ouvert Ω de X, H_Ω est à noyau positif.*

(2) *κ_1 est un noyau de convolution de Dirichlet sur X.*

Un noyau régulier sur X signifie un noyau d'espace fonctionnel régulier et invariant par translations sur X. Un noyau singulier sur X est un noyau d'espace fonctionnel invariant par translations et qui ne contient pas de fonctions numériques, continues dans X et s'annulant à l'infini.

Notre proposition résulte du théorème et du fait que κ_1 est le noyau de l'espace fonctionnel $H_1=\overline{C_K\cap H}$ invariant par translations (cf. [4]). D'après la proposition, on obtient que, pour notre théorème, la régularité de H est inévitable. Voir [4].

Références

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **45**, 208–215 (1959).

[2] J. Deny: Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels. Sém. B. C. D. (1964/65).

[3] I. Higuchi: The Bessel kernels for a domain. Proc. Japan Acad., **47**, 844–849 (1971).

[4] M. Itô: Noyaux réguliers et noyaux singuliers. Nagoya Math. J., **44**, 61–78 (1972).