14. Über die nicht algebraischen Erweiterungen algebraischer Systeme

Von Kenjiro SHODA, M. J. A.

(Comm. Feb. 12, 1954)

In einer früheren Arbeit[1] haben wir die Theorie der algebraischen Erweiterungen eines algebraischen Systems studiert. Die vorliegende Note bildet eine Fortsetzung davon. Wir setzen die Sätze und die Terminologien in A. E. als bekannt voraus und wir beschäftigen uns jetzt mit den nicht algebraischen Erweiterungen.

§ 1. **Zerfallende Erweiterung.** Der in § 1 A. E. eingeführte Begriff der zerfallenden Erweiterungen ist grundlegend für die Untersuchung der nicht algebraischen Erweiterungen. Ist $\mathfrak{A}$ eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{B}$ mit Hilfe des normalen Untersystems $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\circ\mathfrak{C}$.

Satz 1. *Aus* $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}'\circ\mathfrak{B}'$ *folgt* $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{B}\smile\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}'\simeq\mathfrak{B}$, *wobei* $\simeq$ *einen Isomorphismus bedeutet.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}''/\mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{A}'$ isomorph ist, so induziert der Homomorphismus von $\mathfrak{A}'\simeq\mathfrak{A}''/\mathfrak{B}'$ auf $\mathfrak{A}$ einen Ismorphismus von $\mathfrak{A}''/\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{A}$. Dabei besteht $\mathfrak{C}$ aus den Elementen, die zu den Elementen aus $\mathfrak{B}$ kongruent nach $\mathfrak{B}'$ sind. Daher ist $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{B}\smile\mathfrak{B}'$ und ferner $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}'\simeq\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}'\frown\mathfrak{C}=\mathfrak{B}$ ist, so folgt $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}'\frown\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$, also ist $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{C}$.

In der Tat ist $\mathfrak{C}$ das $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ enthaltende kleinste normale Untersystem von $\mathfrak{A}''$. Ist $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{A}''$, so gilt also[2]

$$(\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B})\circ\mathfrak{B}'=\mathfrak{A}\circ(\mathfrak{B}\smile\mathfrak{B}').$$

Satz 2. *Jede Erweiterung* Ω *von* $\mathfrak{A}$ *ist algebraisch über einer zerfallenden Erweiterung von* $\mathfrak{A}$.

Beweis. Wir betrachten die sämtlichen zerfallenden Erweiterungen $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, die in Ω enthalten sind. Die dabei auftretenden Untersysteme $\mathfrak{B}$, d.h. die Untersysteme $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$, die normal in $\mathfrak{A}\smile\mathfrak{B}$ sind, bilden eine halbgeordnete Menge $\mathfrak{M}$. Da die Vereinigung $\mathfrak{B}^*$ von den $\mathfrak{B}$ in einer geordneten Teilmenge von $\mathfrak{M}$ kein Element ausser 0 mit $\mathfrak{A}$ gemeinsam hat und, da $\mathfrak{B}^*$ ersichtlich

---

1) K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, Osaka Math. J. **4** (1952), 133–144, zitiert im folgenden mit A. E. Die dort zugrundegelegten Bedingungen sind die folgenden:

a) Ist $\mathfrak{a}'$ algebraisch über $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}''$ algebraisch über $\mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a}''$ algebraisch über $\mathfrak{a}$.

b) Ist α algebraisch über $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}(\alpha)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{a}$.

2) Dies ist immer der Fall, wenn jedes Untersystem von $\mathfrak{a}$ normal ist.

normal in $A \smile \mathfrak{B}^*$ ist, so erhält man eine zerfallende Erweiterung $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}^*$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Untersystem, etwa $\mathfrak{C}$, aus $\mathfrak{M}$. Dann ist Ω algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$. Wäre nämlich Ω nicht algebraisch, so müsste Ω nach Satz 2, A. E. eine zerfallende Erweiterung $(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}) \circ \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ enthalten, die nach Satz 1 eine zerfallende Erweiterung $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ ist.[3]

Satz 3. *Jede Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$, die in einer schwach zerfallenden Erweiterung $\mathfrak{A} \triangle \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ enthalten ist, ist schwach zerfallend. Also ist jedes über $\mathfrak{A}$ algebraische Element aus $\mathfrak{A} \triangle \mathfrak{B}$ schon in $\mathfrak{A}$ enthalten, wenn man die Bedingung b) A. E.[4] voraussetzt.*

Beweis. Die Kongruenz von $\mathfrak{A} \triangle \mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}$ induziert eine Kongruenz von $\mathfrak{A}'$ nach $\mathfrak{A}' \frown \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}' \frown \mathfrak{B}$ ist zu $\mathfrak{A}$ isomorph. Also ist $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \circ (\mathfrak{A}' \frown \mathfrak{B})$. Ist $a \in \mathfrak{A} \triangle \mathfrak{B}$ ein algebraisches Element über $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}(a)$ nach der Bedingung b) A. E. algebraisch über $\mathfrak{A}$ und auf der anderen Seite, nach oben schwach zerfallend. Nach Satz 1 A. E. ist also $\mathfrak{A}(a) = \mathfrak{A}$.

Satz 4. *Jedes Untersystem sei normal. Ist a algebraisch über $\mathfrak{A}$, so ist a algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.*

Beweis. Ersichtlich ist $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})(a) = \mathfrak{A}(a) \smile \mathfrak{B}$. Nach Satz 10 A. E. und Satz 3 ist $\mathfrak{A}(a) \frown \mathfrak{B} = 0$, also ist $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})(a) = \mathfrak{A}(a) \times \mathfrak{B}$. Ist a nicht algebraisch über $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, so gibt es $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \subseteq (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})(a) = \mathfrak{A}(a) \times \mathfrak{B}$. Daher ist $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ zu einem Untersystem von $\mathfrak{A}(a)$ isomorph, d. h. $\mathfrak{A}(a)$ enthält gegen Satz 2, Satz 10 A. E. eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$.

Wenn wir uns auf den Fall beschränkt, wo jedes formal algebraische Element stets algebraisch ist, so gilt Satz 4 ersichtlich für jede Erweiterung von $\mathfrak{A}$, also sicher für $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$.

Im folgenden betrachten wir die folgenden Bedingungen.

c) *Ist a algebraisch über $\mathfrak{A}$, so ist a algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$.*

d) *Eine einfache Erweiterung $\mathfrak{A}(a)$ mit einem formal algebraischen Element a ist algebraisch über einer einfachen zerfallenden Erweiterung von $\mathfrak{A}$.*

Für eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ werden wir nun eine zerfallende Erweiterung $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ konstruieren derart, daß Ω algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ ist.

Die Elemente aus Ω seien wohlgeordnet:

$$a_1, a_2, \dots, a_\mu, \dots .$$

Wir konstruieren nun die wohlgeordnete Menge der Erweiterungen von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_\mu, \dots$$

folgendermassen. Ist a_μ algebraisch über $\bigcup \mathfrak{A}_i$, $i < \mu$, so setze man

3) Wir behaupten nicht, daß $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ eine maximale zerfallende Erweitrung ist.

4) Vgl. die Anmerkung 1).

$\mathfrak{A}_\mu = \bigcup \mathfrak{A}_\iota$, $\iota < \mu$. Ist α_μ nicht algebraisch über $\bigcup \mathfrak{A}_\iota$, so ist $\bigcup \mathfrak{A}_\iota(\alpha_\mu)$, $\iota < \mu$, eine algebraische Erweiterung einer zerfallenden Erweiterung $\bigcup \mathfrak{A}_\iota \circ \mathfrak{B}_\mu$ von $\bigcup \mathfrak{A}_\iota$. Nach der Bedingung d) ist $\bigcup \mathfrak{A}_\iota \circ \mathfrak{B}_\mu = \bigcup \mathfrak{A}_\iota(\beta_\mu)$ mit einem β_μ. In diesem Fall setzen wir $\mathfrak{A}_\mu = \bigcup \mathfrak{A}_\iota(\beta_\mu)$. Dann sind die $\mathfrak{A}_\mu$ alles zerfallende Erweiterungen $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}_\mu$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}_\iota \leq \mathfrak{C}_j$ für $\iota < j$. Gilt nämlich dasselbe für $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota < \mu$, d.h. ist $\mathfrak{A}_\iota = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}_\iota$, $\mathfrak{C}_\iota \leq \mathfrak{C}_{\iota+1}$, so ist $\mathfrak{A}_\mu$ entweder gleich $\mathfrak{A} \circ \bigcup \mathfrak{C}_\iota$, $\iota < \mu$, order nach Satz 1 gleich $(\mathfrak{A} \circ \bigcup \mathfrak{C}_\iota) \circ \mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}_\mu$ mit $\mathfrak{C}_\mu \supseteq (\bigcup \mathfrak{C}_\iota) \circ \mathfrak{B}_\mu \supseteq \mathfrak{C}_\iota$, $\iota < \mu$.

Setzt man $\mathfrak{C} = \bigcup \mathfrak{C}_\mu$, so erhält man eine zerfallende Erweiterung $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$, wie man sich leicht überzeugt. Ganz analog wie oben kann man auch beweisen, daß $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}_\kappa$ ist. Ist nun α ein beliebiges Element aus Ω, so kann man annehmen, daß $\alpha = \alpha_\kappa$ algebraisch über $\mathfrak{A}_\kappa = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}_\kappa$ ist. Nach der Bedingung c) ist dann α algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$. Damit ist gezeigt, daß Ω algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ ist.

Zusammenfassend erhält man also

Satz 5. *Gelten die Bedingungen c), d), so ist eine Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ stets algebraisch über einer zerfallenden Erweiterung $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$, die sich als die Vereinigung einer wohlgeordneten Kette von nacheinander folgenden einfachen zerfallenden Erweiterungen darstellen lässt.*

§ 2. **Eindeutigkeit der zerfallenden Erweiterungen.** Es sei wieder Ω eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$, die algebraisch über $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ ist. Jetzt werden wir über die Eindeutigkeit von $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}$ studieren.

Satz 6. *Jedes Untersystem von Ω sei normal. Dann ist die in Satz 2 angegebene zerfallende Erweiterung $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ eindeutig bestimmt, folglich ist $\mathfrak{C}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{D} \subseteq \Omega$ eine beliebige zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Ist α ein Element aus $\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}$. $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{C})(\alpha)$ ist zu einem Untersystem von $\mathfrak{A}(\kappa) \times \mathfrak{C}(\lambda)$ isomorph, wo $\mathfrak{A}(\kappa)$ bzw. $\mathfrak{C}(\lambda)$ zu $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{C})(\alpha)/\mathfrak{C}$ bzw. $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{C})(\alpha)/\mathfrak{A}$ isomorph ist und κ bzw. λ das Bild von α ist. Dann ist $\mathfrak{A}(\kappa)$ zu $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{D}_1$ homomorph, also ist $\mathfrak{A}(\kappa) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{K}$ mit einem $\mathfrak{K}$. Daher ist $(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C})(\alpha)$ zu einem Untersystem von $\mathfrak{A} \times (\mathfrak{K} \times \mathfrak{C}(\lambda))$ isomorph. Da aber $\mathfrak{C}$ nach Satz 2 maximal angenommen ist, so ist $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{C})(\alpha) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$, woraus $\mathfrak{A} \times \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ folgt. Damit ist gezeigt, daß die in Satz angegebene zerfallende Erweiterung $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ eindeutig bestimmt ist. Das Untersystem $\mathfrak{C}$ ist zu $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C}/\mathfrak{A}$ isomorph, also ist es bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Zugleich bewiesen ist, daß $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ die maximale zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist.

Wir betrachten nun den Fall, wo jedes formal algebraische Element über einem $\mathfrak{A}$ enthaltenden Untersystems $\mathfrak{B}$ von Ω stets algebraisch über $\mathfrak{B}$ ist. Ein Element α aus Ω heisst algebraisch abhängig von einer Menge $\{\beta_i\}$ der Elemente uber $\mathfrak{A}$, wenn α algebraisch über $\mathfrak{A}(\{\beta_i\})$ ist. Dann ist α von einer endlichen Teilmenge von $\{\beta_i\}$ algebraisch abhängig, und es gelten die von van der Waerden deutlich angegebenen drei Grundsätze. Die Transitivität der algebraischen Abhängigkeit folgt in der Tat aus den Bedingungen a), b) A. E.[5] Daher kann man in unserem Fall die bekannten Sätze über die algebraische Abhängigkeit gebrauchen.

Auf der anderen Seite ist die in Satz 5 konstruierte zerfallende Erweiteruug $A \circ \mathfrak{C}$ nichts anderes als eine Erweiterung, die man durch Adjunktion algebraisch unabhängiger Elemente über $\mathfrak{A}$ erhält. Nach dem bekannten Satz ist die Anzahl (Mächtigkeit) dieser adjungierten Elemente eine Invariante für Ω. Damit erhält man

Satz 7. *Jedes formal algebraische Element sei algebraisch. Dann ist die in Satz 5 konstruierte zerfallende Erweiterung* $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{C}$ *bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt, folglich ist* $\mathfrak{C}$ *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Dabei setzen wir die Bedingungen a), b) voraus.*

5) Vgl. die Anmerkung 1).