13. Les Eléments Quasi-Clairsemés

(L'énumération transfinie. I)

Par Motokiti KONDÔ
L'Université Métropolitaine, Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1954)

Le but de notre recherche est de discuter la structure des ensembles ordonnés et dénombrables, et de résoudre quelques problèmes de M. A. Denjoy sur l'énumération transfinie.

1. Soit R l'ensemble de tous les nombres rationnels, ordonné par rapport à l'ordre naturel. Pour un sous-ensemble E de R, nous dirons qu'un point de E est *isolé* au sens de l'ordre, s'il est un élément isolé rapport à l'ordre naturel et nous désignons par $\iota(E)$ l'ensemble de tous les points isolés de E au sens de l'ordre. Encore, nous posons

$$\delta(E)=E-\iota(E),$$

et par l'induction transfinie, nous définissons $\delta^{(\alpha)}(E)(\alpha<\Omega)$ comme il suit,

$$\begin{aligned} &\delta^{(1)}(E)=\delta(E), && \\ &\delta^{(\alpha)}(E)=\delta(\delta^{(\alpha-1)}(E)), && \text{si } \alpha \text{ est isolé,} \\ &\qquad\quad =\prod_{\beta<\alpha}\delta^{(\beta)}(E), && \text{si } \alpha \text{ est limite.} \end{aligned}$$

2. Or, s'il existe un nombre ordinal η tel que $\delta^{(\eta)}(E)=0$, nous dirons que E est *quasi-clairsemé* et en particulier, si nous avons $\delta(E)=0$, nous dirons qu'il est *isolé* au sens de l'ordre.

Encore, quand tout sous-ensemble non vide de E contient au moins un point isolé au sens de l'ordre, nous dirons qu'il est *clairsemé* au sens de l'ordre.

Un sous-ensemble clairsemé de R au sens de l'ordre est quasi-clairsemé, et un sous-ensemble quasi-clairsemé de R est clairsemé, mais ces inverses ne sont pas nécessairement vraies. Or, nous avons la

Proposition 1. *Un sous-ensemble clairsemé de R, qui est fermé dans le ligne L des nombres réels, est aussi clairsemé au sens de l'ordre.*

3. Pour un sous-ensemble E de R, nous considérons l'intervalle fermé $[a,b]$[1] du ligne L qui remplit les conditions

(3.1) $[a,b]E$ est quasi-clairsemé,

1) Pour deux nombres réels a, b $(a\leqq b)$ finis ou bien infinis, $[a,b]$ (ou bien (a,b)) désigne l'ensemble des nombres x réels et finis tels que $a\leqq x\leqq b$ (ou bien $a<x<b$).

(3.2) quelque soit le point p de $(a, b)E$, il est isolé au sens de l'ordre dans $[-\infty, a]E+(p)$ et $[b, -\infty]E+(p)$,

(3.3) quelque soit le nombre positif ε, $[a-\varepsilon, b]E$ et $[a, b+\varepsilon]E$ ne sont pas quasi-clairsemé.

Si nous avons $[a, b]E=0$, nous pouvons distinguer les quatre cas suivants,

(3.4) si nous avons $a=-\infty$ et $b=+\infty$, nous avons $E=0$,

(3.5) si nous avons $a=-\infty$ et b est fini, b est la borné inférieure de E,

(3.6) si nous avons $b=-\infty$ et a est fini, a est la borné supérieure de E,

(3.7) si a et b sont finis en même temps, $\{[-\infty, a]E, [b, +\infty E]\}$ est une coupure.

Si $[a, b]E$ ne contient qu'un point c, nous pouvons distinguer les quatre cas suivants,

(3.8) si nous avons $a=-\infty$ et $b=+\infty$, nous avons $E=(c)$,

(3.9) si nous avons $a=-\infty$ et b est fini, nous avons $b=c$ et donc b est le point minimal de E,

(3.10) si nous avons $b=+\infty$ et a est fini, nous avons $a=c$ et donc a est le point maximal de E,

(3.11) si a et b sont finis en même temps, nous avons $a=c$ ou bien $b=c$, et donc, $\{[-\infty, a]E, [b, -\infty]E\}$ est la coupure de E définie par c.

Or, si $[a, b]E$ n'appartient à ni (3.7), ni (3.11), nous l'appelons un *élément quasi-clairsemé* de E, et nous le désignons par $\mathcal{E}^c_{a,b}(E)$.

4. Puis, pour l'intervalle fermé $[a, b]$ du ligne L qui remplit les conditions

(4.1) $(a, b)E$ est isomorphique à R,

(4.2) quelque soit le nombre positif ε, $(a-\varepsilon, b)E$ et $(a, b+\varepsilon)E$ ne sont pas isomorphiques à R,

(4.3) il n'existe aucun nombre positif δ tel que $(a, a+\delta)E=0$ ou bien $(b-\delta, b)\ E=0$,

nous appelons $[a, b]E$ un *élément epais* de E, et nous le désignons par $\mathcal{E}^c_{a,b}(E)$.

5. Maintenant, nous entendrons par les *éléments primaire* de E ceux quasi-clairsemés et ceux epais de E. Pour un élément primaire $\mathcal{E}_{a,b}(E)$ de E, il existe un intervalle fermé $[a, b]$ tel qu'on ait $\mathcal{E}_{a,b}(E)=[a, b]E$. Nous appelons a, b les *points extrêmes* de cet élément et par l'appartenance des points extrêmes, nous pouvons distinguer les cas suivants,

(5.1) $a \in \mathcal{E}_{a,b}(E)$, $\quad b \in \mathcal{E}_{a,b}(E)$,

(5.2) $a \in \mathcal{E}_{a,b}(E)$, $\quad b \overline{\in} \mathcal{E}_{a,b}(E)$,

(5.3) $a \overline{\in} \mathcal{E}_{a,b}(E)$, $\quad b \in \mathcal{E}_{a,b}(E)$, (5.4) $a \overline{\in} \mathcal{E}_{a,b}(E)$, $\qquad b \overline{\in} \mathcal{E}_{a,b}(E)$,

et nous dirons qu'il est du type $(+, +)$ ou bien du type $(+, -)$ ou bien du type $(-, +)$ ou bien du type $(-, -)$, suivant que'il appartient au cas (5.1) ou bien (5.2) ou bien (5.3) ou bien (5.4).

6. Or, d'après les définitions des éléments primaires, nous avons les

Proposition 2. *Il y a au plus dénombrable des éléments primaires de E et deux éléments primaires et distincts ont au plus un point extrême en commun. De plus dans ce cas, un de ceux est quasi-clairsemé et l'autre de ceux est epais.*

Proposition 3. *Si E ne contient qu'un nombre fini des éléments primaires, il existe les nombres réels $p_k(k=0, 1, 2, \dots, n)$ tels qu'on ait*

(6.1) $p_{k-1} < p_k (k=1, 2, \dots, n)$,

(6.2) $p_0 = -\infty$ *et* $p_n = +\infty$,

(6.3) $[p_{k-1}, p_k]E$ *est un élément primaire de* E.

7. S'il y a un nombre infini des éléments primaires de E, on peut ranger ces éléments en une suite infinie

$$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots, \tag{1}$$

où $C_n = \mathcal{E}_{a_n, b_n}(E)\ (n=1, 2, \dots)$. Or, nous entendrons par le *noyau* de E l'ensemble de tous les points de E qui n'appartiennent pas à ses éléments primaires et les points extrêmes de ceux-ci et nous le désignons par $\nu(E)$, c'est-à-dire,

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \{E - C_n + (a_n) + (b_n)\}.$$

Encore, nous entendrons par le *noyau epais* de E le noyau de $\nu(E)$, c'est-à-dire, $\nu(\nu(E))$.

Maintenant nous désignons par C^* l'ensemble de tous les nombres rationnels

$$c_{n_1 n_2 \dots n_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{3^{n_j}}\ (n_1 < n_2 < \cdots < n_k),$$

$$d_{n_1 n_2 \dots n_k} = c_{n_1 n_2 \dots n_k} - \frac{1}{3^{n_k}}.$$

Nous avons alors la

Proposition 4. *Si le noyau epais de E n'est pas vide, il existe un sous-ensemble D du discontinu C de Cantor tel que le noyau epais de E soit isomorphique à $C^* + D$.*

8. D'après la définition du noyau $\nu(E)$ d'un ensemble E, nous avons la

Proposition 5. *Pour un élément quasi-clairsemé $\mathcal{E}^c_{a,b}(\nu(E))$, $[a, b]C_n \neq 0$, où C_n est un élément primaire de E, entraine $C_n \subseteq [a, b]$ et il n'existe aucun élément epais de $\nu(E)$.*

Or, pour élément quasi-clairsemé $\mathcal{E}^c_{a,b}(\nu(E))$, nous appelons $[a, b]E$

un *élément composé* de E, et nous le désignons par $C_{a,b}(E)$. Alors, si $Cn_k(k=1,2,\ldots)$ de (1) sont contenus dans $[a,b]$, nous appelons chaque point de $C_{a,b}(E)$ qui n'appartient à aucun élément Cn_k $(k=1,2,\ldots)$ son *point singulier*. Encore, pour les points singuliers $d_k(k=1,2,\ldots)$ nous appelons $[d_k,d_k]E(k=1,2,\ldots)$ les *éléments singuliers* de E, et nous le désignons par $\mathcal{E}^s_{a,b}(E)$. Nous avons alors les

Théorème 1. *Chaque élément composé $C_{a,b}(E)$ de E est une somme de ceux primaires et ceux singuliers de E, et l'ensemble de tous les éléments primaires et ceux singuliers contenus dans $C_{a,b}(E)$ est clairsemé au sens de l'ordre, s'ils sont ordonnés suivant l'ordre naturels des points extrêmes de ces éléments.*

Théorème 2. *Si le noyau de E est non vide, l'ensemble de tous les éléments composés de E est isomorphique à un de*

$$(0,1)R,\quad (0,1)R+(0),\quad (0,1)R+(1),\quad (0,1)R+(0)+(1),$$

s'ils sont ordonnés suivant l'ordre naturels des points extrêmes de ces éléments.