71. *Les Eléments Primitifs*
(*L'énumération transfinie. II*)

Par Motokiti KONDÔ
Université Métropolitaine, Tokyo

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 13, 1954)

Cette note est une continuation d'une[1] de mes notes et son but est de considérer la structure des ensembles quasi-clairsemés.

1. Pour un ensemble E quasi-clairsemé dont les éléments sont les nombres rationnels, il existe un nombre ordinal ξ tel que $\delta^{(\xi)}(E)=0$. Nous appelons le nombre minimal parmi tels nombres l'*ordre* E et nous le désignons par $\mathrm{Ord}(E)$. Nous avons alors sans peine

(1.1) $\mathrm{Ord}((p)+E)\leqq \mathrm{Ord}(E)+1$ pour tout point p de L,

(1.2) $\mathrm{Ord}((p,q)E)\leqq \mathrm{Ord}(E)$ pour tout intervalle (p,q) ouvert de L.

Encore, nous posons pour un point p de L

$$\mathrm{Ord}(p,E)=\begin{cases}\underset{(q,r)}{\text{bor. inf.}}\ (\mathrm{Ord}((q,r)E+(p));\ q<p<r), & \text{si } p \text{ est fini},\\ \underset{r}{\text{bor. inf.}}\ (\mathrm{Ord}((r,+\infty)E), & \text{si } p=+\infty,\\ \underset{r}{\text{bor. inf.}}\ (\mathrm{Ord}((-\infty,r)E), & \text{si } p=-\infty,\end{cases}$$

et nous l'appelons l'*ordre* de E en p. Nous avons alors sans peine

(1.3) $\mathrm{Ord}(E)=\underset{p}{\text{bor. sup.}}\ (\mathrm{Ord}(p,E);\ p\in E)$,

(1.4) $\mathrm{Ord}(p,E)\leqq \mathrm{Ord}(E)+1$,

(1.5) si p est fini, $\mathrm{Ord}(p,E)$ est isolé.

2. Etant donnés un ensemble E quasi-clairsemé et un nombre α ordinal, nous posons

$$F_\alpha=\mathrm{Ens}(p;\ \mathrm{Ord}(p,E)\geqq\alpha)$$

et nous l'appelons la frontière de l'ordre α de E. D'après la définition, nous avons

(2.1) F_α sont fermés dans L,

(2.2) $F_0=F_1=L$, et $F_\alpha(\alpha\geqq 2)$ sont non-denses,

(2.3) $\alpha<\beta$ implique $F_\alpha\supseteqq F_\beta$,

(2.4) $\alpha>\mathrm{Ord}(E)+1$ implique $F_\alpha=0$,

(2.5) $\delta^{(\alpha)}(E)\subseteqq F_\alpha$,

(2.6) si α est limité, nous avons $F_\alpha=F_{\alpha+1}$.

3. Nous appelons $F=F_{\eta+1}$, où $\eta=\mathrm{Ord}(E)$, la *frontière complète*

---

1) M. Kondô: Les éléments quasi-clairsemés (L'énumération transfinie. I). Proc. Japan Acad., **30**, 66 (1954).

de E. Il est fermé et non-dense dans L, si E est non-vide. Or, nous avons la

Proposition 1. *Si nous avons $F=0$, nous avons*

(3.1) $(p,q)\delta^{(\eta_0)}(E)$ *est fini pour tout intervalle* (p,q) *ouvert et fini, ou bien*

(3.2) $\delta^{(\eta)}((p,q)E)=0$ *pour tout intervalle* (p,q) *ouvert et fini, suivant que* $\eta=Ord(E)$ *est isolé et* $\eta=\eta_0+1$ *ou bien* η *est limité,*

et donc, la

Proposition 2. *Si nous avons $F=0$ et E est borné, η est isolé et $\delta^{(\eta_0)}(E)$ est fini.*

Or, dans ce cas, nous pouvons distinguer les cas suivants,

(3.3) $\mathrm{Ord}(-\infty,E)=\eta,\qquad \mathrm{Ord}(+\infty,E)=\eta,$

(3.4) $\mathrm{Ord}(-\infty,E)=\eta,\qquad \mathrm{Ord}(+\infty,E)<\eta,$

(3.5) $\mathrm{Ord}(-\infty,E)<\eta,\qquad \mathrm{Ord}(+\infty,E)=\eta,$

(3.6) $\mathrm{Ord}(-\infty,E)<\eta,\qquad \mathrm{Ord}(+\infty,E)<\eta,$

et si E est non-vide, nous appelons E son *élément primitif* ou bien *quasi-primitif* d'ordre η, suivant qu'il appartient au cas (3.3)–(3.5) ou bien (3.6).

4. Puis, nous considérons le cas où F est non-vide et non-dense dans L. Soit $[a,b]$ un intervalle contigu à F tel que $(a,b)E\neq 0$. Nous avons alors la

Proposition 3. *Si $(a,b)E$ contient le point minimal, nous avons $a=-\infty$, et s'il contient le point maximal, nous avons $b=+\infty$. Donc, si a et b sont finis en même temps, il ni contient le point minimal ni celui maximal.*

5. Or, nous supposons d'abord que η soit isolé. Si a et b sont finis en même temps, nous posons

$$\alpha=\mathrm{Ord}(a,(a,b)E),\quad \text{et}\quad \beta=\mathrm{Ord}(b,(a,b)E) \tag{1}$$

et nous dirons que $(a,b)E$ est du *genre* (α,β). Or, nous pouvons distinguer les cas suivants,

(5.1) $\alpha=\eta+1,\qquad \beta=\eta+1,$

(5.2) $\alpha=\eta+1,\qquad \beta\leqq\eta,$

(5.3) $\alpha\leqq\eta,\qquad \beta=\eta+1,$

(5.4) $\alpha\leqq\eta,\qquad \beta\leqq\eta.$

De même, pour le cas où $a=-\infty$ et b est fini (ou bien a est fini et $b=+\infty$), nous définissons α et β par (1). Alors, (α,β) est le *genre* de $(a,b)E$ et nous pouvons distinguer les cas suivants,

(5.5) $\alpha=\eta,\qquad \beta=\eta+1\qquad$ (ou bien $\alpha=\eta+1,\quad \beta=\eta$),

(5.6) $\alpha=\eta,\qquad \beta\leqq\eta\qquad$ (ou bien $\alpha=\eta+1,\quad \beta<\eta$),

(5.7) $\alpha<\eta,\qquad \beta=\eta+1\qquad$ (ou bien $\alpha\leqq\eta,\quad \beta=\eta$),

(5.8) $\alpha<\eta,\qquad \beta\leqq\eta\qquad$ (ou bien $\alpha\leqq\eta,\quad \beta<\eta$).

Nous avons alors les

Proposition 4. *Pour que $(a, b)E$ appartient au cas (5.1) (ou bien (5.5)) ou (5.2) (ou bien (5.6)) ou (5.3) (ou bien (5.7)) ou (5.4) (ou bien (5.8)), il faut et il suffit que $\delta^{(\eta_0)}((a, b)E)$, où $\eta=\eta_0+1$, soit du type $\omega^*+\omega$ ou ω^* ou ω ou bien il est fini.*

Proposition 5. *Si $(a, b)E$ appartient au cas (5.4) (ou bien (5.8)), nous avons*

$$\delta^{(\eta+1)}((a, b)E)=0.$$

Maintenant, nous appelons $(a, b)E$ qui appartient au cas (5.1) ou (5.2) ou (5.3) ou (5.5) ou (5.6) ou (5.7) un *élément primitif d'ordre* η de E.

6. Puis, nous supposons que η soit limité. Si a et b sont finis en même temps, nous définissons α et β par (1). Alors, (α, β) est le *genre* de $(a, b)E$ et nous pouvons distinguer les cas suivants,

(6.1) $\alpha=\eta+1, \quad \beta=\eta+1,$

(6.2) $\alpha=\eta+1, \quad \beta<\eta,$

(6.3) $\alpha<\eta, \quad \beta=\eta+1,$

(6.4) $\alpha<\eta, \quad \beta<\eta.$

De même, pour le cas où $a=-\infty$ et b est fini (ou bien a est fini et $b=+\infty$), nous définissons α et β par (1). Alors, (α, β) est le *genre* de $(a, b)E$ et nous pouvons distinguer les cas suivants,

(6.5) $\alpha=\eta, \quad \beta=\eta+1$ (ou bien $\alpha=\eta+1, \quad \beta=\eta$),

(6.6) $\alpha=\eta, \quad \beta<\eta$ (ou bien $\alpha=\eta+1, \quad \beta<\eta$),

(6.7) $\alpha<\eta, \quad \beta=\eta+1$ (ou bien $\alpha<\eta, \quad \beta=\eta$),

(6.8) $\alpha<\eta, \quad \beta<\eta$ (ou bien $\alpha<\eta, \quad \beta<\eta$).

Enfin, nous appelons $(a, b)E$ qui appartient au cas (6.1) ou (6.2) ou (6.3) ou (6.5) ou (6.6) ou (6.7) un *élément primitif d'ordre* η de E.

7. Puis, nous considérons le cas où $(a, b)E$ appartient au cas (5.4) ou (5.8) ou (6.4) ou (6.8). Si η est isolé, $(a, b)E$ appartient au cas (5.4) ou bien (5.8), et nous pouvons distinguer les cas,

(7.1) $\operatorname{Ord}((a, b)E)=\eta,$

(7.2) $\operatorname{Ord}((a, b)E)<\eta.$

Puis, si η est limité, $(a, b)E$ appartient au cas (6.4) ou (6.8), et nous avons (7.2).

Ici, nous appelons $(a, b)E$ qui appartient au cas (7.1) un *élément quasi-primitif d'ordre* η de E et $(a, b)E$ qui appartient au cas (7.2) un *élément imprimitif d'ordre* η de E.

8. Or, pour chaque point p d'un élément $(a_0, b_0)E$ imprimitif d'ordre η_0 de E, il existe les intervalles $[a_k, b_k]$ $(k=0, 1, 2, \ldots, N)$ et les nombres ordinaux η_k $(k=0, 1, 2, \ldots, N)$ tels qu'on ait

(8.1) $[a_k, b_k] \subseteq [a_{k-1}, b_{k-1}] \quad (k=1, 2, \ldots N),$

(8.2) $p \in [a_N, b_N],$

(8.3) $\mathrm{Ord}((a_{k-1}, b_{k-1})E) = \eta_k \qquad (k=1, 2, \ldots N-1)$,

(8.4) $\mathrm{Ord}(E) = \eta_0$,

(8.5) $(a_k, b_k)E$ est un élément imprimitif d'ordre η_k de $(a_{k-1}, b_{k-1})E$,

(8.6) $(a_N, b_N)E$ est un élément primitif ou bien celui quasi-primitif d'ordre η_N de $(a_{N-1}, b_{N-1})E$.

Ici, nous appelons $(a_N, b_N)E$ un *élément primitif* ou bien *quasi-primitif* d'ordre η_N de E.

Alors, d'après les définitions, nous avons le

Théorème. *Tout ensemble E quasi-clairsemé et non-vide est une somme d'un nombre fini ou bien dénombrable des éléments $E_n(n=1, 2, \ldots)$ primitifs ou bien quasi-primitifs de quelques ordres de E tels qu'on ait $E_iE_j=0$ $(i \neq j)$, et l'ensemble de ces éléments est ordonné suivant l'ordre naturel des points extrêmes de ceux-ci.*

9. L'ensemble ordonné, donné dans le théorème précédent et dont les éléments sont $E_n(n=1, 2, \ldots)$, jouit du rôle important dans notre considération et nous le désignons par $\pi(E)$ ou bien $\pi^{(1)}(E)$.

Or, nous pouvons définir les ensembles ordonnés $\pi^{(\alpha)}(E)$ pour les nombres ordinaux α par l'induction transfinie comme il suit,

(9.1) les éléments $E_n^{(\alpha)}(n=1, 2, \ldots)$ de $\pi^{(\alpha)}(E)$ sont les sous-ensembles de E, où nous posons $E_n^{(1)} = E_n(n=1, 2, \ldots)$,

(9.2) $E_n^{(\alpha)} E_m^{(\alpha)} = 0 \ (n \neq m)$,

(9.3) si nous avons $\beta < \alpha$, chaque $E_m^{(\beta)}$ est contenu dans un de $E_n^{(\alpha)}(n=1, 2, \ldots)$,

(9.4) $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(\alpha)}$,

(9.5) $\pi^{(\alpha)}(E)$ est ordonné suivant l'ordre naturel des points extrêmes de ceux-ci,

(9.6) quand $\pi^{(\xi)}(E)(\xi < \alpha)$ sont quasi-clairsemés, il existe $\pi^{(\alpha)}(E)$,

(9.7) $\pi^{(\alpha+1)}(E)$ est isomorphique à $\pi(\pi^{(\alpha)}(E))$.

Alors, nous pouvons distinguer les cas suivants,

(9.8) $\pi^{(\alpha)}(E)(\alpha < \Omega)$ sont tous quasi-clairsemés,

(9.9) il existe un nombre ordinal η tel que $\pi^{(\eta)}(E)$ ne soit pas quasi-clairsemé,

et pour le cas (9.8), il existe un nombre ordinal η tel que $\pi^{(\eta)}(E)$ ne consiste que E. Ici, nous dirons que E est *biclairsemé*, quand il appartient au cas (9.8). Tout ensemble clairsemé au sens de l'ordre est biclairsemé, mais il existe un ensemble quasi-clairsemé qui n'est pas biclairsemé.