153. *Dérivation par Rapport à un Système de Voisinages dans l'Espace de Tore*

Par Shizu ENOMOTO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1954)

1. Soient I l'ensemble des nombres réels modulo 1 et J l'ensemble des nombres naturels 1, 2, ..., j. Désignons par $\mathrm{I}^{\mathrm{J}} = \underset{i \in \mathrm{J}}{\mathrm{P}} (\mathrm{I}_i = \mathrm{I})$ l'espace de tore à un nombre fini j de dimensions, c.-à-d. le produit cartésien d'espaces I_i ($i = 1, 2, \ldots, j$) identiques à I. On sait que, n désignant un entier naturel, les cubes $\mathrm{V}_n(x)$ de centre $x \in \mathrm{I}^{\mathrm{J}}$ et de côté $1/n$ forment un système dérivant pour les fonctions d'ensemble absolument continues: Soit $\Phi_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ une fonction d'ensemble, à valeurs numériques, définie sur la famille $(\mathfrak{M}_{\mathrm{J}})$ des ensembles mesurables au sens de Lebesque dont la mesure sera désignée par μ_{J}. Si la fonction d'ensemble $\Phi_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ est complètement additive et absolument continue — par conséquent, s'il y a une fonction $f(x)$ telle que $\Phi_{\mathrm{J}}(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(x) d\mu_{\mathrm{J}}(x)$ pour tout $\mathrm{A} \in (\mathfrak{M}_{\mathrm{J}})$, alors la fonction

$$g_n(x) = \Phi_{\mathrm{J}}(\mathrm{V}_n(x)) / \mu_{\mathrm{J}}(\mathrm{V}_n(x))$$

tend presque partout vers $f(x)$ dans I^{J}.[1]

Mais, M. J. Dieudonné a montré, dans son travail "Sur un théorème de Jessen, Fund. Math., **37** (1950)", que le résultat analogue ne reste pas valable pour l'espace du tore $\mathrm{I}^{\mathrm{N}} = \underset{i \in \mathrm{N}}{\mathrm{P}} (\mathrm{I}_i = \mathrm{I})$, $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots\}$, à un nombre dénombrablement infini de dimensions. Pour montrer le résultat plus précis, introduisons d'abord les notations suivantes.

Pour chaque partition de N en deux parties complémentaires J, J'. On peut identifier I^{N} au produit cartésien $\mathrm{I}^{\mathrm{J}} \times \mathrm{I}^{\mathrm{J}'}$. Pour tout $x = (x_i) \in \mathrm{I}^{\mathrm{N}}$, nous désignerons par x_{J} et $x_{\mathrm{J}'}$, les projéctions de x sur I^{J} et $\mathrm{I}^{\mathrm{J}'}$, de sorte que $x = (x_{\mathrm{J}}, x_{\mathrm{J}'})$. Considérons sur chaque $\mathrm{I}_i = \mathrm{I}$ la mesure de Lebesgue, et désignerons par μ la mesure produite de ces mesures sur l'espace I^{N}, nous désignerons de même par μ_{J} la mesure produite sur l'espace I^{J}. Désignerons par $(\mathfrak{M})$ la famille d'ensembles mesurables au sens de Carathéodory par la mesure μ sur I^{N}. Désormais, nous supposons que J désigne une partie finie de N et J' désigne le complémentaire de J. Par $\mathfrak{N}$ nous désignons l'ensemble de parties finies J de N. Pour toute partie finie J de N et tout entier naturel n, désignons par $\mathrm{V}_{n,\mathrm{J}}(x)$ le produit cartésien du cube de centre x_{J} et de côté $1/n$ dans I^{J}, et de $\mathrm{I}^{\mathrm{J}'}$.

1) S. Saks: Theory of the Integral (1937).

M. J. Dieudonné a prouvé que, en construisant un exemple, il est inexacte que pour toute fonction $f(x)$ mesurable et bornée dans I^{N}, la fonction

$$g_{n,\mathrm{J}}(x)=\frac{1}{\mu(\mathrm{V}_{n,\mathrm{J}}(x))}\int_{\mathrm{V}_{n,\mathrm{J}}(x)} f(x)\,d\mu(x)$$

tend presque partout vers $f(x)$ suivant l'ensemble ordonné filtrant produit $\mathrm{N}\times\mathfrak{N}$[2] (la relation d'ordre $(n_1, \mathrm{J}_1)\leq(n_2, \mathrm{J}_2)$ signifiant "$n_1\leq n_2$ et $\mathrm{J}_1\subseteq\mathrm{J}_2$").

Le caractère commun des dérivations dans deux cas plus haut, est que le procédé de la limite usagée dans chaque dérivation a été déterminé suivant la topologie dans l'espace considéré. Le but de cette Note est de donner, pour l'espace I^{N}, un procédé de dérivation, indépendant la topologie d'espace I^{N} et tel que pour une fonction d'ensemble $\Phi(\mathrm{A})$, à valeurs numériques, définie sur la famille $(\mathfrak{M})$, complèment additive et absolument continue, le résultat analogue au cas des dimensions finis y reste valable. De plus, pour l'espace I^{N}, prouvons un théorème correspondant à celui de Vitali du cas des dimensions finis.

2. Définitions.[3] Soit $\lambda=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots)$ une suite des nombres réels telle qu'il existe un suffixe $i(\lambda)$ tel que $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_{i(\lambda)}=0$ et $\varepsilon_{i(\lambda)+1}, \varepsilon_{i(\lambda)+2}, \dots$ est la suite monotone décroissante tendant vers zéro. Soit Λ la famille de toutes les suites λ. Alors Λ est ordonné par la relation $\lambda\geq\lambda'$ signifiant $\varepsilon_i\geq\varepsilon'_i$ (pour tout i), où $\lambda=(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\dots)$ et $\lambda'=(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots)$. Entendons par $(\mathfrak{V})_x$ le système tel que $\mathfrak{V}_x=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{V}_\lambda(x)$, $\lambda=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, $\mathfrak{V}_\lambda(x)$ désignant la famille des $\mathrm{V}_{n,\mathrm{J}_i}(x)$ tels que $1/n\leq\varepsilon_i$ pour tout entier naturel n et tout $i=i(\lambda)+1, i(\lambda)+2, \dots$. On sait par là que, en sachant le système $(\mathfrak{V})_0$ de l'unité, tous les voisinages $(\mathfrak{V})_x$ d'autres points x de I^{N} sont donnés par la transformation de $(\mathfrak{V})_0$. Disons qu'une sous-famille $\mathfrak{V}$ de $(\mathfrak{V})_x$ a la propriété (L) par rapport à $(\mathfrak{V})_x$, lorsque $\mathfrak{V}_\lambda(x)\cap\mathfrak{V}\neq 0$ pour tout $\lambda\in\Lambda$. Pour une fonction d'ensemble $\Psi(\mathrm{V}(x))$ définie sur $(\mathfrak{V})_x$, nous entendons par

$$\overline{\mathrm{D}}\Psi(x)=\mathit{lim\ sup}\left(\frac{\Psi(\mathrm{V}(x))}{\mu(\mathrm{V}(x))}\right)$$

la borne supérieure de tous les nombres réels ν pour lesquels la sous-famille $\mathrm{E}\left\{\mathrm{V}(x);\ \mathrm{V}(x)\in(\mathfrak{V})_x, \frac{\Psi(\mathrm{V}(x))}{\mu(\mathrm{V}(x))}>\nu\right\}$ de $(\mathfrak{V})_x$ a la propriété

2) Nons disons $g_{n,\mathrm{J}}(x)$ tend vers $f(x)$ suivant l'ensemble ordonné filtrant produit $\mathrm{N}\times\mathfrak{N}$, lorsqu'à chaque $\varepsilon>0$ correspond un (n_0, J_0), dépendant de ε, tel que $|g_{n,\mathrm{J}}(x)-f(x)|<\varepsilon$ pour tout $(n, \mathrm{J})\geq(n_0, \mathrm{J}_0)$.

3) S. Kametani and S. Enomoto: On differentiation of set-function with some of its applications, Osaka Math. J., **3** (1951).

(L) par rapport à $(\mathfrak{V})_x$. Symétriquement nous entendons

$$\underline{D}\Psi(x)=\lim\inf\left(\frac{\Psi(V(x))}{\mu(V(x))}\right).$$

Si $D\Psi(x)=\bar{D}\Psi(x)$, la valeur commune, représantée par $D\Psi(x)$, est appelée la dérivée de la fonction Ψ au point x, par rapport à $(\mathfrak{V})_x$ et μ.

D'abord rappelons le théorème de Jessen qui s'énonce comme il suit:

Théorème de Jessen.[4] Soit $\Phi(A)$ une fonction d'ensemble, à valeurs numériques, pour laquelle il y a une fonction $f(x)$ telle que $\Phi(A)=\int_A f(x)\,d\mu(x)$ pour tout $A\in(\mathfrak{M})$. Soit $\Phi_J(A)$ la fonction d'ensemble définie sur I^J obtenu en posant $\Phi_J(A)=\Phi(A\times I^{J'})$ pour tout $A\in(\mathfrak{M}_J)$—par conséquent il y a une fonction $f_J(x)$ définie sur I^J telle que $\Phi_J(A)=\int_A f_J(x)\,d\mu_J(x)$ pour tout $A\in(\mathfrak{M}_J)$. Soit $f_J(x)$ la fonction définie sur I^J obtenu en posant $f_J(x)=f_J(x_J)$ pour tout $x\in I^N$. Alors pour toute suite $\{J_m\}$ croissante de parties finies de N dont la réunion est N, les fonctions $f_{J_m}(x)$ convergent presque partout vers $f(x)$ dans I^N lorsque m croît indéfiniment.

Théorème 1. Soit $\Phi(A)$ une fonction d'ensemble, à valeurs numériques, pour laquelle il y a une fonction telle que $\Phi(A)=\int_A f(x)\,d\mu(x)$ pour tout $A\in(\mathfrak{M})$. On a alors $D\Phi(x)=f(x)$ pour presque tout $x\in I^N$, $D\Phi(x)$ désignant la dérivée de la fonction d'ensemble $\Phi(A)$ au point x, par rapport à $(\mathfrak{V})_x$ et μ.

Démonstration. 1°) D'abord, prouvons qu'il existe un ensemble M de mesure zéro ayant la propriété suivante: si $x\bar{\in}M$, il y a, pour toute sous-famille $\mathfrak{V}$ de $(\mathfrak{V})_x$ possédant la propriété (L) par rapport à $(\mathfrak{V})_x$ et à tout $\varepsilon_0>0$, un voisinage $V_{n_0,J_{i_0}}(x)\in\mathfrak{V}$ tel que

$$\left|\ f(x)-\frac{\Phi(V_{n_0,J_{i_0}}(x))}{\mu(V_{n_0,J_{i_0}}(x))}\ \right|<\varepsilon.$$

Dans cette démonstration, par J_i nous entendons toujours la sous-famille $\{1,2,\dots,i\}$ de N. D'après le théorème de Jessen, pour tout point x de I^N n'appartenant pas à un ensemble M_0 à mesure zéro, à tout $\varepsilon>0$, il y a $i(x,\varepsilon)$ tel que

$$|f_{J_i}(x)-f(x)|<\varepsilon/2 \text{ pour tout } i>i(x,\varepsilon). \tag{1}$$

D'après la propriété de la fonction d'ensemble $\Phi_{J_i}(A)$, il existe un ensemble M_i à mesure zéro, contenu dans I^N, et pour tout $x\bar{\in}M_i$ et à tout $\varepsilon>0$ il existe un nombre $\delta(x,i,\varepsilon)$ tel que $0<\delta(x,i,\varepsilon)<1$ et que

4) B. Jessen: The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, Acta Math., **63** (1934).

$$\left| f_{J_i}(x) - \frac{\Phi(V_{n,J_i}(x))}{\mu(V_{n,J_i}(x))} \right| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

pour tout entier naturel n satisfaisant à $1/n \leq \delta(x, i, \varepsilon)$. Posons $M = \bigcup_{m=0}^{\infty} M_m$. Evidemment la mesure de M est égale à zéro. Soient x un point n'appartenant pas à M, $\mathfrak{V}$ une sous-famille de $(\mathfrak{V})_x$ possédant la propriété (L) par rapport à $(\mathfrak{V})_x$ et ε_0 un nombre positif quelconque. Posons $\lambda(x, \varepsilon_0) = (0, 0, \dots, 0, \delta'_{i(x,\varepsilon_0)+1}, \delta'_{i(x,\varepsilon_0)+2}, \dots)$, où $\delta'_{i(x,\varepsilon_0)+l} = \inf_{1 \leq l' \leq l} \delta(x, i(x, \varepsilon_0) + l', \varepsilon_0)$ pour tout $l = 1, 2, \dots$. Puisqu'alors $\lambda(x, \varepsilon_0) \in \Lambda$ et que $\mathfrak{V}$ a la propriété (L), on a $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}_{\lambda(x,\varepsilon_0)}(x) \neq 0$. Par conséquent, il y a un voisinage $V_{n_0,J_{i_0}}(x)$ appartenant à $\mathfrak{V}$ et tel que $i_0 > i(x, \varepsilon_0)$ et $1/n_0 \leq \delta(x, i_0, \varepsilon_0)$. Donc, on a par (2)

$$\left| f_{J_{i_0}}(x) - \frac{\Phi(V_{n_0,J_{i_0}}(x))}{\mu(V_{n_0,J_{i_0}}(x))} \right| < \varepsilon_0/2.$$

En vertu de (1), on a, puisque $i_0 > i(x, \varepsilon_0)$,

$$| f(x) - f_{J_{i_0}}(x) | < \varepsilon_0/2.$$

Donc, il en resule qu'il existe un voisinage $V_{n_0,J_{i_0}}(x) \in \mathfrak{V}$ tel que

$$\left| f(x) - \frac{\Phi(V_{n_0,J_{i_0}}(x))}{\mu(V_{n_0,J_{i_0}}(x))} \right| < \varepsilon_0.$$

2°) Montrons que la dérivée de $\Phi(A)$, par rapport à $(\mathfrak{V})_x$ et μ, est égale à $f(x)$ pour tout point x de $I^N - M$. En effet, en vertu de 1°), pour un point x n'appartenant pas à M, à tout $\varepsilon > 0$, la sous-famille des $V_{n,J_i}(x)$, appartenant à $(\mathfrak{V})_x$ et tels que $f(x) + \varepsilon < \frac{\Phi(V_{n,J_i}(x))}{\mu(V_{n,J_i}(x))}$, ne posséde pas la propriété (L) par rapport à $(\mathfrak{V})_x$. Par conséquent, d'après la définition de $\overline{D}(x)$, il en résulte que $\overline{D}(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I^N - M$. De même, on voit que $\underline{D}(x) \geq f(x)$ pour tout point $x \in I^N - M$. Donc, on a $D(x) = f(x)$ pour présque tout point x de I^N.

Comme le cas particulier de Théorème 1, nous pouvons montrer le théorème correspondant à cului de densité.

Soit A un ensemble contenu dans I^N et mesurable par rapport à μ: $A \in (\mathfrak{M})$. Nous entendons par densités supérieure et inférieure d'ensemble A au point x de I^N, les nombres $\limsup \left(\frac{\mu(A \cap V(x))}{\mu(V(x))} \right)$ et $\liminf \left(\frac{\mu(A \cap V(x))}{\mu(V(x))} \right)$ respectivement. Lorsque les densités supérieure et inférieure d'ensemble A au point x sont égales, la valeur commune s'appelle densité d'ensemble A au point x.

Théorème de densité. Soit A un ensemble contenu dans l'espace

I^N et mesurable par rapport à μ. Alors, pour presque tout point x de I^N, la densité de l'ensemble A est égale au nombre constant 1.

En vertu de Théorème 1 et du résultat qui a été déjà montré,[5] on a le

Théorème de Vitali. Soit $\mathfrak{V}$ une sous-famille de $\bigcup_{x \in I^N} (\mathfrak{V})_x$ possédant la propriété (L) par rapport à $(\mathfrak{V})_x$ pour tout $x \in I^N$, c'est-à-dire $\mathfrak{V}_\lambda(x) \cap \mathfrak{V} \neq 0$ pour tout $x \in I^N$ et tout $\lambda \in \Lambda$. Alors, pour tout ensemble A de la mesure positive et à tout $\varepsilon > 0$, il existe $V_{n(m), J(m)}(x_m) \in \mathfrak{V}$ $(m=1, 2, \dots)$ satisfaisant aux propriétés telle que $x_m \in A$, $\mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{n(m), J(m)}(x_m))$ et $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(V_{n(m), J(m)}(x_m)) < \mu(A) + \varepsilon$.

5) Voir 3).