144. *Sur la Fonction Convexe*

Par Masuo HUKUHARA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Oct. 12, 1954)

Une fonction $f(x)$ sera appelée convexe dans un intervalle ouvert $\langle\alpha, \beta\rangle$ si elle satisfait à l'inégalité

$$\text{(I)} \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour $x, y \in \langle\alpha, \beta\rangle$. A. Ostrowski a démontré[1] qu'une fonction convexe est continue si elle est bornée supérieurement sur un ensemble de mesure positive. Evidemment, une fonction convexe peut-être bornée inférieurement sans être continue.

En effet, soit $g(x)$ une fonction discontinue satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\text{(II)} \qquad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans $\langle-\infty, \infty\rangle$, la fonction

$$f(x)=\varphi(g(x))$$

est convexe. Si l'on prend, par exemple, $\varphi(x)=e^x$, $f(x)$ est discontinue et bornée inférieurement.

D'autre part, A. Ostrowski a démontré, concernant l'équation fonctionnelle

$$\text{(III)} \qquad g(x)+g(y)=g(x+y),$$

le théorème suivant:

Une fonction $g(x)$ satisfaisant à cette équation est nécessairement continue, si elle ne prend, sur un ensemble de mesure positive, aucune valeur entre deux nombres.

On peut démontrer de la même manière[2] que cette conclusion subsiste encore pour la solution de (II).

Si l'on a (III) quand x, y et $x+y$ appartiennent en même temps à l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$, nous dirons qu'une fonction $g(x)$ satisfait à (III) dans $\langle\alpha, \beta\rangle$. On peut alors énoncer le théorème suivant:

Supposons que $g(x)$ satisfasse à (III) *dans $\langle\alpha, \beta\rangle$ et ne prenne, sur un ensemble E de mesure positive, aucune valeur entre deux nombres. Si l'on a $3\alpha<\beta$, $0<\beta$, $g(x)$ est continue dans $\langle\alpha, \beta\rangle$* (par suite elle est égale à Ax). *Si l'on a $2\alpha<\beta\leqq 3\alpha$, et si E est contenu*

1) J. D. M. V., **38**, 56–62 (1929).
2) Funk. Ekv., **7**, 175–190 (1954).

dans l'un des intervalles $\langle \alpha, \beta-\alpha\rangle$, $\langle 2\alpha, \beta\rangle$, *on a* $g(x)=Ax+B$ *dans* $\langle \alpha, \beta-\alpha\rangle$ *et* $g(x)=Ax+2B$ *dans* $\langle 2\alpha, \beta\rangle$. *Les valeurs que prend* $g(x)$ *dans* $[\beta-\alpha, 2\alpha]$ *sont tout à fait arbitraires.*

Revenons à la fonction convexe. Quoiqu'une fonction convexe discontinue puisse être bornée inférieurement, on peut se proposer la question suivante:

Si une fonction convexe dans $\langle \alpha, \beta\rangle$ est bornée inférieurement sur un ensemble de mesure positive, est-elle bornée inférieurement dans $\langle \alpha, \beta\rangle$?

La réponse est affirmative, c'est ce que nous allons montrer.

Soient α' et β' des valeurs quelconques dans $\langle \alpha, \beta\rangle$. Désignons par E_n l'ensemble des valeurs

$$2^{-n}\cdot m\alpha' + (1-2^{-n}\cdot m)\beta',$$

m désignant un entier quelconque entre 0 et 2^n. On voit, par l'induction par rapport à n, que l'on a

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

quand x, y et $\lambda x+(1-\lambda)y (0\leqq\lambda\leqq 1)$ appartiennent toutes à E_n. Donc la conclusion reste vraie quand x, y et $\lambda x+(1-\lambda)y$ appartiennent toutes à $E_\infty=\bigcup E_n$. Cette inégalité entraîne immédiatement l'existence d'une fonction $\psi(x)$ continue et convexe dans $[\alpha', \beta']$ et coïncidant avec $f(x)$ sur E_∞.

Cela posé, supposons que l'on a

$$\varliminf_{h\to 0} f(x+h)=-\infty \tag{1}$$

pour $x=\gamma\in[\alpha, \beta\rangle$. Quelque grand que soit M, on peut trouver, dans un voisinage arbitrairement petit de γ, une valeur α' telle que $f(\alpha')\leqq -M$. Soit β' une valeur quelconque dans $\langle \alpha' \beta\rangle$. Considérons la fonction $\psi(x)$ définie tout à l'heure. Si $[\alpha'', \beta'']$ est contenu dans $\langle \alpha', \beta'\rangle$, on a $\alpha'<\alpha''<\beta''<\beta'$. $\psi(x)$ étant convexe dans $[\alpha'', \beta'']$, on a uniformément $\psi(x)\to-\infty$ dans $[\alpha'', \beta'']$ quand $M\to\infty$, $\alpha'\to\gamma$. $f(x)$ coïncidant avec $\psi(x)$ sur un ensemble dense dans $[\alpha'', \beta'']$, on a (1) pour $x\in\langle \alpha'',\beta''\rangle$. $[\alpha'', \beta'']$ étant un intervalle quelconque contenu dans $\langle \gamma, \beta\rangle$, on a (1) pour $x\in\langle\gamma, \beta\rangle$. Si $\gamma\in\langle \alpha, \beta]$, on a de même (1) pour $x\in\langle \alpha, \gamma\rangle$. Par suite, si l'on a (1) pour une valeur dans $[\alpha, \beta]$, on a (1) dans $\langle \alpha, \beta\rangle$.

Dans le cas contraire, la fonction définie par

$$f(x)=\varliminf_{h\to 0} f(x+h)$$

est continue et convexe dans $\langle \alpha, \beta\rangle$. Si l'on a (1), nous posons $f(x)=-\infty$. On a alors le

Théorème. *Soit* $g(x)$ *une fonction continue dans* $\langle \alpha, \beta\rangle$ *et telle que* $g(x)>f(x)$. *Il est impossible que l'on a* $f(x)\geqq g(x)$ *sur un ensemble de mesure positive contenu dans* $\langle \alpha, \beta\rangle$.

Supposons que l'on avait $f(x)\geqq g(x)$ sur un ensemble E de mesure positive. Soit γ une valeur où la densité de E est égale à 1. On peut supposer que l'on a

$$E\subset\langle\gamma-\delta,\ \gamma+\delta\rangle,\quad \langle\gamma-3\delta,\ \gamma+3\delta\rangle\subset\langle\alpha,\ \beta\rangle,$$

et

$$|f(x)-f(\gamma)|<\varepsilon,\quad g(x)>\underline{f}(\gamma)+\varepsilon'$$

dans $[\gamma-\delta, \gamma+\delta]$, ε, $\varepsilon'(>\varepsilon)$ et δ étant des nombres positifs. Posons

$$c=f(\gamma),\quad C=\{\xi\in\langle\gamma-\delta,\ \gamma+\delta\rangle;\ f(\xi)<c+\varepsilon\}.$$

L'ensemble C est dense dans $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$. Si $x\in E$, on a, pour $x'=2x-\xi$,

$$f(x')\geqq 2f(x)-f(\xi)>c+2\varepsilon'-\varepsilon.$$

D'après le lemme démontré par A. Ostrowski, l'ensemble

$$\Gamma=\bigcup_{\xi\in C}2E(-\xi)$$

contient tous les points de $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$ sauf peut-être un ensemble de mesure nulle. On a donc

$$f(x)>c+2\varepsilon'-\varepsilon$$

presque partout dans $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$. On peut discuter de la même manière en remplaçant ε' par $2\varepsilon'-\varepsilon$. On a alors

$$f(x)>c+4\varepsilon'-3\varepsilon$$

presque partout dans $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$. En continuant ainsi, on voit que l'on a

$$f(x)>c+2^n\varepsilon'-(2^n-1)\varepsilon \tag{2}$$

sur un ensemble Γ_n qui contient tous les points de $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$ sauf peut-être un ensemble de mesure nulle. Si $x\in\bigcap_n\Gamma_n$ on a (2) pour un entier quelconque n, ce qui est impossible. Le théorème est donc démontré.

Remarque 1. *Le graphe d'une fonction convexe discontinue est dense dans le domaine*

$$\alpha<x<\beta,\quad \underline{f}(x)<y<\infty.$$

En effet, soit $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$ un intervalle quelconque contenu dans $\langle\alpha, \beta\rangle$. On peut trouver, quelque petit que soit $\varepsilon>0$, deux valeurs α', β' contenues dans $\langle\gamma-\delta, \gamma+\delta\rangle$ et telles que

$$f(\alpha')<f(\gamma)+\varepsilon,\quad f(\beta')>1/\varepsilon.$$

$f(x)$ coïncidant avec $\psi(x)$ définie plus haut, l'ensemble des valeurs que prend $f(x)$ dans $\langle\alpha', \beta'\rangle$ (ou $\langle\beta', \alpha'\rangle$) est dense dans l'intervalle $\langle f(\alpha'), f(\beta')\rangle$, d'où découle la proposition annoncée.

Remarque 2. On peut étendre sans peine les résultats au cas de la fonction convexe d'un nombre fini de variables.