178. *Sur Quelques Types des Théorèmes de Dualité dans les Groupes Topologiques*[1)]

Par Shin-ichi MATSUSHITA

Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1954)

1. Soient G un groupe topologique et $A(G)$ une algèbre de Banach commutative involutive des fonctions presque périodiques (*p. p.*) dans G, algèbre munie de la norme uniforme et de la multiplication habituelle, de plus $f^*=\bar{f}$ (valeur conjuguée). Rappelons que si $\Phi^0(\cdot)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires multiplicatives (non triviaux) φ définies sur une algèbre normée $(\cdot)$, en munissant $\Phi^0(A(G))$ de la topologie de convergence simple dans $A(G)$, il est compact séparé et

$$(1.1) \qquad A(G) \cong C(\Phi^0(A(G))),^{2)}$$

où $C(X)$ désigne l'algèbre de Banach des fonctions continues dans un compact X et le signe $\cong$ s'exprime une application isomorphe et isométrique entre deux espaces de Banach. On voit facilement que l'application ϕ, $x \longrightarrow \varphi_x$ de G dans $\Phi^0(A(G))$ est continue et si G est maximalement presque périodique (*max. p. p.*), G est considéré comme une partie dense de $\Phi^0(A(G))$. En outre, l'application $\mathring{\phi}$ de $A(G)$ sur $C(\Phi^0(A(G)))$ dans (1.1) se réalise en la forme suivante

$$(1.2) \qquad f(x)=\varphi_x(f)=\mathring{\phi}f(\phi(x)), \quad \mu(f)=\int_{\mathfrak{G}_0} \mathring{\phi}f(\varphi)\,d\nu(\varphi),$$

où μ est la valeur moyenne et ν une mesure de Radon >0 sur $\mathfrak{G}_0 \equiv \Phi^0(A(G))$.

2. Nous considérons maintenant l'ensemble $\mathfrak{S}(G)$ de tous les opérateurs linéaire bornés et réguliers (reversibles) tels qu'on ait

$$(2.1) \qquad S_1)\ Sf^*=(Sf)^*, \qquad S_2)\ S(fg)=S(f)S(g), \qquad S_3)\ S(1)=1,$$

1 étant l'unité d'algèbre $A(G)$. $\mathfrak{S}(G)$ est alors non vide et forme un groupe algébrique; en effet, $ST^{-1}(f^*g)=ST^{-1}((TT^{-1}f)^*TT^{-1}g)=S((T^{-1}f)^*T^{-1}g)=(ST^{-1}f)^*ST^{-1}g$. D'ailleurs, en posant

$$\begin{aligned} {}_aS\,; &\quad {}_aS\,f = {}_af, &\quad {}_af(x) &= f(a^{-1}x), \\ S_a; &\quad S_af = f_a, &\quad f_a(x) &= f(xa), \\ J\,; &\quad Jf = f^{\sim}, &\quad f^{\sim}(x) &= f(x^{-1}), \end{aligned}$$

1) Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Mr. H. Freudenthal et à Mr. T. van Est pour les conseils très utiles et la critique précieuse.

2) D'après un théorème de représentation pour une B-algèbre commutative, qui a été établi par MM. I. Gelfand, R. V. Kadison, N. Fukamiya, et l'auteur même, e. g. R. V. Kadison: Mem. A. M. S., **7**, Thr. 6. 8 (1952).

les totalités ${}_G\mathfrak{S}$ des ${}_aS$ et $\mathfrak{S}_G$ des S_a appartiennent avec J à $\mathfrak{S}(G)$ quand a décrit G. Désignons alors par ${}_G^0\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}_G^0$) l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}(G)$ qui permutent aux éléments de $\mathfrak{G}_G$ (resp. ${}_G\mathfrak{S}$): nous avons aussitôt le

Lemme 1. *${}_G^0\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}_G^0$) forme un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$ qui contient ${}_G\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}_G$). $\|S\|=1$ pour tout $S\in\mathfrak{S}(G)$.*

En passant on remarque que $JS_aJ^{-1}={}_aS$, $J_aSJ^{-1}=S_a$ et $J^{-1}=J$.

Théorème 1. *Si G est max. p.p., il exists deux manières de mettre $\Phi^0(A(G))$ en un groupe, auquel ${}_G^0\mathfrak{S}$ ou bien $\mathfrak{S}_G^0$ est algébriquement isomorphe; de plus, l'un est isomorphe à l'autre par l'application déduite de J.*

Demonstration de ${}_G^0\mathfrak{S}\cong\Phi^0(A(G))$. En posant $\varphi_S(f)=Sf(e)$ pour $S\in{}_G^0\mathfrak{S}$, e étant l'élément neutre de G, on voit facilement que φ_S appartient à $\Phi^0(A(G))$, puisque $\varphi_S(fg)=Sfg(e)=Sf(e)Sg(e)=\varphi_S(f)\varphi_S(g)$.[3] Réciproquement, nous allons montrer qu'à tout φ de $\Phi^0(A(G))$ il y a un élément S de ${}_G^0\mathfrak{S}$ tel qu'on ait $\varphi_S=\varphi$, comme suit;

α) Posant $f^\varphi(a)=\varphi(S_af)$, $a\in G$, de la continuité et la presque-périodicité de f, il en resulte que f^φ est aussi $p.p.$ et continue.[4]

β) En définissant l'opérateur S_φ par $S_\varphi f=f^\varphi$, S_φ appartient à ${}_G^0\mathfrak{S}$ et satisfait aux

$$\varphi_{S_\varphi}=\varphi \quad \text{et} \quad S_{\varphi_S}=S; \tag{2.2}$$

en effet, les conditions $S_1)\sim S_3)$ de (2.1) sont évidemment remplies pour S_φ, en outre $S_aS_\varphi f(x)=S_af^\varphi(x)=J_aSJf^\varphi(x)={}_aSJf^\varphi(x^{-1})=Jf^\varphi(a^{-1}x^{-1})$ $=f^\varphi(xa)=\varphi(S_{xa}f)=\varphi(S_x(S_af))=(S_af)^\varphi(x)=S_\varphi S_af(x)$, c'est-à-dire, S_φ permute à $\mathfrak{S}_G$. D'autre part, pour une $f\in A(G)$ il existe un ensemble fini des $a_1,\dots,a_n$ de G tels que $\inf_i|f(xa_i)-f(xa)|<\varepsilon/3$ pour tout $x,a\in G$, et de plus il existe un $x_0\in G$ tel qu'on ait $|\varphi(f_{a_i})-\varphi_{x_0}(f_{a_i})|$ $<\varepsilon/3$ pour tout i; soit $\|f\|-|f(x_0a)|<\varepsilon/3$, on peut alors choisir un a_i tel qu'on ait $\|S_\varphi f\|=\|f^\varphi\|=\sup_{b\in G}|\varphi(S_bf)|\geqq|\varphi(S_{a_i}f)|>|\varphi_{x_0}(S_{a_i}f)|$ $-\varepsilon/3>\|f\|-\varepsilon$, d'où $\|S_\varphi f\|\geqq\|f\|$ et donc la régularité de l'opérateur S_φ.

γ) Nous avons encore que $\varphi_{S_\varphi}(f)=S_\varphi f(e)=f^\varphi(e)=\varphi(f)$ et d'ailleurs $S_{\varphi_S}f(x)=f^{\varphi_S}(x)=\varphi_S(S_xf)=SS_xf(e)=(S_x)Sf(e)=Sf(x)$ pour tout $f\in A(G)$, d'où résulte (2.2), ce qui achève de montrer ${}_G^0\mathfrak{S}\cong\Phi^0(A(G))$.

En replaçant les définitions de φ_S, S_φ et de f^φ ci-dessus par celles dont $\varphi_S(f)=Sf(e)$ pour $S\in\mathfrak{S}_G^0$, $S_\varphi f={}^\varphi f$, et ${}^\varphi f(a)=\varphi({}_{a^{-1}}Sf)$ respectivement, on obtient aisement $\mathfrak{S}_G^0\cong\Phi^0(A(G))$ d'une manière analogue.

3. Désormais quand nous parlerons d'un groupe G, il sera toujours considéré comme un groupe *max. p.p.* (partout dans ce n^0 3).

---

3) Clairement, ${}_aSf(e)=f(a^{-1})$ et $(S_a)f(e)=f(a)$.

4) $\sup_{a,b}|f^\varphi(axb)-f^\varphi(ayb)|\leqq\sup_{a,b}\|S_{axb}f-S_{ayb}f\|=\sup_{a',b}|f(a'xb)-f(a'yb)|$.

Nous considérons alors une topologie faible de $\mathfrak{S}(G)$ définie par un système fondamental de tels voisinages de $S \in \mathfrak{S}(G)$ que

(3.1) $\omega_S(f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{T \in \mathfrak{S}(G);\ |Tf_j(e) - Sf_j(e)| < \varepsilon\}$,

$f_j \in A(G)(j=1, 2, \dots, n)$ et n, $\varepsilon > 0$ étant arbitraires.[5] Pour cette topologie l'espace $\mathfrak{S}(G)$ est précompact séparé (ce qui s'explique aisément par le théorème connu de Tychonoff), et ${}^0_G\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^0_G$ sont compact dans $\mathfrak{S}(G)$: en effet ces topologies restreintes dans ${}^0_G\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^0_G$ sont compatibles avec la topologie de $\Phi^0(A(G))$, et selon que G est dense dans $\Phi^0(A(G))$, ${}_G\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}_G$) est aussi dense dans ${}^0_G\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}^0_G$). Pour établir une structure de groupe topologique en $\mathfrak{S}(G)$, nous pourvoyons le

Lemme 2. *Pour tout $S \in {}^0_G\mathfrak{S}$, $f^k \in A(G)\,(k=1, 2, \dots, l)$, il existe un ${}_aS \in {}_G\mathfrak{S}$ tel qu'on ait $\|Sf^k - {}_aSf^k\| < \varepsilon$ (ε étant arbitraire).*

En effet, en vertu de la presque-périodicité de f^k, il existe un nombre fini de $a_1, \dots, a_n$ de G tels que pour tout $x \in G$ et $\varepsilon > 0$ on puisse choisir un a_k d'entre eux qui vérifie $\|f^k_{a_i} - f^k_x\| < \varepsilon/3\,(k= 1, 2, \dots, l)$. D'où il vient que pour tout $S \in {}^0_G\mathfrak{S}$,

$\sharp_1$) $\quad \|S(f^k_x) - S(f^k_{a_i})\| \leqq \|S\| \cdot \|f^k_x - f^k_{a_i}\| < \varepsilon/3,$

en particulier

$\sharp_2$) $\quad \|{}_aS(f^k_x) - {}_aS(f^k_{a_i})\| < \varepsilon/3 \qquad$ (pour tout $a \in G$).

Comme ${}_G\mathfrak{S}$ est dense dans ${}^0_G\mathfrak{S}$, il existe un ${}_aS \in \omega_S(f^1_{a_1}, \dots, f^1_{a_n}, \dots, f^l_{a_1}, \dots, f^l_{a_n}; \varepsilon/3)$ tel que

$\sharp_3$) $\quad |Sf^k_{a_i}(e) - {}_aSf^k_{a_i}(e)| < \varepsilon/3 \qquad (k=1, 2, \dots, l).$

En combinant $\sharp_1$), $\sharp_2$) et $\sharp_3$) et en tenant compte du fait que ${}^0_G\mathfrak{S}$ permute à $\mathfrak{S}_G$, on a alors $|Sf^k(x) - {}_aSf^k(x)| \leqq |Sf^k_x(e) - Sf^k_{a_i}(e)| + |Sf^k_{a_i}(e) - {}_aSf^k_{a_i}(e)| + |{}_nSf^k_{a_i}(e) - {}_aSf^k_x(e)| < \varepsilon$; ce qui prouve le Lemme.

Remarque. Par une raisonnement qui est de même que dans le précédent, on trouve qu'il existe $a_1, \dots, a_m \in G$ en nombre fini tels qu'on ait $\inf_j \|{}_{a_j}f - {}_af\| < \varepsilon'$ ($\varepsilon' > 0$ étant arbitraire) pour $a \in G$ quelconque.

Ce résultat conduit à la

Proposition 1. *${}^0_G\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^0_G$ sont permutables l'un à l'autre.*

En effet, quels que soient $S \in {}^0_G\mathfrak{S}$ et $T \in \mathfrak{S}^0_G$, il existe pour tout $f \in A(G)$ et $\varepsilon > 0$ un ${}_aS \in {}_G\mathfrak{S}$ tel que $\|Sf - {}_aSf\| < \varepsilon/2$ et $\|STf - {}_aSTf\| < \varepsilon/2$, d'où résulte $\|TSf - STf\| \leqq \|TSf - T_aSf\| + \|{}_aSTf - STf\| < \varepsilon$.

Or, nous allons démontrer la proposition suivante comme annoncé.

---

5) Cette topologie revient au même que la topologie de convergence uniforme dans $A(G)$, lorsqu'on munit $A(G)$ de la topologie de convergence simple.

Proposition 2. ${}_G^0\mathfrak{S}(\mathfrak{S}_G^0)$ *est un groupe topologique* (*compact*) *pour la topologie définie par* (*3.1*).

Démonstration. Étant donné un voisinage $\omega_0=\omega_{S_0}(f,\varepsilon)$ de l'élément neutre S_0 de ${}_G^0\mathfrak{S}$, on voit que $\omega_1\cdot\omega_1^{-1}\subset\omega_0$ pour le voisinage de S_0, $\omega_1=\omega_{S_0}({}_{a_1}f,\dots,{}_{a_m}f;\ \varepsilon/6)$, où les a_j $(j=1,2,\dots,m)$ sont les mêmes que ceux mentionnés dans la remarque ci-dessus, dans laquelle ε' est adopté comme$=\varepsilon/6$ dès à présent. En effet, quel que soit $T\in\omega_1$, il existe un $a\in G$ tel que

$\mathfrak{h}_1$) $\|T^{-1}f-{}_aSf\|<\varepsilon/6$, donc $\|ST^{-1}f-S({}_aS)f\|<\varepsilon/6$

pour tout $S\in{}_G^0\mathfrak{S}$; Lemme 2 met ce fait en évidence. D'autre part, d'après la remarque ci-dessus il existe un a_j d'entre $a_1,\dots,a_m$ tel qu'on ait

$\mathfrak{h}_2$) $\|{}_aSf-{}_{a_j}Sf\|<\varepsilon/6$, donc $\|S({}_aS)f-S({}_{a_j}S)f\|<\varepsilon/6$

pour tout $S\in{}_G^0\mathfrak{S}$. De $\mathfrak{h}_1$), il revient en particulier

$\mathfrak{h}_3$) $\|f-T({}_aS)f\|<\varepsilon/6$.

En combinant $\mathfrak{h}_1$), $\mathfrak{h}_2$), et $\mathfrak{h}_3$), pour tout $S\in\omega_1$ on a

$$\begin{aligned}|ST^{-1}f(e)-f(e)|&<|ST^{-1}f(e)-S({}_aS)f(e)|+|S({}_aS)f(e)-S({}_{a_j}S)f(e)|\\&\quad+|S({}_{a_j}S)f(e)-{}_{a_j}f(e)|+|{}_{a_j}f(e)-T({}_{a_j}f)(e)|+|T({}_{a_j}S)f(e)\\&\quad-T({}_aS)f(e)|+|T({}_aS)f(e)-f(e)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

d'où l'énoncé. Nous montrerons finalement que, quel que soit $S\in{}_G^0\mathfrak{S}$, il y a un voisinage ω_2 de S_0 tel que $\omega_2\subset S\omega_0S^{-1}$; pour cela, il suffira de poser $\omega_2=\omega_{S_0}(Sf_{a_1},\dots,Sf_{a_n};\ \varepsilon/3)$, où f_j $(j=1,2,\dots,n)$ sont les mêmes que dans la démonstration du Lemme 2 pour le cas $\varepsilon/6$ au lieu de ε, c'est-à-dire $\inf_j\|f_{a_j}-f_a\|<\varepsilon/6$ pour tout $a\in G$. En effet, quel que soit $T\in\omega_2$, il existe un ${}_aS\in{}_G\mathfrak{S}$ tel qu'on ait simultanément $\|S^{-1}(TS)f-{}_aS^{-1}(TS)f\|<\varepsilon/6$, $\|S^{-1}(Sf)-{}_aS^{-1}(Sf)\|<\varepsilon/6$, d'où $|S^{-1}(TSf)(e)-TSS_{a_j}f(e)\|<|S^{-1}(TSf)(e)-TSf(a)|+|TSS_af(e)-TSS_{a_j}f(e)|<\varepsilon/3$ et $|f(e)-SS_{a_j}f(e)|<|S^{-1}Sf(e)-{}_aS^{-1}Sf(e)|+|Sf(a)-Sf(a_j)|<\varepsilon/3$, ce qui montre $|S^{-1}(TSf)(e)-f(e)|<\varepsilon$. D'où résulte $S^{-1}TS\in\omega_{S_0}(f,\varepsilon)$.

Conformément à la proposition précédente nous établissons

Théorème 2. ${}_G^0\mathfrak{S}\simeq\Phi^0(A(G))\simeq\mathfrak{S}_G^0$ (*isomorphisme topologique*); *ainsi* $\Phi^0(A(G))$ *est un groupe compact. Cela conduit aux deux théorèmes de la dualité suivants.*

α) Dualité aux opérateurs. *Un groupe max. p.p. G est appliqué d'une manière isomorphe et continue sur un sous-groupe dense ${}_G\mathfrak{S}$ (ou bien $\mathfrak{S}_G$) du groupe compact ${}_G^0\mathfrak{S}$ (ou resp. $\mathfrak{S}_G^0$). Si G est compact, on a ${}_G^0\mathfrak{S}\simeq G\simeq\mathfrak{S}_G^0$.*

β) Dualité usuelle au sens de M. Tannaka. *G est isomorphe par continuité à un sous-groupe dense $\widetilde{G}$ du groupe compact $\Phi^0(A(G))$ et si*

G est compact, $G \cong \widetilde{G} \cong \Phi^0(A(G))$.[6]

4. Rappelons que pour un groupe topologique général G, il existe toujours un groupe *max. p.p.* G^0 tel que i) ses générateurs algébrique coïncident avec l'ensemble G, ii) G soit un sous-groupe topologique de G^0, iii) le quotient G^0/H^0 pour un sous-groupe distingué H^0 de G^0 soit topologiquement isomorphe à G; ces G^0 et H^0 s'appelleront *extension de Markoff* et son *noyau* respectivement. Quelquefois il se pourrait que G^0 est un groupe libre topologique au sens de MM. A. Markoff et P. Samuel.[7] Alors, d'après ce qu'on a vu au n^0 3, il vient qu'en appliquant β) du théorème 2 à G^0, G^0 est isomorphe à un groupe dense $\widetilde{G}^0$ de $\Phi^0(A(G^0))$; pour un groupe distingué convenable $\widetilde{H}^0$ de $\widetilde{G}^0$, notons par $\widetilde{G}$ le quotient $\widetilde{G}^0/\widetilde{H}^0$, on a alors

$$(4.1) \qquad G \underset{\longleftrightarrow}{=} G^0/H^0 \underset{\longrightarrow}{-} \widetilde{G} \equiv \widetilde{G}^0/H^0; \ \widetilde{G}^0 \underset{\longrightarrow}{-} \widetilde{G},$$

où les signes $X = Y$ (ou $X - Y$) et $X \longrightarrow Y$ (ou $X \longleftrightarrow Y$) désignent application iso-(ou homo-)morphe et application (bi-)continue de X sur Y respectivement. Nous avons alors le

Théorème 3 (théorème de la co-dualité). *Un groupe topologique G est isomorphe par continuité à un quotient $\widetilde{G}$ d'un sous-groupe dense $\widetilde{G}^0$ du groupe compact $\Phi^0(A(G^0))$. Si G est max. p. p., $\widetilde{G}=\widetilde{G}^0$ et si G est compact, $G \cong \Phi^0(A(G))$.*

5. Les éléments $a \in G$ tels que $f(a)=f(e)$ pour toute $f \in A(G)$ forment un sous-groupe distingué H_0 de G, pour lequel $G_0=G/H_0$ est évidemment *max. p. p.* et appliqué par continuité sur un sous-groupe dense $\widetilde{G}_0$ de $\Phi^0(A(G))$, c'est-à-dire

$$(5.1) \qquad G/H_0 \underset{\longleftrightarrow}{=} G_0 \underset{\longrightarrow}{=} \widetilde{G}_0; \ \widetilde{G} \underset{\longrightarrow}{-} \widetilde{G}_0.$$

À présent, nous résumons les résultats obtenus ci-dessus dans *le tableau suivant*: $(\cdot)^a$ désignant l'adhérence de $(\cdot)$,

$$\Phi^0(A(G^0))=(\widetilde{G}^0)^a \qquad\qquad (\widetilde{G}_0)^a=\Phi^0(A(G_0))$$

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{G}^0 & \underset{\longleftrightarrow}{-} & \widetilde{G} & - & \widetilde{G}_0 \\
\uparrow\| & & \uparrow\| & & \uparrow\| \\
G^0 & \underset{\longleftrightarrow}{-} & G & \underset{\longleftrightarrow}{-} & G_0.
\end{array}$$

Conformément à ce tableau, nous pouvons établir un *autre tableau pour ce qui concerne à l'algèbre des fonction;*

6) Pour la dualité de ce type, voir T. Tannaka: Principe de la dualité (*en japonais*) (1951) et W. Maak: Fastperiodische Funktionen (1951).

7) A. Markoff: C. R. URSS, **31** (1941). P. Samuel: Bull. A. M. S., **54** (1948). Voir encore S. Matsushita: Jour. Osaka City Univ., **3** (1952).

$$\begin{array}{ccccc} C(\Phi^0(A(G^0))) = \overset{*}{C}(\widetilde{G}^0) & \supset & C(\Phi^0(A(G))) = \overset{*}{C}(\widetilde{G}_0) & = & C(\widetilde{\Phi}^0(A(G_0))) \\ \| & & \| & & \| \\ A(G^0) & \supset & A(G) & = & A(G_0), \end{array}$$

où $X \supset Y$ exprime que Y est un sous-algèbre de X et $\overset{*}{C}(\cdot)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur $(\cdot)$.

Remarque 1. Le produit défini dans $\Phi^0(A(G))$ s'explique, pour une représentation unitaire irréductible de dimension finie $D(\cdot) = (D_{ij}(\cdot))$ de G, comme suit:

$$\varphi_1\varphi_2(D_{ij}) = \sum_k \varphi_1(D_{ik})\,\varphi_2(D_{kj}), \tag{5.2}$$

ce qui n'est autre que celui par lequel M. Krein eut défini une structure multiplicative dans $\Phi^0(A(G))$.[8] Toutefois, à ce qu'il me semble, il est plus naturel d'introduire un produit dans $\Phi^0(A(G))$ au moyen du produit propre des opérateurs, comme étudié dans le présent travail.

Remarque 2. Ainsi que dans $\Phi^0(A(G))$, on trouve une mesure de Haar $d\nu$ définie dans $\mathfrak{G}$, qui est$= {}^0_G\mathfrak{S}$ ou bien $= \mathfrak{S}^0_G$, telle que

$$\mu(f) = \int_{\mathfrak{G}} \hat{f}(S)\,d\nu(S), \tag{5.3}$$

où $\hat{f}(S) \in C({}^0_G\mathfrak{S})$ ou resp. $\in C(\mathfrak{S}^0_G)$, qui est définie par l'application $\hat{\phi}$ de $A(G)$ sur $C(\mathfrak{G})$ selon que $A(\mathfrak{G}) \cong C(\Phi^0(A(G))) \cong C(\mathfrak{G})$; $f \longrightarrow \hat{\phi}(f)(S) = \hat{f}(S) = Sf(e)$. Comme $\hat{\phi}(S_0 f)(S) = SS_0 f(e) = \hat{\phi}(f)(SS_0)$ pour tout $S_0 \in \mathfrak{G}$, on a

$$\int_{\mathfrak{G}} \hat{f}(S)\,d\nu(S) = \int_{\mathfrak{G}} \hat{f}(SS_0)\,d\nu(S) = \int_{\mathfrak{G}} \widehat{S_0 f}(S)\,d\nu(S),$$

d'où il vient que $\mu(S_0 f) = \mu(f)$: si l'on pose $(f, g) = \mu(g^* f)$ pour $f, g \in A(G)$, ce produit scalaire (f, g) définit une structure hilbertienne dans $A(G)$ et tout $S \in {}^0_G\mathfrak{S}$ ou $\in \mathfrak{S}^0_G$ engendre un opérateur unitaire; en effet, $(Sf, Sg) = \mu((Sg)^* Sf) = \mu(S(g^* f)) = \mu(g^* f) = (f, g)$. Alors, l'application $a \in G \longrightarrow {}_aS$ (ou bien S_a) est une représentation unitaire continue de G dans les opérateurs sur $A(G)$ pour la topologie faible.[9]

---

8) M. Krein: C. R. URSS, **30** (1940).

9) En effet, la continuité de la représentation $a \to {}_aS$ résulte de celle d'application $\hat{\phi}$ pour la topologie (3.1) et du fait que la translation de $\hat{f}$ sur $\mathfrak{G}$, $\widehat{S_a f}$, est continue pour L^1-norme de $L(\mathfrak{G})$.