104. Fonctions Presque Périodiques du Type Spécial. VI

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1955)

§15. *Fonctionnelles élémentaires sur* $\mathfrak{A}^0$ *et* $\mathfrak{A}$. Ce paragraphe contient l'étude des fonctionnelles de certaines propriétés définies sur les espaces $\mathfrak{A}^0$ et $\mathfrak{A}$ et du rapport entre les espaces de ces fonctionnelles; on y introduit ensuite quelques topologies qui sont commodes pour ce qui vont suivre.

$C^\infty(G)$ désignera l'espace de Banach (simultanément, l'algèbre de Banach par rapport au produit ponctuel), normé par la norme uniforme, des fonctions bornées uniformément continues *à gauche* sur G: lorsque G est abélien ou bien compact, les deux structures uniformes à gauche et à droite sont évidemment confondues.

Une *fonctionnelle élémentaire* ϕ sur $\mathfrak{A}^0$ (ou $\mathfrak{A}$) est une application linéaire continue de l'espace topologiques $\mathfrak{A}^0$ (resp. $\mathfrak{A}$)[1] dans $\mathfrak{M}$, espace muni de sa structure uniforme vague, qui satisfait aux conditions suivantes:

1°) si $\alpha(x)=f(x)\alpha_0(x)$ pour une $f\in C^\infty(G)$ (resp. $\in A(G)$) et une $\alpha_0\in\mathfrak{A}^0$ (resp. $\mathfrak{A}$), on a

$$\phi(\alpha)=\mathring{\phi}(f)\phi(\alpha_0), \tag{15.1}$$

où $\mathring{\phi}(f)$ est une constante qui dépend seulement de f et ϕ, mais ne de α_0 à rien,

2°) pour toute $\mu\in\mathfrak{M}$, $\phi(\mu)=\mu$.

L'ensemble de telles fonctionnelles élémentaires définies sur $\mathfrak{A}^0$ (ou $\mathfrak{A}$) se note $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ (resp. $\Phi^0(\mathfrak{A})$). Ce sont évidemment non-vides; en effet, les ϕ_x définies par $\phi_x(\alpha)=\alpha(x)$, $x\in G$, forment une partie non-vide Φ_G^0 de $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ ou de $\Phi^0(\mathfrak{A})$ suivant que $\alpha\in\mathfrak{A}^0(G)$ ou $\in\mathfrak{A}(G)$. Dans la suite nous considérons toujours $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ (resp. $\Phi^0(\mathfrak{A})$) comme muni de la topologie compatible d'espace topologique des applications continues $C(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ (resp. $C(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$) déterminée par la convergence simple dans celui-ci, sauf indication contraire.

Lemme 6. *i) La valeur* $\mathring{\phi}(f)$ *qui correspond à chaque* $f\in C^\infty(G)$ *resp.* $A(G)$ *définit une fonctionnelle linéaire multiplicative continue, de la norme* 1, *sur l'algèbre de Banach* $C^\infty(G)$ *resp.* $A(G)$, *vérifiant* $\mathring{\phi}(1)=1$. *ii) L'application* $\phi\to\mathring{\phi}$ *est une application continue de* $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ *resp.* $\Phi^0(\mathfrak{A})$ *sur l'espace des fonctionnelles linéaires multiplica-*

1) On munit toujours $\mathfrak{A}^0$ de la topologie de la *convergence uniforme* comme dans $\mathfrak{A}$; sous cette topologie $\mathfrak{A}^0$ est fermé dans $C(G, \mathfrak{M})$ et $\mathfrak{A}$ est un sous-espace fermé de celui-là, Théorème 23 de la Note précédente; citée [V].

tives non-triviales définies sur $C^\infty(G)$ resp. $A(G)$, qu'on note $\Phi^0(C^\infty(G))$ resp. $\Phi^0(A(G))$, lorsqu'on munit celui-ci de la topologie faible (de la convergence simple dans G).

Démonstration: La multiplicativité de $\mathring{\phi}$ sera découlante au calcul simple suivant; soient $\hat{h}$ une fonction $\geqq 0$ de $L^0(V_0)$ et μ une mesure de $\mathfrak{M}^1$ telles qu'on ait $\int_{V_0} \hat{h}(\varphi)d\mu(\varphi)=1$, alors on a $\mathring{\phi}(fg)=\langle \hat{h}, \mathring{\phi}(fg)\mu\rangle=\langle \hat{h}, \phi(fg\mu)\rangle=\langle \hat{h}, \mathring{\phi}(f)\mathring{\phi}(g)\mu\rangle=\mathring{\phi}(f)\mathring{\phi}(g)$. La continuité de $\mathring{\phi}$ résulte du fait suivant: comme ϕ est continue sur $\mathfrak{M}_0^{\mathfrak{A}^0(G)}$ (resp. $\mathfrak{M}_0^{\mathfrak{A}(G)}$), on voit que pour un voisinage $\omega=\omega(\hat{h}_0, \varepsilon)$ de 0 dans $\mathfrak{M}$, il existe un voisinage $v=v(\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_n; \varepsilon')$ de 0 dans $\mathfrak{A}^0(G)$ (resp. $\mathfrak{A}(G)$) tel qu'on ait $\phi(v)\subset\omega$. Pour un $\varepsilon''>0$ assez petit, on vérifie que, si $\|f-g\|<\varepsilon''$, on a $|\langle \hat{h}_j, f\mu(x)-g\mu(x)\rangle|\leqq\|\hat{h}_j\|_\infty\cdot\|f\mu(x)-g\mu(x)\|\leqq\|\hat{h}_j\|_\infty\cdot \|\mu\|\,\|f-g\|<\varepsilon'$ où μ est une mesure de $\mathfrak{M}^1$ telle que $\langle\hat{h}_0, \mu\rangle=1$. D'où il vient que $(f-g)\mu\in v$ donc $\phi(f\mu)-\phi(g\mu)\in\omega$, c'est-à-dire

$$|\mathring{\phi}(f)-\mathring{\phi}(g)|=|\langle\hat{h}_0, \phi(f\mu)-\phi(g\mu)\rangle|<\varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité de $\mathring{\phi}$.

Finalement, prenons encore $\hat{h}_0$ et $\mu\in\mathfrak{M}^1$ telles que $\langle\hat{h}_0, \mu\rangle=1$; quel que soit le voisinage $U\mathring{\phi}=U\mathring{\phi}(f, \varepsilon)$ de $\mathring{\phi}$ dans $\Phi^0(C^\infty(G))$ resp. $\Phi^0(A(G))$, on a alors que le voisinage $u_\phi(f\mu\,; \omega(\hat{h}, \varepsilon))$ de ϕ dans $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ resp. $\Phi^0(\mathfrak{A})$ est appliqué dans $U\mathring{\phi}$ par l'application $\phi\to\mathring{\phi}$, d'où résulte l'assertion ii).

Lemme 6$^{\text{bis}}$. *Pour une ϕ de $\Phi^0(\mathfrak{A})$, les trois conditions suivantes sont identiques:*

a) Si $\alpha(x)\in\omega$ pour tout $x\in G$, ω étant un voisinage de 0 dans $\mathfrak{M}$, alors $\phi(\alpha)\in\omega$.

b) Pour toutes $\alpha\in\mathfrak{A}$ et $\hat{h}\in L^0(V_0)$, l'égalité suivante est valide;

$$\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \alpha\rangle=\langle\hat{h}, \phi(\alpha)\rangle. \tag{15.2}$$

c) L'application $\phi\to\mathring{\phi}$ est biunivoque et bicontinue.

Démonstration: $a)\rightleftarrows b)$. Quel que soit le nombre $\varepsilon>0$, il existe un polynôme trigonométrique $\sum_k\alpha_kD_k(x)$, α_k étant $\in\mathfrak{M}$, tel qu'on ait $|\langle\hat{h}, \alpha-\sum D_k\alpha_k\rangle|<\varepsilon$ et, d'après la condition $a)$, on ait encore $|\langle\hat{h}, \phi(\alpha)\rangle-\langle\hat{h}, \sum\mathring{\phi}(D_k)\phi(\alpha_k)\rangle|<\varepsilon$; d'autre part, il est évident que

$$|\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \alpha\rangle-\langle\hat{h}, \sum\mathring{\phi}(D_k)\phi(\alpha_k)\rangle|=|\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \alpha\rangle-\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \sum D_k\alpha_k\rangle|<\varepsilon,$$

d'où on obtient $|\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \alpha\rangle-\langle\hat{h}, \phi(\alpha)\rangle|<2\varepsilon$, c'est-à-dire $a)\to b)$. Réciproquement, $b)\to a)$ trivialement. $b)\rightleftarrows c)$: Si $\mathring{\phi}_1=\mathring{\phi}_2$, (15.2) entraîne que $\langle\hat{h}, \phi_1(\alpha)\rangle=\langle\hat{h}, \phi_2(\alpha)\rangle$ pour toute $\hat{h}\in L^0(V_0)$, d'où $b)\to c)$. Quant à $c)\to b)$, il va résulter de la proposition plus générale:

Lemme 7. *Pour toute* $\mathring{\phi} \in \Phi^0(C^\infty(G))$ *ou* $\in \Phi^0(A(G))$, $\mathring{\phi}\langle \hat{h}, \alpha\rangle$ *définit un élément* ϕ *de* $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ *resp. de* $\Phi^0(\mathfrak{A})$ *qui vérifie* (*15.2*).

En effet, $\phi_\alpha(\hat{h})=\mathring{\phi}\langle \hat{h}, \alpha\rangle$ est linéaire sur $L^0(V_0)$ et d'ailleurs, comme $\{\alpha(x)\}_{x\in G}$ forment une partie bornée de $\mathfrak{M}$, il existe un nombre $M\geqq 0$ tel que $|\langle\hat{h}, \alpha(x)\rangle| \leqq M\cdot\|\hat{h}\|_\infty$ pour tout $x \in G$, d'où $|\mathring{\phi}_\alpha(\hat{h})|=|\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \alpha\rangle| \leqq \sup_{x\in G}|\langle\hat{h}, \alpha(x)\rangle| \leqq M\cdot\|\hat{h}\|_\infty$ (car $\mathring{\phi}$ est de norme 1), ce qui expriment que ϕ_α définit une mesure sur V_0. En posant $\phi_\alpha=\phi(\alpha)$, on obtient ϕ cherchée.

Nous allons considérer le sous-ensemble $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$ de $\Phi^0(\mathfrak{A})$ formé de telles fonctionnelles que satisfassent à quelqu'une des conditions mutuellement équivalentes *a*), *b*), et *c*) dans Lemme 6[bis]. Nous remarquons d'abord qu'en vertu de (15.2) toute fonctionnelle ϕ de $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$ sera bien définissable sans la condition 2°); en effet, on a $\langle\hat{h}, \phi(\mu)\rangle=\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \mu\rangle=\langle\hat{h}, \mu\rangle$ pour toute $\hat{h} \in L^0(V_0)$.

Analogiquement, nous considérons encore un sous-ensemble $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}^0)$ de $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ qui se forme de telles fonctionnelles que satisfassent à la condition (15.2): des raisonnements analogues à la démonstration de l'équivalence $b)\leftrightarrows c)$ dans Lemme 6[bis] montrent que l'application de $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}^0)$ sur $\Phi^0(C^\infty(G))$, $\phi\to\mathring{\phi}$, est aussi biunivoque et bicontinue. La théorie générale des fonctionnelles sur une algèbre de Banach commutative unitaire[2] montre que les deux $\Phi^0(C^\infty(G))$ et $\Phi^0(A(G))$ sont compacts; il en résulte que:

Théorème 27. *i*) $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}^0)$ *et* $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$ *sont compacts et homéomorphes respectivement à* $\Phi^0(C^\infty(G))$ *et à* $\Phi^0(A(G))$. *ii*) Φ^0_G *constitue une partie dense dans chacun des* $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}^0)$ *et* $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$. *iii*) $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$ *forme un groupe compact, comme il en est ainsi de* $\hat{\Phi}^0(A(G))$; *si* G *est compact, on a alors les homéomorphismes,*

$$G\cong\Phi^0_G\cong\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}),$$

ce qui s'exprime le "théorème de la dualité" selon M. T. Tannaka, dans le cas des fonctions presque périodiques de $\mathfrak{A}(G)$.

§16. *Fonctionnelles linéaires.* Pour toute $\alpha \in C(G, \mathfrak{M})$, on peut définir une fonction multiple $\phi\circ\alpha \in C(G, \mathfrak{M})$ par rapport à toute fonctionnelle ϕ continue sur $C(G, \mathfrak{M})$, de telle manière que

(16.1) $$\phi\circ\alpha(x)=\phi(\tau_{x^{-1}}\alpha),\ x \in G \text{ et } \tau_s\alpha=\alpha(s^{-1}\cdot).$$

Nous désignons par $C^\infty(G)^*$ l'espace dual à l'espace de Banach $C^\infty(G)$; les mêmes raisonnements que dans la démonstration du Lemme 7 ci-dessus permettent que toute $\mathring{\phi} \in C^\infty(G)^*$ définisse une

2) Voir par exemple R. V. Kadison: *A representation theory for commutative topological algebra*, Mem. Amer. Math. Soc., **7** (1952) et le prochain article de moi-même, S. Matsushita: *Positive functionals and representation theory on Banach algebras, I*, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., **6** (1955). Encore S. Matsushita [2].

fonctionnelle linéaire ϕ sur le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_b^G$ formé des fonctions $\alpha(x)$ uniformément continues à gauche (sur G), vérifiant

$$\mathring{\phi}\langle\hat{h}, \alpha\rangle = \langle\hat{h}, \phi(\alpha)\rangle \tag{16.2}$$

pour toute $\hat{h} \in L^0(V_0)$, car $\mathring{\phi}$ est de la norme bornée. Réciproquement, désignons par $D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ formé des applications linéaires ϕ sur $\mathfrak{A}^0$ vérifiant que si $\alpha(x) \in \omega$ pour tout $x \in G$, il existe une constante K_ϕ relative à ϕ telle que $\phi(\alpha) \in K_\phi\omega$; on vérifie alors que toute $\phi \in D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ définit une fonctionnelle $\mathring{\phi}$ de $C^\infty(G)^*$ qui satisfait à l'égalité (16.2), puisque toute fonction $f \in C^\infty(G)$ s'écrit comme $f(x) = \langle\hat{h}, f(x)\mu\rangle$ où $\mu \in \mathfrak{M}^1$, $\hat{h} \in L^0(V_0)$ avec $\langle\hat{h}, \mu\rangle = 1$ et, d'après le Théorème 24, $f(x)\mu$ appartient à $\mathfrak{A}^0(G)$.

Théorème 28. *$C^\infty(G)^*$ et $D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ sont algébriquement isomorphes l'un à l'autre par la relation (16.2).*

Remarque. $D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ est engendré linéairement, en complétant pour la topologie de la convergence simple dans $\mathfrak{A}^0$, par l'ensemble $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}^0)$.

Voici une application intéressante de ce qui précèdent. On a déjà montre que certaines espèces de la plus grand importance des fonctions *f.p.p.* au sens de M. W. F. Eberlein (dans le cas où G est abélien) s'obtiennent au moyen de la transformée de Fourier-Stieltjes des fonctions de $\mathfrak{A}^0$ et de la limite des telles transformées (Théorème 25 [**V**] et ses conséquences $a)\sim c)$). On va ici donner un rapport complet entre $\mathfrak{A}^0(G)$ et $W_g(A)$, espace des fonctions *f.p.p.* à gauche sur G (abélien ou non).[3)]

En termes plus concrets:

Théorème 29. *Soit $\alpha \in \mathfrak{A}^0(G)$; pour que $\langle\hat{h}, \alpha\rangle(x)$, $\hat{h} \in L^0(V_0)$, soit f.p.p. à gauche sur G (c'est-à-dire, $\in W_g(A)$), il faut et il suffit que $\phi \circ \alpha$ appartienne encore à $\mathfrak{A}^0(G)$. Inversement, toute fonction de $W_g(A)$ s'écrit comme $\langle\hat{h}, \alpha\rangle(x)$ pour une telle α que α elle-même et tout multiple $\phi \circ \alpha$ par $\phi \in D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ appartiennent à $\mathfrak{A}^0(G)$.*

Démonstration. D'après Théorème 22 et Lemme 5 dans [**V**], et Théorème 28 ci-dessus.

En passant, notons que *si l'on a $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$, il en est ainsi de $\phi \circ \alpha$ pour toute $\phi \in D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$*; en conséquence on peut dire que toute fonctionnelle de $D(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{M})$ définit un endomorphisme sur $\mathfrak{A}(G)$ par $\alpha \to \phi \circ \alpha$. De plus, en tenant compte du Théorème 27, toute fonctionnelle de $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$, par suite de $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A}^0)$, donnera un automorphisme sur

3) Une fonction f de $C^\infty(G)$ sera dit *faiblement presque périodiques* à gauche, si $\mathring{\phi}(\tau_x f)$ forment un ensemble relativement compact pour toute translatées à gauche $\tau_x f$, $x \in G$ et pour toute $\mathring{\phi} \in C^\infty(G)^*$.

$\mathfrak{A}(G)$ par $\alpha \rightarrow \phi \circ \alpha$, puisque dans le groupe compact $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$ le produit satisfait à la condition

(16.3) $$\phi_1\phi_2(\alpha)=\phi_1(\phi_2 \circ \alpha)$$

et l'élément neutre du groupe $\hat{\Phi}^0(\mathfrak{A})$ est ϕ_e où $\phi_e\alpha=\alpha(e)$.

Compléments. Nous terminerons cette Note en faisant quelques remarques:

1°) Dans la série des Notes "*Fonctions presque périodiques du type spécial.* **I∼VI**", nous avons études principalement les fonctions *p.p.* de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^0$ sous ses aspects *théoriques*. Toutefois, nous pouvons revoir la théorie de l'analyse harmonique et la structure de groupes sous l'angle des applications de notre résultats, notamment de la théorie spéctrale, §10 [**IV**], et des résultats relatifs à $\mathfrak{A}^0(G)$; de ce côté on fera usage avec fruit du fait que, pour toute $f \in L(G)$ avec sa transformée de Fourier $\hat{f}$, le produit $\hat{f}_x d\mu$ par $\mu \in \mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{A}^0(G)$, Théorème 24, §12 [**V**].

2°) D'ailleurs, il est possible de définir les fonctions *p.p.* dans l'espace de mesures sur G lui-même. Plus généralement, il y a plus grande classe des fonctions *p.p.* vectorielles, c'est-à-dire ayant ses valeurs dans l'espace vectoriel topologique général:[4][5] d'autre part, suivant la travail de M. J. Riss[6] les considérations dans §3[**I**] s'étendront sur les distributions dans les groupes *l.c.* abéliens générals.

Sur ces sujets nous publierons ultérieurement plusieurs articles, dans lesquels nous étudierons les rapports avec l'analyse harmonique plus en détail.

3°) La recherche des rapports entre la puissance existante d'expansion de Fourier et le rang, au sens de M. K. Kunugi, d'espace des valeurs sera sans doute un problème très important.[7]

---

4) M. K. Shiga avait eu l'amabilité de me communiquer des résumés de son travail intéressant sur la théorie des représentation et des fonctions presque périodiques vectorielles.

5) Les Théorème 1 [**I**] et résultats dans [**II**] restent encore vrais pour la plupart quand on remplace $\mathfrak{M}$ et $L^0(V_0)$ par un espace vectoriel topologique localement convexe général et son dual topologique.

6) J. Riss: *Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts*, Acta Math., **88**, 45–105 (1952).

7) K. Kunugi: *Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, II*, Proc. Japan Acad., **30** (1954).

Remarque: Dans les Théorèmes 10 [**II**] et 16, ii) [**IV**], il est besoin de supposer quelque condition de $\varphi(x)$ qui admet l'usage du théorème de Fubini.