103. *Sur la Structure des Fonctions d'Ensemble dans les Groupes Topologiques Localement Compacts.* II

Par Shizu ENOMOTO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1955)

Dans cette Note, nous examinerons surtout les structures des ensembles de Baire et celles des fonctions d'ensemble mesurables de Baire dans le groupe topologique $\mathfrak{G}$ localement compact, non discret et σ-compact. Dans la Note "Sur la structure des fonctions d'ensemble dans les groupes topologiques localement compacts. I",[1] nous avons introduit la notion des branches de voisinages de l'unité dans $\mathfrak{G}$, et nous avons considéré les groupes quotients $\hat{\mathfrak{G}}_b$ déterminés par les branches de voisinages b, qui sont localement compacts, séparables et de plus isomorphes à des espaces métriques. Nous montrerons d'abord que, pour les études des structures des ensembles de Baire dans $\mathfrak{G}$, il suffit d'examiner celles des ensembles de Baire (donc des ensembles de Borel) dans les groupes quotients $\hat{\mathfrak{G}}_b$. On verra ensuite qu'il en est de même pour les structures des fonctions d'ensemble mesurables de Baire dans $\mathfrak{G}$. Enfin, nous donnerons une propriété d'ensemble compact quelconque dans $\mathfrak{G}$.

Une partie de ces résultats est déjà connue.[2] Mais, nous les traiterons en faisant appel à la notion de branche de voisinages.

Examinerons tout d'abord la profondeur du groupe topologique localement compact et non discret, qui a été déjà utilisée dans la Note I sans démonstration.

Lemme 2. *Dans le groupe topologique $\mathfrak{G}$ localement compact et non discret, la profondeur*[3] *est* ω_0.

Démonstration. Soit $\theta_n\,(n=0,1,2,\dots)$ une suite des voisinages ouverts de l'unité telle que $\bar{\theta}_0$ soit compact et que $\theta_n \supseteq \theta_{n+1}\theta_{n+1}^{-1}$ (égalité exclue) pour tout $n=0,1,2,\dots$ — on peut choisir toujours une telle suite. Montrons qu'il n'y a aucun voisinage de l'unité qui est contenu dans tous les θ_n de la suite. Supposé qu'il y ait un voisinage de l'unité θ tel que $\theta \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n$, posons $G_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n$. Alors, on voit aussi-

1) Shizu Enomoto: Sur la structure des fonctions d'ensemble dans les groupes topologiques localement compacts. I, Proc. Japan Acad., **31**, 284 (1955).

2) Voir, P. R. Halmos: Measure Theory, K. Kodaira: Über die Beziehung zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23**, 83 (1941).

3) Voir, pour la définition de profondeur, Kinjirô Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, Proc. Japan Acad., **30**, 553 (1954).

tôt que G_0 est un sous-groupe et qu'il possède des points intérieurs. Donc, G_0 est un ensemble ouvert et fermé.[4] Posons $G_1=\mathfrak{G}-\bar{\theta}_1$ et $G_i=\theta_{i-2}-\bar{\theta}_i$ pour tout $i=2,3,\ldots$. Alors, G_i est ouvert et non vide, puisque $\theta_{i-2}\supseteq\theta_{i-1}\theta_{i-1}^{-1}\supseteq\bar{\theta}_{i-1}\supseteq\bar{\theta}_i$ et $\theta_{i-2}\neq\theta_{i-1}\theta_{i-1}^{-1}$ $(i=2,3,\ldots)$. On voit que $\bigcup_{i=0}^{\infty}G_i\supseteq\bar{\theta}_0$ et que la famille $\{G_i; i=0,1,2,\ldots\}$ ne contient aucune sous-famille finie qui couvre $\bar{\theta}_0$, contrairement à ce que $\bar{\theta}_0$ est compact. Conséquemment, la profondeur est ω_0.

Désormais, nous gardons, sauf indication contraire, la terminologie et les notations de la Note I.

On dit que tout ensemble du σ-anneau engendré par tous les ensembles compacts qui sont des G_δ est un ensemble de Baire et que tout ensemble du σ-anneau engendré par tous les ensembles compacts est un ensemble de Borel.[5]

Pour toute $b^*\in \boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{S}^*$ étant l'ensemble des classes d'équivalence pour l'ensemble $\boldsymbol{S}$ des branches de l'unité dans $\mathfrak{G}$, on a $G_{b_1}=G_{b_2}$ si $b_1, b_2\in b^*$. Conséquemment, on en pose $G_{b^*}=G_b$ et $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}=\hat{\mathfrak{G}}_b=\mathfrak{G}/G_b$, où $b\in b^*$.

Théorème 5. *Pour toute $b^*\in \boldsymbol{S}^*$, la famille des ensembles de Baire dans $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$ coïncide avec celle de Borel de celui-là.*

Démonstration. Vu Théorème 3, $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$ est séparable. Par suite, on a le résultat voulu.

Désignons par $\pi_{b^*}(x)$ la projection de $x\in\mathfrak{G}$ sur $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$. Désignons par $\hat{\mathfrak{B}}_{b^*}$ *la famille de tous les ensembles de Baire (Borel) dans* $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$, et posons $\mathfrak{B}_{b^*}=\{\pi_{b^*}^{-1}(\hat{B}); \hat{B}\in\hat{\mathfrak{B}}_{b^*}\}$.

On sait déjà deux Lemmes suivants.

Lemme 3. *Si C est un ensemble compact exprimable comme $C=CG_{b^*}$, $b^*\in \boldsymbol{S}^*$, $\pi_{b^*}(C)$ est lui-même compact dans $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$.*

Lemme 4. *Si $\hat{C}$ est un ensemble compact dans $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$, $b^*\in \boldsymbol{S}^*$, $C=\pi_{b^*}^{-1}(\hat{C})$ est lui-même compact dans $\mathfrak{G}$.*[6]

En vertu des deux Lemmes 3 et 4, on en peut tirer aussitôt le

Théorème 6. *Pour toute $b^*\in \boldsymbol{S}^*$, $\mathfrak{B}_{b^*}$ coïncide avec le σ-anenau engendré par tous les ensembles compacts C tels que $C=CG_{b^*}$.*

Théorème 7. *Si $b_1^*\succ b_2^*$ pour $b_1^*, b_2^*\in \boldsymbol{S}^*$, on a $\mathfrak{B}_{b_1^*}\subseteq\mathfrak{B}_{b_2^*}$.*

Démonstration. Puisque $b_1^*\succ b_2^*$, on a $G_{b_1^*}\supseteq G_{b_2^*}$. Si C est un ensemble qui est exprimable comme $C=CG_{b_1^*}$, on a $C=CG_{b_2^*}$, puisque $C\subseteq CG_{b_2^*}\subseteq CG_{b_1^*}=C$. On a donc $\mathfrak{B}_{b_1^*}\subseteq\mathfrak{B}_{b_2^*}$ en vertu du Théorème 6.

---

4) Voir, P. R. Halmos: Ibid., p. 250.
5) Voir, P. R. Halmos: Ibid., p. 219.
6) Voir, P. R. Halmos: Ibid., p. 287.

Lemme 5. *Si C est un ensemble dans $\mathfrak{G}$ qui est compact et un G_δ, il y a une $b^* \in S^*$ dont C est exprimable comme $C = CG_{b^*}$.*

Démonstration. Puisque l'ensemble C est un G_δ, il y a une suite des ensembles ouverts $K_n (n=1, 2, \ldots)$ telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = C$. Pour tout K_n, il y a, pour tout $x \in C$, une $b^*(n, x) \in S^*$ et un voisinage de l'unité $V(n, x)$ tels que $xV(n, x)G_{b^*(n,x)} \subseteq K_n$ en vertu du Théorème 4. Puisque l'ensemble C est de plus compact, il y a x_{ni} $(i=1, 2, \ldots, i_0(n)) \in C$ tels que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{i_0(n)} x_{ni} V(n, x_{ni}) G_{b^*(n, x_{ni})} \subseteq K_n$. En vertu du Théorème 4, il y a une $b_0^* \in S^*$ telle que $G_{b_0^*} \subseteq G_{b^*(n, x_{ni})}$ pour tout (n, i), puisque l'ensemble $\{b^*(n, x_{ni}); n=1, 2, \ldots, i=1, 2, \ldots, i_0(n)\}$ est dénombrable. Posons $K_n^* = \bigcup_{i=1}^{i_0(n)} x_{ni} V(n, x_{ni}) G_{b^*(n, x_{ni})}$ pour tout n. On a alors

$$\begin{aligned} K_n^* G_{b_0^*} &= \Big(\bigcup_{i=1}^{i_0(n)} x_{ni} V(n, x_{ni}) G_{b^*(n, x_{ni})}\Big) G_{b_0^*} \\ &= \bigcup_{i=1}^{i_0(n)} (x_{ni} V(n, x_{ni}) G_{b^*(n, x_{ni})} G_{b_0^*}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{i_0(n)} (x_{ni} V(n, x_{ni}) G_{b^*(n, x_{ni})}) = K_n^*. \end{aligned}$$

Conséquemment, on a $CG_{b_0^*} = (\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^*) G_{b_0^*} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n^* G_{b_0^*}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^* = C$. Il suffit de prendre b_0^* comme b^*.

En vertu du Lemme 3 et du Lemme 5, on voit le

Théorème 8. *Pour qu'un ensemble compact C dans $\mathfrak{G}$ soit un G_δ, il faut et il suffit qu'il y ait une $b^* \in S^*$ telle que C soit exprimable comme $C = CG_{b^*}$.*

Démonstration. La nécessité de la condition étant évidente du Lemme 5, il ne s'agit que d'en établir la suffisance. Puisque selon Lemme 3 l'ensemble $\pi_{b^*}(C)$ est compact dans $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$, il y a une suite des ensembles ouverts $\hat{K}_n (n=1, 2, \ldots)$ d'intersection $\pi_{b^*}(C)$. On a donc $C = \pi_{b^*}^{-1}(\pi_{b^*}(C)) = \pi_{b^*}^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\pi_{b^*}^{-1}(\hat{K}_n))$. Si l'on pose $K_n = \pi_{b^*}^{-1}(\hat{K}_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, on a le résultat voulu.

Désormais, $\mathfrak{B}_0$ désigne *la famille des ensembles de Baire dans* $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{B}$ désigne *la famille des ensembles de Borel dans* $\mathfrak{G}$.

Vu Théorème 6 et Théorème 8, on voit que pour toute $b^* \in S^*$, tout ensemble de $\mathfrak{B}_{b^*}$ est ensemble de Baire dans $\mathfrak{G}$. On verra de plus le

Théorème 9. $\mathfrak{B}_0 = \bigcup_{b^*} \mathfrak{B}_{b^*}, b^* \in S^*$.[7]

Démonstration. Posons simplement $\tilde{\mathfrak{B}}_0 = \bigcup_{b^*} \mathfrak{B}_{b^*}, b^* \in S^*$. Puisqu'on voit aussitôt $\tilde{\mathfrak{B}}_0 \subseteq \mathfrak{B}_0$, il suffit de prouver $\tilde{\mathfrak{B}}_0 \supseteq \mathfrak{B}_0$. Pour cela,

7) Voir, P. R. Halmos: Ibid., p. 287.

montrerons d'abord que $\mathfrak{B}_0$ est un σ-anneau. Si $B_1, B_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}_0$, on a $B_1 - B_2 \in \tilde{\mathfrak{B}}_0$. Car, pour B_1 et B_2, il y a b_1^* et b_2^* telles que $B_1 \in \mathfrak{B}_{b_1^*}$ et $B_2 \in \mathfrak{B}_{b_2^*}$. En vertu du Théorème 4, il y a une $b_0^* \in \boldsymbol{S}^*$ telle que $b_1^* \succ b_0^*$ et $b_2^* \succ b_0^*$. Par conséquent, selon Théorème 7, on a $\mathfrak{B}_{b_0^*} \supseteq \mathfrak{B}_{b_1^*} \cup \mathfrak{B}_{b_2^*}$. On a donc $B_1, B_2 \in B_{b_0^*}$. Il en résulte $B_1 - B_2 \in \mathfrak{B}_{b_0^*} \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}_0$. Si $B_n \in \tilde{\mathfrak{B}}_0\,(n=1,2,\ldots)$, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \tilde{\mathfrak{B}}_0$. Car, pour $B_n\,(n=1,2,\ldots)$, il y a $b_n^* \in \boldsymbol{S}^*$ telle que $B_n \in \mathfrak{B}_{b_n^*}$. En vertu du Théorème 4, il y a une $b_0^* \in \boldsymbol{S}^*$ telle que $b_n^* \succ b_0^*$ pour tout n. Par conséquent, selon Théorème 7, on a $\mathfrak{B}_{b_0^*} \supseteq \mathfrak{B}_{b_n^*}$ pour tout n. On a donc $B_n \in \mathfrak{B}_{b_0^*}$ pour tout n. Il en résulte $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{B}_{b_0^*} \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}_0$.

De plus, en vertu du Lemme 5 et du Théorème 6, pour tout ensemble C qui est compact et un G_δ, il y a une $b_0^* \in \boldsymbol{S}^*$ telle que $C \in \mathfrak{B}_{b_0^*}$. On a donc $C \in \tilde{\mathfrak{B}}_0$. Par conséquent, il en résulte $\mathfrak{B}_0 \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}_0$.

Corollaire 2. *Pour toute $b_0^* \in \boldsymbol{S}^*$, on a*

$$\mathfrak{B}_0 = \bigcup_{b^*} \mathfrak{B}_{b^*}, \quad b^* \in \boldsymbol{S}^* \quad \text{et} \quad b^* \prec b_0^*.$$

Démonstration. Selon Théorème 4, pour toute $b_1^* \in \boldsymbol{S}^*$ il y a une b_2^* telle que $b_2^* \prec b_1^*$ et $b_2^* \prec b_0^*$. Dans le cas, $\mathfrak{B}_{b_2^*} \supseteq \mathfrak{B}_{b_1^*}$. Donc, $\mathfrak{B}_{b_1^*} \subseteq \bigcup_{b^*} \mathfrak{B}_{b^*}$, $b^* \in \boldsymbol{S}^*$ et $b^* \prec b_0^*$. Vu Théorème 9, on voit le résultat voulu.

On verra maintenant que, comme le cas des ensembles de Baire dans $\mathfrak{G}$, chaque fonction mesurable de Baire dans $\mathfrak{G}$[8] peut être considérée comme une fonction définie dans un $\hat{\mathfrak{G}}_{b^*}$, qui est localement compact, séparable et de plus isomorphe à un espace métrique.

Théorème 10. *Pour toute fonction $f(x)$ mesurable de Baire définie dans $\mathfrak{G}$, il y a une $b_0^* = b_0^*(f(x)) \in \boldsymbol{S}^*$ telle que*

$$f(x) = f(x_0) \qquad \text{pour tout } x \in x_0 G_{b_0^*}.$^{[9]}$$

Démonstration. i) Le cas où la fonction $f(x)$ est non-négative: Pour la fonction $f(x)$, il y a une suite des fonctions simples et mesurables de Baire $f_n(x)\,(n=1,2,\ldots)$ telle que $f_n(x) \uparrow f(x)$. $f_n(x)$ s'exprimera de la manière:

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha_{ni}, & x \in E_{ni} \ (i=1,2,\ldots,i_0(n)) \\ 0, & x \bar{\in} \bigcup_{i=1}^{i_0(n)} E_{ni}, \end{cases}$$

$\{E_{ni};\, n=1,2,\ldots,\, i=1,2,\ldots,i_0(n)\}$ étant la suite des ensembles de Baire et n'étant deux à deux aucun point commun. Puisque E_{ni} est un ensemble de Baire, il y a, en vertu du Théorème 9, une $b^*(n,i) \in \boldsymbol{S}^*$ telle que $E_{ni} \in \mathfrak{B}_{b^*(n,i)}$ et par suite que $E_{ni} = E_{ni} G_{b^*(n,i)}$. Vu Théorème 4, il y a une $b_0^* \in \boldsymbol{S}^*$ telle que $b^*(n,i) \succ b_0^*$ pour

8) Voir, P. R. Halmos: Ibid., p. 219.
9) Voir, K. Kodaira: Ibid., p. 74.

tout (n, i). Montrerons que b_0^* est une branche voulue. Posons $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{i_0(n)} E_{ni})$, on a alors $E=EG_{b_0^*}$. Car, $EG_{b_0^*}=(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{i_0(n)} E_{ni}))G_{b_0^*}$ $=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{i_0(n)} E_{ni}G_{b_0^*})\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{i_0(n)} E_{ni}G_{b^*(n,i)})=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{i_0(n)} E_{ni})=E$. On a donc $\mathfrak{G}-E$ $=(\mathfrak{G}-E)G_{b_0^*}$. Pour tout $x_0 \in \mathfrak{G}-E$, on a $f(x_0)=0$, puisque $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ $=f(x_0)$ et $f_n(x_0)=0$ pour tout n. Pour un point $x_0 \in E$, il y a un $n_0(x_0)$ tel que $x_0 \in E_{n_0(x_0), i(n_0,x_0)}$ pour un $i(n_0, x_0)$. Puisque $f_n(x)\uparrow f(x)$, il y a pour tout $n\geq n_0(x_0)$ un $i(n, x_0)$ tel que $x_0 \in E_{n,i\,n,x_0)}$ et par suite $x_0G_{b_0^*}\subseteq E_{n,i(n,x_0)}$. On a donc, pour tout $x \in x_0G_{b^*}$, $f_n(x)=f_n(x_0)$ $=\alpha_{n,i(n,x_0)}$ pour tout $n\geq n_0$. Il en résulte que $f(x_0)=f(x)$ pour tout $x \in x_0G_{b_0^*}$.

ii) Pour une fonction $f(x)$ quelconque mesurable de Baire, on peut le tirer aussitôt de i) et du Théorème 4, puisque la fonction $f(x)$ est décomposable en parties positive et négative.

Enfin, nous allons montrer que pour un ensemble compact dans $\mathfrak{G}$, qui n'est pas toujours exprimable comme un G_δ, on verra les résultats suivants.

Théorème 11. *Si C est un ensemble compact dans $\mathfrak{G}$, il est exprimable de la manière:*

$$C=\bigcap_{b^*}(CG_{b^*}),\quad b^* \in \boldsymbol{S}^*,$$

CG_{b^*} étant le plus petit des ensembles compacts contenant C dans $\mathfrak{B}_{b^*}$. La proposition inverse est aussi vraie.

Démonstration. Il suffit de prouver que pour un ensemble compact C dans $\mathfrak{G}$ on a $C\supseteq \bigcap_{b^*\in S^*}(CG_{b^*})$, puisqu'on verra facilement les autres propriétés. Puisque l'ensemble C est l'intersection des ensembles $C\theta$, θ étant tous les voisinages de l'unité, et puisque, en vertu du Théorème 4, pour tout voisinage de l'unité θ il y a un voisinage θ' et une b^* tels que $\theta' G_{b^*}\subseteq\theta$, si $\{\theta_n^{b^*}; n=1, 2, \dots\}$ s'exprime une suite de voisinages de l'unité telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n^{b^*}=G_{b^*}$, on a $C=\bigcap_{\theta} C\theta$

$$= \bigcap_{b^*\in S^*}\{\bigcap_{n=1}^{\infty}(C\theta_n^{b^*}G_{b^*})\}\supseteq \bigcap_{b^*\in S^*}\{C(\bigcap_{n=1}^{\infty}\theta_n^{b^*})G_{b^*}\}=\bigcap_{b^*\in S^*}(CG_{b^*}G_{b^*})=\bigcap_{b^*\in S^*}(CG_{b^*}).$$

Théorème 12. *Si C est un ensemble compact dans $\mathfrak{G}$, on a*

$$C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda,$$

où $\bar{\bar{\Lambda}}=\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^*$[10] et K_λ est un ensemble ouvert pour tout λ.

Démonstration. Dans la démonstration du Théorème 11, on a $C=\bigcap_{b^*\in S^*}\{\bigcap_{n=1}^{\infty}(C\theta_n^{b^*}G_{b^*})\}$, par suite si l'on pose $K_n^{b^*}=C\theta_n^{b^*}G_{b^*}$, on a $C=\bigcap_{b^*\in S^*}\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n^{b^*}$ et $K_n^{b^*}$ est un ensemble ouvert. Puisque $\bar{\bar{S}}^*\cdot\aleph_0=\bar{\bar{S}}^*$, le nombre cardinal d'ensemble $\{(b^*, n); b^* \in \boldsymbol{S}^*, n=1, 2, \dots\}$ coïncide avec $\bar{\bar{S}}^*$. Par suite, le résultat voulu est vrai.

10) Pour un ensemble quelconque A, $\bar{\bar{A}}$ désigne son nombre cardinal.