93. *Sur l'Équation Intégrale de Volterra*

Par Tokui SATŌ et Akira IWASAKI
Institut de Mathématiques, Université de Kôbe, Japon
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1955)

1. Notations et hypothèses. Dans cet article, nous voulons étendre, au cas où $f(x)$ et $K(x, t, u)$ sont mesurables, quelques-uns des résultats que l'un des auteurs a obtenus[1] concernant l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$u(x)=f(x)+\int_0^x K(x, t, u(t))\,dt, \tag{1}$$

en supposant $f(x)$ et $K(x, t, u)$ continues.

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes:

I: intervalle fermé $0\leq x\leq 1$,
I_r: intervalle fermé $0\leq x\leq r$,
Δ: domaine fermé $0\leq t\leq x\leq 1$ dans le plan (x, t),
D: domaine $(x, t)\in\Delta$, $-\infty<u<+\infty$ dans l'espace (x, t, u).

$f(x)$ et $\bar{f}(x)$ seront des fonctions bornées et mesurables; $K(x, t, u)$ et $\bar{K}(x, t, u)$ seront des fonctions définies dans D, continues par rapport à deux variables x et u pour presque toute valeur de t dans I, mesurables par rapport à t et majorées par une fonction sommable $M(t)$:

$$|K(x, t, u)|\leq M(t), \quad |\bar{K}(x, t, u)|\leq M(t).$$

$f(x, \lambda)$ et $K(x, t, u, \lambda)$ seront également continues par rapport à λ dans un intervalle Λ et satisferont aux mêmes conditions que $f(t)$ et $K(x, t, u)$ si l'on attribue à λ une valeur quelconque mais déterminée dans Λ.

2. Rappel des résultats connus. MM. A. Kanazawa et H. Murakami[2] ont obtenu le théorème suivant.

Théorème d'existence. L'équation intégrale (1) admet au moins *une solution mesurable et bornée dans I.*

Le théorème suivant est évident et il serait inutile de le démontrer.

Théorème 1. *Si l'équation intégrale (1) admet une solution $u=u(x)$ bornée et mesurable dans I, la fonction $u(x)-f(x)$ est continue dans I.*

3. Solution maximale. Théorème 2. *Si $K(x, t, u)$ est non décroissante par rapport à u, il existe, parmi les solutions de l'équation intégrale (1), une qui est au moins égale dans I à toutes les autres.*

Nous l'appellerons la *solution maximale.*

Soit $\eta(>0)$ une constante arbitraire. L'équation

$$u(x)=f(x)+\eta+\int_0^x K(x, t, u(t))\,dt \tag{2}$$

admet une solution $u=u_\eta(x)$ bornée et mesurable dans I. Posons

$$w(x)=u(x)-f(x), \quad w_\eta(x)=u_\eta(x)-f(x),$$

où $u=u(x)$ est une solution bornée et mesurable dans I de l'équation (1). $w(x)$ et $w_\eta(x)$ sont continues dans I et $w(0)=0$, $w_\eta(0)=\eta$. On a donc l'inégalité

$$w(x) < w_\eta(x) \tag{3}$$

dans l'intervalle I_δ, où $\delta(>0)$ est un nombre suffisamment petit. Désignons par ξ la borne supérieure des δ tels que l'on ait l'inégalité (3) dans I_δ. Si l'on avait $\xi<1$, on aurait l'inégalité (3) dans $a\leq x<\xi$ et $w(\xi)=w_\eta(\xi)$.

Mais alors on aurait

$$\int_0^\xi K(\xi, t, w(t)+f(t))\,dt < \eta+\int_0^\xi K(\xi, t, w_\eta(t)+f(t))\,dt$$

et on ne pourrait avoir $w(\xi)=w_\eta(\xi)$.

On a donc l'inégalité (3) dans I.

On verra de même que l'on a

$$w_\eta(x) < w_{\eta'}(x)$$

pour $\eta<\eta'$. $w_\eta(x)$ converge donc uniformément vers une fonction $\overline{w}(x)$ continue dans I, et l'on a

$$w(x) \leq \overline{w}(x),$$
$$\overline{w}(x)=\int_0^x K(x, t, w(t)+f(t))\,dt, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Cette démonstration nous amène immédiatement au corollaire suivant.

Corollaire. *Si $K(x,t,u)$ est non décroissante par rapport à u dans D, la solution maximale $u_\eta(x)$ de l'équation intégrale (2) tend uniformément vers la solution maximale de l'équation intégrale (1) pour $\eta \downarrow 0$.*

4. Théorèmes des comparaison. Théorème 3. *Si $K(x,t,u)$ est non décroissante par rapport à u, les inégalités*

$$f(x)\leq \bar{f}(x), \quad K(x, t, u)\leq \overline{K}(x, t, \overline{u}) \qquad (u<\overline{u})$$

entraînent $u(x)\leq \overline{u}(x)$ dans I, où $u=u(x)$ est une solution bornée et mesurable de l'équation intégrale (1) et $u=\overline{u}(x)$ est la solution maximale de l'équation intégrale

$$\overline{u}(x)=\bar{f}(x)+\int_0^x \overline{K}(x, t, \overline{u}(t))\,dt. \tag{4}$$

Si $\overline{u}_\eta(x)$ est une solution de

$$\overline{u}(x)=f(x)+\eta+\int_0^x \overline{K}(x, t, \overline{u}(t))\,dt \tag{5}$$

on a l'inégalité $u(x)\leq \overline{u}_\eta(x)$ dans I pour $\eta>0$. $\overline{u}_\eta(x)$ tendant vers la solution maximale $\overline{u}(x)$ de l'équation (4) pour $\eta \downarrow 0$, on a $u(x) \leq \overline{u}(x)$.

Théorème 4. *Si $v=v(x)$ est une solution de l'inéquation*

$$v(x) \leq f(x) + \int_0^x K(x, t, v(t))\, dt \tag{6}$$

bornée et mesurable dans I et telle que $v(x)-f(x)$ soit continue dans I, on a l'inégalité

$$v(x) \leq \overline{u}(x) \tag{7}$$

dans I, $u=\overline{u}(x)$ désignant la solution maximale de l'équation intégrale (1).

L'équation intégrale (2) admet une solution $u=u_\eta(x)$ bornée et mesurable dans I. (6) entraîne $v(0) \leq f(0) < f(0)+\eta = u_\eta(0)$. On a donc $v(x) < u_\eta(x)$ au moins dans un intervalle assez petit I_δ. Il est à démontrer que l'on peut prendre $\delta=1$. Sinon, on pourrait trouver une valeur ξ telle que l'on ait

$$v(x) < u_\eta(x) \qquad (0 < x < \xi),$$
$$v(\xi) = u_\eta(\xi).$$

On aurait alors

$$v(\xi) \leq f(\xi) + \int_0^\xi K(\xi, t, v(t))\, dt$$
$$< f(\xi) + \eta + \int_0^\xi K(\xi, t, u_\eta(t))\, dt = u_\eta(\xi),$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité $v(\xi)=u_\eta(\xi)$. $u_\eta(x)$ tendant vers $\overline{u}(x)$ pour $\eta \downarrow 0$, on a l'inégalité (7) dans I.

5. Théorèmes d'unicité. Théorème 5. *Si l'équation intégrale*

$$\overline{u}(x) = \int_0^x \overline{K}(x, t, \overline{u}(t))\, dt \tag{8}$$

n'admet qu'une solution identiquement nulle, les inégalités

$$\overline{K}(x, t, u) \leq \overline{K}(x, t, \overline{u}) \qquad (u < \overline{u}),$$
$$| K(x, t, u) - K(x, t, u') | \leq \overline{K}(x, t, | u-u' |) \qquad ((x, t) \in \Delta)$$

entraînent l'unicité de la solution de l'équation intégrale (1).

Soient $u=u(x)$ et $u=v(x)$ deux solutions de l'équation (1). On a alors

$$| u(x) - v(x) | \leq \int_0^x | K(x, t, u(t)) - K(x, t, v(t)) |\, dt$$
$$\leq \int_0^x \overline{K}(x, t, | u(t) - v(x) |)\, dt.$$

$| u(x)-v(x) |$ est continue dans I et satisfait donc à l'inéquation intégrale

$$w(x) \leq \int_0^x \overline{K}(x, t, w(t))\, dt.$$

La solution maximale dans I de l'équation (8) étant $u(x)\equiv 0$, on a $u(x)-v(x)\equiv 0$ dans I.

D'après le corollaire du théorème 2, on obtient immédiatement le théorème suivant.

Théorème 6. *Si $\overline{K}(x, t, u)$ est non décroissante par rapport à u, et si l'on a l'inégalité*

$$|K(x, t, u, \lambda)-K(x, t, \bar{u}, \lambda)| \leq \overline{K}(x, t, |u-\bar{u}|),$$

l'équation intégrale

$$u(x)=f(x, \lambda)+\int_{a(\lambda)}^{x} K(x, t, u(t), \lambda)\, dt$$

admet dans $(0 \leq)\ a(\lambda) \leq x \leq 1$ une solution et une seule $u=u(x, \lambda)$ qui est également continue dans Λ pour $(0 \leq)\ a(\lambda) \leq x \leq 1$, où $a(\lambda)$ est une fonction continue dans Λ.

Soit $\overline{S}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une quelconque des fonctions $\max\{u_j\}$, $\sum u_j$, $\max\{|u_j|\}$, $\sum|u_j|$ ou plus généralement une fonction quelconque satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $\overline{S}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est continue dans $-\infty < u_1, u_2, \ldots, u_n < +\infty$;

2) $\overline{S}(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots u_n+v_n)$
$$\leq \overline{S}(u_1, u_2, \ldots, u_n)+\overline{S}(v_1, v_2, \ldots, v_n);$$

3) on a
$$\overline{S}\left(\int_a^x \varphi_1(t)\, dt,\ \int_a^x \varphi_2(t)\, dt, \ldots,\ \int_a^x \varphi_n(t)\, dt\right)$$
$$\leq \int_a^x \overline{S}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt$$

pour toutes les fonctions sommables $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

On peut étendre[3] par l'intermediaire de cette fonction $\overline{S}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, les théorèmes obtenus ci-dessus au cas d'un système des équation intégrales

$$u_j(x)=f_j(x)+\int_a^x K_j(x, t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))\, dt \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Références

1) T. Satō: Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra, Comp. Math., **11** (1953).
2) Voir le Mémoire paru dans ce tome.
3) Loc. cit.